Ejemplo :

Sea $T: \underset{TL}{\mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}} \,/\, T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b & 2c \\ 0 & a+b+2c \end{pmatrix}$

(a) Calcular $T(1-x+x^2)$

(b) Calcular $T(S)$ con $S = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] : p(0)=0 \}$

(c) Calcular $T^{-1}(U)$ con $U = \{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : tr(A) = 0 \}$

(d) Bases de $Nu(T)$ e $Im(T)$


(a) $T(1-x+x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $T(S) = \{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : T(p) = A \,,\, p \in S \}$

$p \in S \Rightarrow p(x) = a+bx+cx^2 \in S \Rightarrow p(0) = 0 \Rightarrow a = 0$

$S = \{ bx + cx^2 \,,\, b, c \in \mathbb{R} \} = gen\{x, x^2\}$

$\Rightarrow T(S) = gen\{T(x), T(x^2)\} = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $T^{-1}(U) = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] : T(p) \in U \}$

$T(p) = T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b & 2c \\ 0 & a+b+2c \end{pmatrix} \in U$

$\Leftrightarrow a+b+a+b+2c = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{2}a + \cancel{2}b + \cancel{2}c = 0$

Con $a+b+c=0 \Rightarrow a = -b-c$

$p(x) \in T^{-1}(U)$ es $p(x) = (-b-c) + bx + cx^2$

$\Rightarrow T^{-1}(U) = \{ \underbrace{(-b-c) + bx + cx^2}_{b(x-1)+c(x^2-1)} \,,\, b, c \in \mathbb{R} \}$

$= gen\{ -1+x \,,\, -1+x^2 \}$

Obs : $T(-1+x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a=-1$ $b=1$ $c=0$

$T(-1+x^2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $a=-1$ $b=0$ $c=1$

(d) $Nu(T) = \{ a+bx+cx^2 : T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$

$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b & 2c \\ 0 & a+b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 0 \to a = -b \\ 2c = 0 \to c = 0 \\ 0 = 0 \\ a+b+2c = 0 \checkmark \end{cases}$

$\Rightarrow Nu(T) = \{ a + (-a)x \,,\, a \in \mathbb{R} \} = gen\{1-x\}$

$\wedge \{ \underset{\neq 0_{\mathbb{R}_2[x]}}{1-x} \}$ es LI $\Rightarrow B_{NuT} = \{1-x\}$ y $\dim Nu(T) = 1$

Para la $Im(T)$ : Busco un conjunto generador de $V = \mathbb{R}_2[x]$

$V = \mathbb{R}_2[x] = \text{gen}\left\{1+x+x^2,\ 1+x,\ 1\right\}$ (verificar)

$\Rightarrow \text{Im}(T) = \text{gen}\left\{T(1+x+x^2), T(1+x), T(1)\right\}$

$\text{Im}(T) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}2&2\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ $\times 2$

$= \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}2&2\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\right\}$ $\cdot/.2$ $\cdot/.2$

$= \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

$\wedge \left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ es li

$\Rightarrow B_{\text{Im}\,T} = \left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

Obs: Si tomamos $\mathbb{R}_2[x] = \text{gen}\{1, x, x^2\}$

$\Rightarrow \text{Im}(T) = \text{gen}\{T(1), T(x), T(x^2)\}$

$= \text{gen}\left\{\cancel{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&2\end{pmatrix}\right\}$

$= \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&2\end{pmatrix}\right\}$

Obs: $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} \neq \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&2\end{pmatrix}\right\}$

$\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&2\end{pmatrix}\right\} = \text{Im}(T)$

Ej:

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+z\\2x+y+z\end{pmatrix}$

Sea $U = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ $\longrightarrow$ ecuaciones que lo definen

Quiero hallar $T^{-1}(U)$ "Falta calcular"

$T^{-1}(U) = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} : T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in U\right\}$

$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b\\a+c\\2a+b+c\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$(*)$ $\Rightarrow \begin{cases} a+b = \alpha+\beta \\ a+c = \alpha \\ 2a+b+c = 2\alpha-\beta \end{cases} \rightsquigarrow$ - - - -

Obs $\begin{pmatrix}a+b\\a+c\\2a+b+c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} a+b = 1 \\ a+c = 0 \\ 2a+b+c = -1 \end{matrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ 2&1&1&-1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&1\\ 0&1&-1&1\\ 0&-1&1&-3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$

