1.29 Sea $\mathcal{B}_1$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{bmatrix} \right\},$$

y sea $\mathcal{B}_2$ la base de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}_1$ en la base $\mathcal{B}_2$ es

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 10 & 10 & -5 \\ 11 & -10 & 2 \\ 2 & 5 & 14 \end{bmatrix}.$$

Hallar el vector de coordenadas de $v = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}^T$ en base $\mathcal{B}_2$.

↳ QTO esto es el vector

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lo que necesito $[v]^{\mathcal{B}_1}$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\beta = 4 \qquad \begin{cases} \frac{3}{5}\alpha - \frac{4}{5}\gamma = 5 \\ \frac{4}{5}\alpha + \frac{3}{5}\gamma = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3/5 & -4/5 & 5 \\ 4/5 & 3/5 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 25 \\ 4 & 3 & 15 \end{array}\right)$$

$3F_2 - 4F_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 25 \\ 0 & 25 & -55 \end{array}\right) \qquad \gamma = -11/5$$

$$3\alpha + 44/5 = 25$$

$$3\alpha = \frac{125-44}{5} = 81/5 \qquad \alpha = 27/5$$

$$\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 27/5 \\ 4 \\ -11/5 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^{\mathcal{B}_2} = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \begin{pmatrix} 27/5 \\ 4 \\ -11/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 10 & 10 & -5 \\ 11 & -10 & 2 \\ 2 & 5 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27/5 \\ 4 \\ -11/5 \end{pmatrix}$$

1.30 Sea $\mathcal{B}_1$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}. \qquad \mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$$

(a) Hallar una base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}_1$ en la base $\mathcal{B}_2$ sea

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

C_1: $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 5v_1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

(b) Sea $\mathcal{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{E}$ en la base $\mathcal{B}_2$ y para cada $x \in \mathbb{R}^3$ determinar la expresión del vector de coordenadas de x en la base $\mathcal{B}_2$.

C_2: $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 5v_1 + 5v_2 \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 5v_2$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

C_3: $\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} = 10v_1 + 5v_2 + 9v_3$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 9v_3$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.30 Sea $\mathcal{B}_1$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) Hallar una base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}_1$ en la base $\mathcal{B}_2$ sea

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$

(b) Sea $\mathcal{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{E}$ en la base $\mathcal{B}_2$ y para cada $x \in \mathbb{R}^3$ determinar la expresión del vector de coordenadas de x en la base $\mathcal{B}_2$.

$$\left(M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\right)^{-1} \longrightarrow M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$$

$$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} [v]^{\mathcal{B}_2} = [v]^{\mathcal{B}_1}$$

Si tomo $v = v_1 \Rightarrow [v_1]^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [v_1]^{\mathcal{B}_1} \longrightarrow v_1$$

$$M_{\mathcal{B}_1}^{E} [v_1]^{\mathcal{B}_1} = [v_1]^{E} \longrightarrow v_1$$

(b) $$M_E^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\left(M_{\mathcal{B}_2}^{E}\right)^{-1}$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overset{3/5}{\alpha} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix} + \overset{-4/5}{\beta} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} + \overset{0}{\gamma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

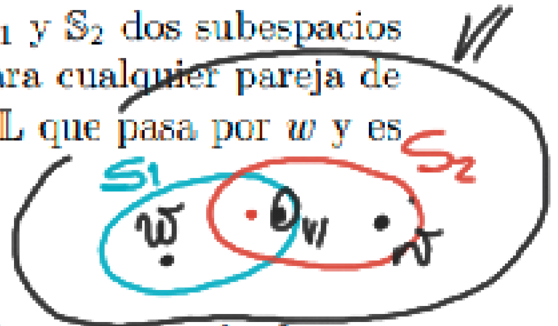
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\, v_1 + 0\, v_2 + v_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \overset{4/5}{\alpha} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix} + \overset{3/5}{\beta} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} + \overset{0}{\gamma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow [x]^{\mathcal{B}_2} = M_E^{\mathcal{B}_2} [x]^E =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1/5 \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_3 \\ -4x_1 + 3x_3 \\ 5x_2 \end{pmatrix}$$

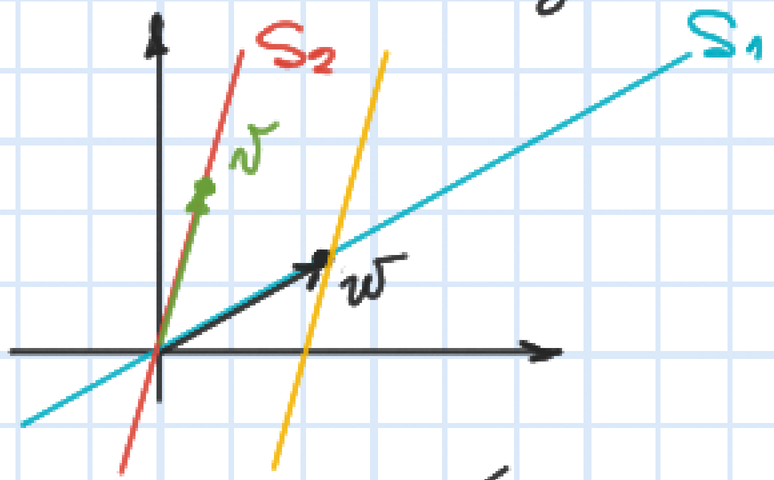
1.31 ☢ [*miniatura*] Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ dos subespacios de $\mathbb{V}$ tales que ninguno contiene al otro. Comprobar que para cualquier pareja de vectores v y w tales que $w \in \mathbb{S}_1 \setminus \mathbb{S}_2$ y $v \in \mathbb{S}_2 \setminus \mathbb{S}_1$ la recta $\mathbb{L}$ que pasa por w y es paralela a v



$$\mathbb{L} := \{tv + w : t \in \mathbb{R}\}$$

tiene un único punto en común con $\mathbb{S}_1$ y ninguno con $\mathbb{S}_2$. Utilizar este resultado para comprobar que $\mathbb{V}$ no puede ser la unión de dos subespacios propios. En particular, es imposible que la unión de dos subespacios sea un subespacio salvo que uno de los dos contenga al otro.

↳ en general no es subespacio (*)



$L := \{tv + w : t \in \mathbb{R}\}$

no es subespacio

La recta tiene un único punto en común con S_1

w, $t=0$ — Supongamos otro $\exists t \neq 0 : tv + w \in S_1$

Como $w \in S_1 \Rightarrow tv + w - w \in S_1 \Rightarrow$

$tv \in S_1 \Rightarrow v \in S_1$ ABS.

$\Rightarrow$ El único punto de la recta que está en S_1 es w

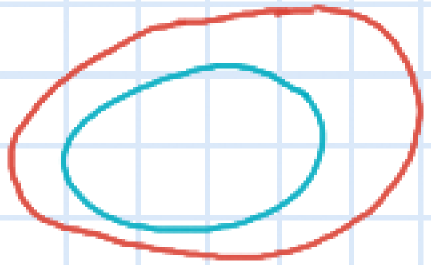
Si tuviera un punto en $S_2 \Rightarrow$ para algún t

$tv + w \in S_2$ como $tv \in S_2 \Rightarrow tv + w - tv$

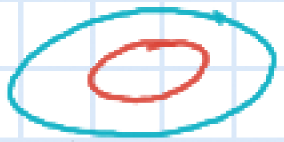
tendría que estar en $S_2 \Rightarrow w \in S_2$ ABS.