$F_1 - F_2$

$F_3 - 2F_1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&1\\ 0&1&-1&1\\ 0&0&0&-2 \end{array}\right) \to$ Abs $\quad \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$F_2 + F_3$

$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \therefore \nexists \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \notin \text{Im}(T)$

# TRANSF. LINEALES (Resumen)

$\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos E.V sobre $K$

$T: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es TL si

1) $T(v+w) = T(v) + T(w) \quad \forall v \, \forall w \in \mathbb{V}$

2) $T(\alpha v) = \alpha T(v) \quad \forall \alpha \in K \; \forall v \in \mathbb{V}$

$Nu(T) = \{ v \in \mathbb{V} : T(v) = 0_W \}$ SE de $\mathbb{V}$

$Im(T) = \{ w \in \mathbb{W} \; T(v) = w, v \in \mathbb{V} \}$ SE de $\mathbb{W}$

$B = \{ v_1, v_2, \ldots v_n \}$ base de $\mathbb{V}$

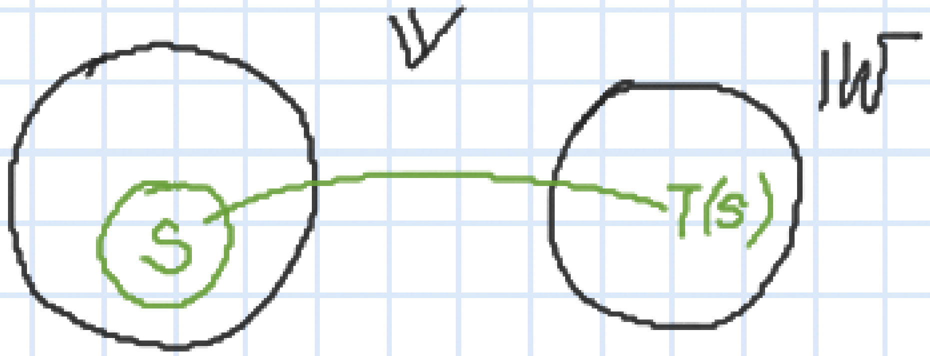
$\Rightarrow Im(T) = gen \{ T(v_1), T(v_2), \ldots T(v_n) \}$

Prop: $T(0_V) = 0_W$

$T\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i T(v_i)$

$S$ SE de $\mathbb{V} \Rightarrow T(S)$ es SE de $\mathbb{W}$

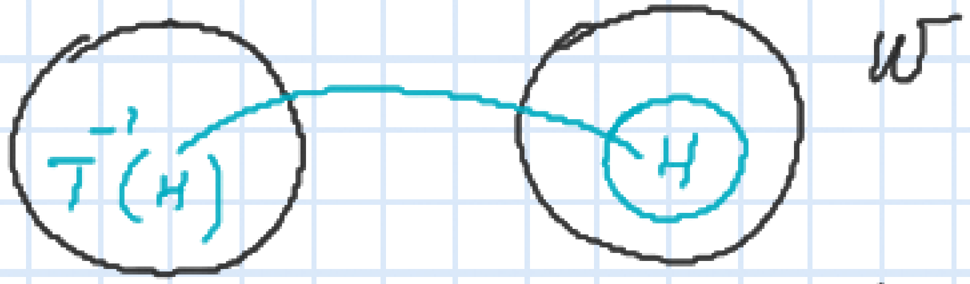
$T(S) = \{ w \in \mathbb{W} \,/\, T(v) = w, \; v \in S \}$




Si $S = \mathbb{V} \Rightarrow T(S) = Im(T)$

$H$ es SE de $\mathbb{W} \Rightarrow T^{-1}(H)$ es SE de $\mathbb{V}$

$T^{-1}(H) = \{ v \in \mathbb{V} : T(v) \in H \}$




- Si $W = \{ 0_W \} \Rightarrow T^{-1}(W) = Nu(T)$

# ¿En qué caso una transformación lineal está bien definida?

## Teorema fundamental de las transformaciones lineales (TFTL)

Sean $\mathbb{V}_K$ y $\mathbb{W}_K$ dos espacios vectoriales, siendo $\mathbb{V}_K$ de dimensión finita $n$, y $B=\{v_1,...,v_n\}$ una base de $\mathbb{V}_K$ y $w_1,...,w_n$ vectores cualesquiera de $\mathbb{W}_K$.
Entonces existe una única transformación lineal $T:\mathbb{V}_K\to\mathbb{W}_K$ tal que $T(v_i)=w_i$, $1\le i\le n$.