$\Rightarrow L$ no tiene puntos de S_2

(*) Salvo $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_1 \cup S_2 = S_2$



o $S_2 \subseteq S_1 \Rightarrow S_1 \cup S_2 = S_1$



Operaciones entre subespacios $S_i \subseteq V$ ↳ subesp.

$$S_1 + S_2 = \{v \in V : v = a v_1 + b v_2 \text{ con } v_1 \in S_1 \wedge v_2 \in S_2,\ a, b \in K\}$$

OBS: (1) $S_1 + S_2$ es SEV

1) $S_1 + S_2 \subseteq V$ por def

2) $S_1 + S_2 \neq \emptyset$

$0_V \in S_1 + S_2$ pues $0_V = \underbrace{0_V}_{\in S_1} + \underbrace{0_V}_{\in S_2}$

3) $v \in S_1 + S_2$, $u \in S_1 + S_2$, $\alpha \in K$

$v = a \underbrace{v_1}_{\in S_1} + b \underbrace{v_2}_{\in S_2}$ $\quad u = a \underbrace{u_1}_{\in S_1} + b \underbrace{u_2}_{\in S_2}$

$\alpha u + v = \alpha(a u_1 + b u_2) + a v_1 + b v_2 =$

$= \underbrace{(\alpha a u_1 + a v_1)}_{\in S_1} + \underbrace{(\alpha b u_2 + b v_2)}_{\in S_2} \in S_1 + S_2$

(2) Si tengo una base de S_1 y una de S_2 la unión de las bases es un sistema generador de $S_1 + S_2$

Si $S_1 \cap S_2 = \{0_V\} \Rightarrow$

$S_1 \oplus S_2$ En este caso $B_{S_1} \cup B_{S_2} = B_{S_1 \oplus S_2}$

Suma directa

Intersección $S_1 \cap S_2 = \{v \in V : v \in S_1 \wedge v \in S_2\}$

① $S_1 \cap S_2$ es subespacio. $S_1 \cap S_2 \subseteq V$ por def.

$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ pues $0_V \in S_1 \wedge 0 \in S_2 \Rightarrow 0_V \in S_1 \cap S_2$

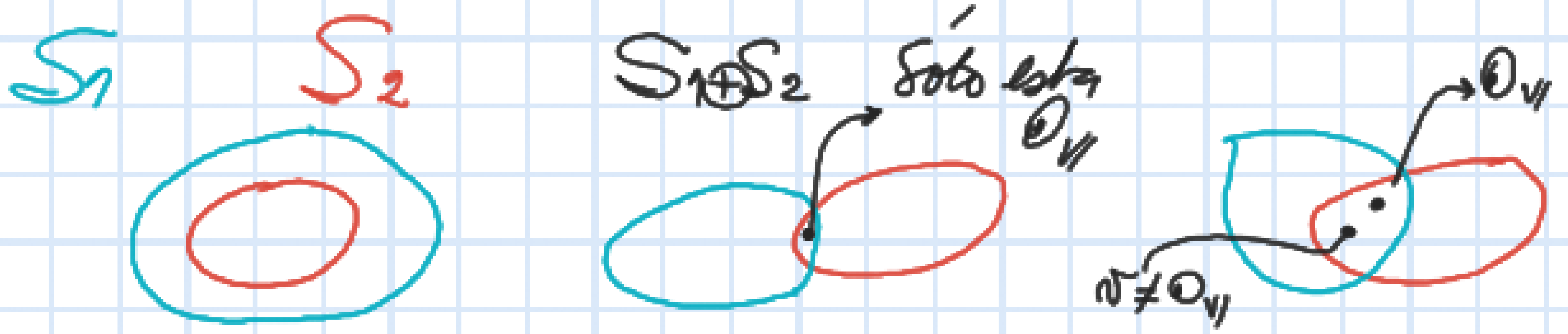
Si $v \in S_1 \cap S_2$, $u \in S_1 \cap S$, $\alpha \in K \Rightarrow$

$$\underbrace{\alpha u}_{\substack{\in S_1 \\ \in S_2}} + \underbrace{v}_{\substack{\in S_1 \\ \in S_2}} \begin{array}{l}\in S_1 \\ \in S_2\end{array} \Rightarrow \alpha u + v \in S_1 \cap S_2$$

Dados S_1 y S_2

$$\dim(S_1+S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

$$\dim(S_1 \oplus S_2) = \dim S_1 + \dim S_2$$



1.32 Para las siguientes elecciones de subespacios $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ del espacio vectorial $\mathbb{V}$, hallar una base del mayor subespacio contenido en ambos y otra del menor subespacio que los contiene.