Uso:

Sea $V=\mathbb{R}^2$ $W=\mathbb{R}_2[x]$ sea $B=\left\{\binom{1}{0}\binom{0}{1}\right\}$

Si $T\binom{1}{0}=x^2$ $T\binom{0}{1}=1-x+x^2$ con $\{x^2, 1-x+x^2\}\subset\mathbb{R}_2[x]$

$\underset{\text{TFTL}}{\Rightarrow}$ $\exists!\ T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_2[x]$ que cumple lo pedido $T\binom{1}{0}=x^2$

$T\binom{0}{1}=1-x+x^2$

Cómo calculo p.e.: $T\binom{3}{4}=?$ $\binom{3}{4}=3\binom{1}{0}+4\binom{0}{1}\Rightarrow$

$\Rightarrow T\binom{3}{4}=T\left(3\binom{1}{0}+4\binom{0}{1}\right)=3T\binom{1}{0}+4T\binom{0}{1}=3x^2+4(1-x+x^2)$

$\Rightarrow T\binom{3}{4}=4-4x+7x^2$

y el $T\binom{x_1}{x_2}=?$ $\binom{x_1}{x_2}=x_1\binom{1}{0}+x_2\binom{0}{1}\Rightarrow$

$\Rightarrow T\binom{x_1}{x_2}=x_1T\binom{1}{0}+x_2T\binom{0}{1}=x_1(x^2)+x_2(1-x+x^2)$

$\Rightarrow T\binom{x_1}{x_2}=x_2+(-x_2)x+(x_1+x_2)x^2\to$ FÓRMULA EXPLIC.

• $\exists$ TL : $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 / T\binom{1}{0}=\binom{0}{0}\wedge T\binom{2}{0}=\binom{1}{1}$?

Obs $\left\{\binom{1}{0}\binom{2}{0}\right\}$ no forman base de $\mathbb{R}^2$ ∴ No puedo usar TFTL

Como $T\binom{2}{0}=T\left(2\binom{1}{0}\right)=2T\binom{1}{0}=2\cdot\binom{0}{0}=\binom{0}{0}\neq\binom{1}{1}$ por esto $\nexists$ TL

• $\exists$ TL $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2/T\binom{1}{0}=\binom{1}{1}$? $\left\{\binom{1}{0}\right\}$ no forma base de $\mathbb{R}^2$ ∴ TFTL no se puede aplicar pero $\left\{\binom{1}{0}\binom{1}{1}\right\}$ extendida a base de $\mathbb{R}^2$

y ahora $T\binom{1}{0}=\binom{1}{1}$

$T\binom{1}{1}=\underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{arbitrario}}$ por TFTL $\exists!\ T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

Que cumpla $T\binom{1}{0}=\binom{1}{1}$ hay infinitas

**2.9** Hallar todos los $a\in\mathbb{R}$ para los cuales existe una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que

$$\boxed{\begin{aligned}T\left([1\ \ 1\ \ 1]^T\right)&=[1\ \ a\ \ 1]^T,\\ T\left([1\ \ 0\ \ -1]^T\right)&=[1\ \ 0\ \ 1]^T,\\ T\left([-1\ \ -1\ \ 0]^T\right)&=[1\ \ 2\ \ 3]^T,\end{aligned}}$$
$$T\left(\underbrace{[1\ \ -1\ \ -1]^T}_{v_4}\right)=[5\ \ 1\ \ a^2]^T.$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}=3$$

$v_1=(1\ 1\ 1)^T$

$v_2=(1\ 0\ -1)^T\Rightarrow\{v_1\ v_2\ v_3\}$ es LI

$v_3=(-1\ -1\ 0)^T$ en $\mathbb{R}^3$

$\Downarrow$

$B=\{v_1,v_2,v_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$

$\exists!\ T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ — (x TFTL)

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\to\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=1 & (1)\\ \alpha_1-\alpha_3=-1\\ \alpha_1-\alpha_2=-1\end{cases}$$

En (1) $\alpha_1+\alpha_1+1-\alpha_1-1=1\Rightarrow\alpha_1=1\quad\alpha_2=2\quad\alpha_3=2$

# OTRO EJEMPLO

$V = \mathbb{R}^2$

$W = \mathbb{R}_2[x]$.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_1 \\ \alpha - \beta = x_2 \end{cases}$$

$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^2 \qquad T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - x + x^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \beta = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 + x_2}{2} \, T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_1 - x_2}{2} \, T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2} \, x^2 + \frac{x_1 - x_2}{2} \left(1 - x + x^2\right)$$

$$T\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}1 & a & 1\end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}5 & 1 & a^2\end{bmatrix}^T.$$

$$v_4 = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 2 v_3$$

$$\Rightarrow \quad T(v_4) = 1\, T(v_1) + 2\, T(v_2) + 2\, T(v_3)$$

$$(5 \;\; 1 \;\; a^2)^T = (1 \;\; a \;\; 1)^T + (2 \;\; 0 \;\; 2)^T + (2 \;\; 4 \;\; 6)^T$$

$$(5 \;\; 1 \;\; a^2)^T = (5 \;\; a+4 \;\; 9)^T \iff 1 = a+4 \Rightarrow \underline{a=-3} \;\wedge\; a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \vee \underline{a=-3}$$

$\therefore$

$$T(1 \;\; 1 \;\; 1)^T = (1 \;\; -3 \;\; 1)^T$$

$$T(1 \;\; 0 \;\; -1)^T = (1 \;\; 0 \;\; 1)$$

$$T(-1 \;\; -1 \;\; 0)^T = (1 \;\; 2 \;\; 3)^T$$

Cómo sacamos la fórmula?

- $\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right]_B$ con $B = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & x\\ 1 & 0 & -1 & y\\ 1 & -1 & 0 & z\end{array}\right) \underset{\substack{F_1 - F_2 \\ F_1 - F_3}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & x\\ 0 & 1 & 0 & x-y\\ 0 & 2 & -1 & x-z\end{array}\right) \underset{F_3 - 2F_2}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & x\\ 0 & 1 & 0 & x-y\\ 0 & 0 & -1 & \end{array}\right)$$

$$x - z - 2(x-y)$$
$$-x + 2y - z$$

$$\therefore \quad \alpha_3 = x - 2y + z \qquad \alpha_2 = x - y \qquad \alpha_1 = x - \alpha_2 + \alpha_3 = x - x + y + x - 2y + z$$
$$\alpha_1 = x - y + z$$

$$(x-y+z)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + (x-2y+z)\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \checkmark$$

$$\therefore \quad T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (x-y+z)\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + (x-2y+z)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x - 4y + 2z\\ -x - y - z\\ 5x - 8y + 4z\end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad T\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\9\end{pmatrix} \checkmark$$

# Clasificación de transformaciones lineales

**Definición:** Sean $\mathbb{V}_K$ y $\mathbb{W}_K$ dos espacios vectoriales y $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ una transformación lineal. Entonces:

1. $T$ es *inyectiva* (o monomorfismo) si $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y, \forall x, y \in \mathbb{V}_K$
2. $T$ es *sobreyectiva* (o epimorfismo) si $\forall y \in \mathbb{W}_K \quad \exists x \in \mathbb{V}_K : y = T(x)$ $\quad Im(T) = W$
3. $T$ es *biyectiva* (o isomorfismo) si es inyectiva y sobreyectiva. en dim finita $\dim V_K = \dim W_K$

## Teorema de la dimensión

Sea $V$ de dimensión finita $n$ y $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Transf. lineal

$\mathcal{L}$ → cnj de TL que van de $V \to W$

Entonces $\quad \mathbf{dim}\, \boldsymbol{Nu}\,(\boldsymbol{f}) + \mathbf{dim}\, \boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f}) = \mathbf{dim}(\boldsymbol{V})$.

Demostración:

- Caso 1: $Nu\,(f) = \{0_V\}$, $\dim(Nu\,(f)) = 0$

  Dada una base de $V$, $B = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$.

  Sabemos que $Im\,(f) = gen\{f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_n)\}$ y dado que en particular el conjunto $B$ es linealmente independiente, por la propiedad (2), siendo $f$ un monomorfismo, el conjunto $\{f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_n)\}$ es también linealmente independiente. De manera que el conjunto $\{f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_n)\}$ es una base para la $Im\,(f)$ y se cumple la igualdad:
  $\dim Nu\,(f) + \dim Im(f) = \dim(V)$.
  $\quad 0 \quad + n \quad = n$

(2)
$\alpha_1 f(w_1) + \alpha_2 f(w_2) + \cdots \alpha_n f(w_n) = 0_W \Rightarrow f(\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n) = 0_W$
$\Rightarrow \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n \in Nu(f) = \{0_V\} \Rightarrow \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

- Caso 2:
  $\dim(Nu\,(f)) = n$, como $Nu\,(f) \subseteq V$ y $\dim(V) = n$ entonces $Nu\,(f) = V$ y la $Im(f) = \{0_W\}$.
  El teorema se cumple.
- Caso 3:
  Supongamos que el $\dim(Nu\,(f)) = k, 0 < k < n$ y que el conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ es una base del $Nu\,(f)$.