$S_1 \cap S_2$

$S_1 + S_2$

(a) $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ son los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$\dim S_1 = 3$

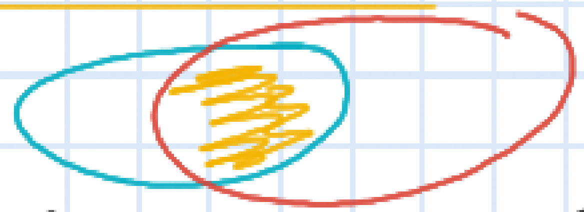
$\dim S_2 = 2$

$$\mathbb{S}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\},$$

$$\mathbb{S}_2 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

¿$S_1 \oplus S_2$? NO

El subespacio contenido en ambos es $S_1 \cap S_2$



y el menor subespacio que los contiene es $S_1 + S_2$

$S_1 \cap S_2 = \{v \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 + x_4 = 0 \wedge x_1 + x_2 = 0 \wedge x_3 - 2x_4 = 0\}$

$x_3 = 2x_4$ $\quad x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 + 3x_4 = 0$

$x_2 = -3x_4$

$x_1 + x_2 = 0 \rightarrow -x_2 = x_1 = 3x_4$

$$\Rightarrow \text{Si } v \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 3x_4 \\ -3x_4 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B_{S_1 \cap S_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(S_1 + S_2) = \underset{3}{\dim S_1} + \underset{2}{\dim S_2} - \underset{1}{\dim(S_1 \cap S_2)} = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim(S_1+S_2)=4 \\ S_1+S_2 \subseteq \mathbb{R}^4 \end{array}\right\} S_1+S_2=\mathbb{R}^4$$

1.33 [ver **Ejercicio 1.23**] Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ dos matrices tales que:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathrm{rg}(B) = 2$. Hallar una base del subespacio

$$\mathrm{nul}(B) + \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}.$$

OBS.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Nul}(AB) = \mathbb{R}^2$

$\mathrm{Nul}(B) = \mathrm{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\mathrm{Nul}(AB) \supseteq \mathrm{Nul}(B)$$

$A(Bv) = A0 = 0$

Si $v \in \mathrm{Nul}(B) \Rightarrow B.v = 0 \Rightarrow A(Bv) = 0$, $(AB)v = 0$

$\Rightarrow v \in \mathrm{Nul}(AB)$

$$\dim \mathrm{Nul}(M) + \mathrm{rg}(M) = \#\,\text{columnas } M$$

$\mathrm{rg}(M) = \dim \mathrm{Col}(M) = \dim \mathrm{Fil}(M)$

$$\underbrace{\dim \mathrm{Nul}(B)}_{2} + \mathrm{rg}(B) = \#\,\text{columnas } B$$

$$+ \ 2 \ = \ 4$$

Veamos quien es $\mathrm{Nul}(AB)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2+F_1 \\ F_3+2F_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{3} \end{pmatrix} \quad x_3 = -x_4$$

Como $\dim \mathrm{Nul}(AB) = \dim \mathrm{Nul}(B) = 2$

$\Rightarrow \mathrm{Nul}(AB) = \mathrm{Nul}(B)$

$$\mathrm{Nul}(B) = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 : v = \begin{pmatrix} x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\}$$

$x_3 = -x_4$

$-x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$

$x_1 = x_2 - 2x_4 + x_4 = x_2 - x_4$

$$\Rightarrow \mathrm{Nul}(B) = \mathrm{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\} = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 : v = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} \right\} = S$$

$$S = \mathrm{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Un cj. generador del $\mathrm{Nul}(B) + S$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2+F_1 \\ F_3-F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ F_3+2F_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} \end{pmatrix} \quad F_4 = -\tfrac{1}{2}F_3$$

$$\text{Base de } \mathrm{Nul}(B) + S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$