Extendemos esa base $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ a una base de $V$

Agregamos $\{u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n\}$ para que el conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n\}$ resulte una base de $V$.

Nuevamente $Im\,(f) = gen\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_k), f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \dots, f(u_n)\}$ $\quad$ 0 0 … 0

$Im\,(f) = gen\{f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \dots, f(u_n)\}$. Este conjunto generador de la $Im\,(f)$ tiene "$n - k$" vectores.

Analizamos la independencia lineal:

Planteamos la combinación lineal nula:

- $a_{k+1} f(u_{k+1}) + a_{k+2} f(u_{k+2}) + \dots + a_n f(u_n) = 0_W$

Reescribimos:

$f(a_{k+1}u_{k+1} + a_{k+2}u_{k+2} + \dots + a_n u_n) = 0_W \Rightarrow a_{k+1}u_{k+1} + a_{k+2}u_{k+2} + \dots + a_n u_n \in Nu(f)$

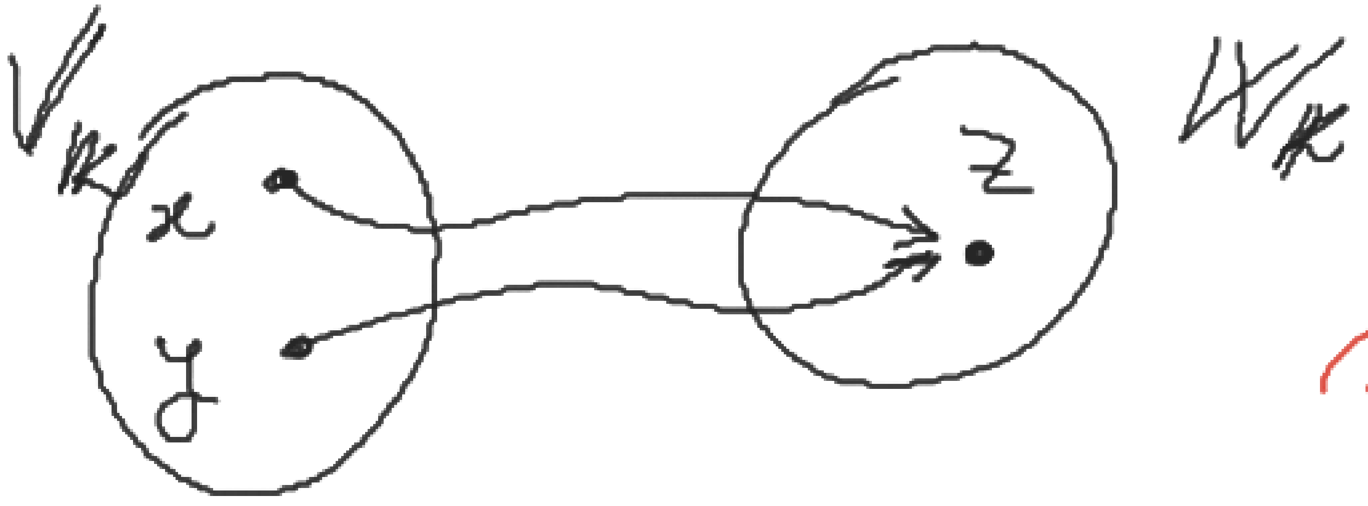
De modo que:

$a_{k+1}u_{k+1} + a_{k+2}u_{k+2} + \dots + a_n u_n = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_r u_k$ ya que el conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ es base de $Nu(f)$

Así $\quad a_{k+1}u_{k+1} + a_{k+2}u_{k+2} + \dots + a_n u_n - b_1 u_1 - b_2 u_2 - \cdots - b_r u_k = 0_V$

Y dado que el conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ es una base de $V$, en particular L.I se deduce que

$a_i = 0$ con $k + 1 \leq i \leq n$.




no es monomorfismo

$x \neq y$

$Im(T)$


no es epimorfismo

$z \notin Im(T)$

Por lo que resultan

$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_n = 0$ y el conjunto $\{f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \ldots, f(u_n)\}$ es una base de $Im(f)$

y la $\dim(Im(f)) = n - k$.

De donde finalmente se verifica que: $\mathbf{dim}(Nu(f)) + \mathbf{dim}(Im(f)) = k + (n - k) = n = \mathbf{dim}(V)$

Definir una transformación lineal

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ que cumpla ambos requisitos:

i) $Nu(T) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$

ii) $p(x) = 1 - x + x^2 \in Im(T)$.

$Nu(T) = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\} \wedge \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ es l.i. $\therefore B(Nu\,T) = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ es base de $Nu(T)$

$\therefore \dim Nu(T) = 2$

Por teo. de la dimensión $\underbrace{\dim Nu(T)}_{=2} + \dim Im(T) = \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=3}$

$\therefore \dim Im(T) = 1$

$1 - x + x^2 \in Im(T) \wedge 1 - x + x^2 \neq 0_{\mathbb{R}_2[x]} \therefore Im(T) = gen\{1-x+x^2\}$

Formo una base "conveniente" de $\mathbb{R}^3$:

$B = \left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}}_{\in Nu(T)}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{l.i. c/ los del } Nu(T)}\right\}$ $\quad (1\ 0\ 1) \notin Nu(T)$

$1 + 0 - 2 \cdot 1 = -1 \neq 0$

donde $T\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$ $\quad T\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \wedge T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \underbrace{2 - 2x + 2x^2}_{\in Im(T)}$

por TFTL $\exists!$ transf. lineal.

Obs: $F\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$

$F\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$ $\quad F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ cumple c/ lo pedido? sí

$F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 1 - x + x^2$ $\quad F = T$ ? No

Puedo definir infinitas T Lineales que cumplan.

Podría haber puesto p/ completar la base de $\mathbb{R}^3$ cualquiera que no cumpla la ecuación del plano

$T'\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0 \quad T'\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = 0$

$T'\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 1 - x + x^2$

no puedo poner coordenadas

$E_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, x, x^2\}$

$\left[T'\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]^{E_{\mathbb{R}_2[x]}} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$B_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1 - x + x^2;\ 1 - x;\ 1\}$

$\left[T'\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]^{B} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Sea $f \in \mathcal{L}(V,W)$. $f: V \to W$

**$f$ es un monomorfismo $\Leftrightarrow Nu(f) = \{0_V\}$.**

$f$ es monomorfismo $\Rightarrow Nu(f) = \{0_V\}$ $(\Rightarrow)$

$\Updownarrow$

$\underbrace{\{0_V\} \subset Nu(f)}_{\text{trivial}} \wedge \underbrace{Nu(f) \subset \{0_V\}}_{(a)}$

trivial

$Nu(f)$ es SE de $V$

(a) $f$ es monomorfismo $f(v) = f(w) \Rightarrow v = w$

Si $v \in Nu(f) \Rightarrow f(v) = 0_W$

Como $f$ es TL $\Rightarrow f(0_V) = 0_W$

Como $f$ es monomor $\Rightarrow v = 0_V \therefore Nu(f) \subset \{0_V\}$

$Nu(f) = \{0_V\} \Rightarrow f$ es monomorfismo $(\Leftarrow)$

Parto de $f(v) = f(w) \Rightarrow f(v) - f(w) = 0_W \Rightarrow f(v-w) = 0_W$

$\Rightarrow v - w \in Nu(f) \wedge Nu(f) = \{0_V\} \therefore v - w = 0_V$

$\Rightarrow v = w \Rightarrow f$ es monomorfismo

Sea $f \in L(V,W)$.
***f monomorfismo*** $\Rightarrow$
$(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ***es linealmente independiente*** $\Rightarrow$
$\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}$ ***es linealmente independiente*** )

(demo a cargo de ustedes)

*Sea $f \in L(V,W)$ $f: V \to W$ es un isomorfismo*

*$\Leftrightarrow$ ($f$ es un monomorfismo (inyectiva)*

*y $f$ es un epimorfismo (sobreyectiva))*

$Nu(f) = \{0_V\}$

$f$ es epimorfismo $\Leftrightarrow Im(f) = W$ $\quad Im(f) = \{u \in W : f(v) = u, v \in V\}$

$\downarrow$

$\forall u \in W \exists v \in V : f(v) = u \Rightarrow u \in Im(f)$

*Sea $f: V \to W$ un isomorfismo*

*Si $B = \{v_1\ v_2 \dots, v_n\}$ es una base de $V$*

*$\Rightarrow \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ es una base de $W$*

$B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ base de $V \Rightarrow Im(f) = gen\{f(v_1), f(v_2), \dots f(v_n)\}$

$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_n f(v_n) = 0_W$

uso prop de la TL $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = 0_W$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \in Nu(f) \wedge f$ es monomorfismo

$\Rightarrow Nu(f) = \{0_V\} \therefore \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$ $\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

$\Rightarrow \{f(v_1) \dots f(v_n)\}$ es base de $Im f = W$ $\quad f$ es epimorfismo

Ejemplos: $\underset{\geq 1}{\dim Nu(f)} + \underset{\leq 2}{\dim Im(f)} = 3$

1) Sea $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2 \ / \ f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b \\ a-c \end{pmatrix}$ una TL

Analizar las propiedades de $f$

- $Nu(f) = \{ \underline{a+bx+cx^2} \in \mathbb{R}_2[x] : f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

$$f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b \\ a-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \Rightarrow b=-a \\ a-c=0 \Rightarrow a=c \end{cases}$$

$$\underbrace{a+bx+cx^2}_{\in Nu(f)} = a+(-a)x+a\cdot x^2 = a(1-x+x^2) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow Nu(f) = gen\{1-x+x^2\} \wedge \{1-x+x^2\}$ li

$\Rightarrow B(Nu(f)) = \{1-x+x^2\} \wedge \dim Nu(f) = 1 \Rightarrow f$ NO es MONOMORFISMO

- $Im(f)$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} a+b \\ a-c \end{pmatrix}}_{\in Im(f)} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \forall a \forall b \forall c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow Im(f) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow Im(f) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2 \therefore f$ es EPIMORF.

$\dim Nu(f) = 1 \Rightarrow \dim Im(f) = 3 - 1 = 2$

$Im(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\dim Im(f) \Rightarrow$

$Im(f) = \mathbb{R}^2$

2) $f: \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^3 \ / \ f(a+bx) = \begin{pmatrix} a+b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dim Nu(f) + \dim Im(f) = 2 \Rightarrow \dim Im(f) < 3$

- $Nu(f) = \{ a+bx : f(a+bx) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{ 0_{\mathbb{R}_1[x]} \} \to f$ es MONOM.

$$\underbrace{\dim Nu(f)}_{=0} + \dim Im(f) = \underbrace{\dim(\mathbb{R}_1[x])}_{2}$$

$\Rightarrow \dim Im(f) = 2 \wedge Im(f) = gen\{ f(1), f(x) \}$

$Im(f) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \therefore \quad B(Im f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\therefore Im(f) \neq \mathbb{R}^3 \therefore f$ NO es EPIMORFISMO

3) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x] \ / \ f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + (a+b)x + (a+b-c)x^2$

Obs: COND. NEC para que $f$ sea isomorfismo es partir de dos EV con la misma dimensión

$Nu(f) = \{ \underline{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^3 : f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \}$

$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + (a+b)x + (a+b-c)x^2 = 0 + 0.x + 0.x^2$

$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a+b=0 \Rightarrow b=0 \\ a+b-c=0 \Rightarrow c=0 \end{cases} \quad \therefore Nu(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \wedge \dim Nu(f) = 0$

$\Downarrow$

$f$ es MONOM.

Por teo de la dimensión $\underbrace{\dim Nu(f)}_{=0} + \dim Im(f) = \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3} \Rightarrow Im(f) = \mathbb{R}_2[x]$

$\dim Im(f) = 3 \wedge Im(f) \subset \mathbb{R}_2[x] \wedge \dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$

$\mathcal{J}m(f) = \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow f$ es EPIMORFISMO

$\Rightarrow f$ MONO y $f$ EPI $\Rightarrow f$ ISOMORFISMO

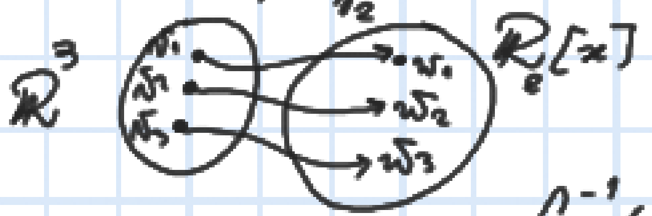
$\exists f^{-1} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3 \,/\, f^{-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \;?$


$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x] \,/\, f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = a + (a+b)x + (a+b-c)x^2$$

$f\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{v_1} = \overbrace{1+x+x^2}^{w_1}$ $\quad f\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_2} = \overbrace{x+x^2}^{w_2}$ $\quad f\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_3} = \overbrace{-x^2}^{w_3}$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$




$f^{-1} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$

$$f^{-1}(1+x+x^2) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$f^{-1}(x+x^2) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$
$$f^{-1}(-x^2) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Siguiendo la fórmula $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \alpha(1+x+x^2) + \beta(x+x^2) + \gamma(-x^2)$

$\alpha = a_0 \qquad a_1 = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = a_1 - a_0$

$\alpha + \beta - \gamma = a_2 \qquad a_0 + a_1 - a_0 - \gamma = a_2 \qquad \gamma = a_1 - a_2$

$$f^{-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 f^{-1}(1+x+x^2) + (a_1 - a_0) f^{-1}(x+x^2) + \\ + (a_1 - a_2) f^{-1}(-x^2)$$

$$f^{-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \begin{pmatrix}a_0\\a_1 - a_0\\a_1 - a_2\end{pmatrix}$$

**2.11** Sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T \right\},$$

y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal que actúa sobre la base $\mathcal{B}$ de la siguiente manera

$\{\underbrace{(1-x)}_{p_1}; \underbrace{(1+x^2)}_{p_2}; \underbrace{(x+x^2)}_{p_3}\}$ LD

$p_1 + p_3 = p_2$

$$T\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\right) = 1 - x,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right) = 1 + x^2,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T\right) = x + x^2.$$

no es iso
no es epi
no es mono

Comprobar que el polinomio $p = 2 + x + 3x^2$ pertenece a la imagen de $T$ y determinar $T^{-1}(p) := T^{-1}(\{p\})$.

OJO no existe la inversa de $T$

$$\mathcal{J}m(T) = \text{gen}\left\{T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} = \text{gen}\left\{\underbrace{1-x}_{p_1}, \underbrace{1+x^2}, \underbrace{x+x^2}_{p_3}\right\}$$

$p_2 = p_1 + p_3$

¿$2 + x + 3x^2 \in \mathcal{J}m(T)$? $\iff$

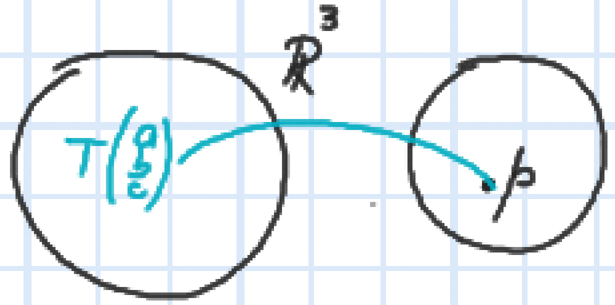
¿$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} : \alpha_1(1-x) + \alpha_2(1+x^2) + \alpha_3(x+x^2) = 2 + x + 3x^2$?

¿$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \end{cases}$ es COMPATIBLE?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{F_1+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{F_3-F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{3} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \alpha_3 = 3 - \alpha_2 \quad \alpha_2 = \alpha_2 \quad \alpha_1 = 2 - \alpha_2 \quad \therefore \; 2 + x + 3x^2 \in \mathcal{J}m(f)$

$T^{-1}(p) = T^{-1}\{p\}$ pre-imagen de $p(x)$




$\mathbb{R}_2[x]$

$\alpha_3 = 3-\alpha_2 \quad \alpha_2 = \alpha_2 \quad \alpha_1 = 2-\alpha_2$

$$T^{-1}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2+x+3x^2 \right\}$$

Como $2+x+3x^2 = (2-\alpha_2)(1-x) + \alpha_2(1+x^2) + (3-\alpha_2)(x+x^2)$

$$T^{-1}(2+x+3x^2) = (2-\alpha_2)\,T^{-1}(1-x) + \alpha_2\,T^{-1}(1+x^2) + (3-\alpha_2)\,T^{-1}(x+x^2)$$

$$T^{-1}(2+x+3x^2) = (2-\alpha_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3-\alpha_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ infinitas preimágenes

porque no es monomorfismo.

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\right) = 1-x,$$
$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right) = 1+x^2,$$
$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T\right) = x+x^2.$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underset{-1}{\alpha}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{1}{\beta}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underset{-1}{\gamma}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -(1-x) + (1+x^2) - (x+x^2) =$$
$$= 0$$

✓