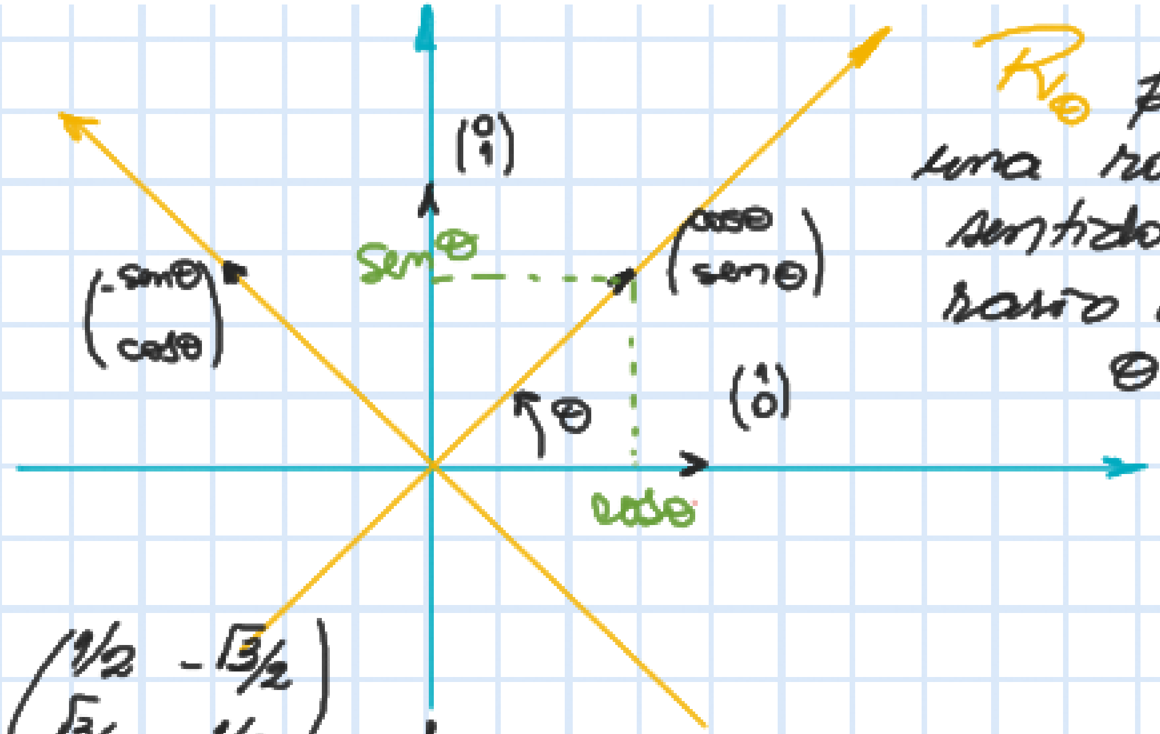
2.25 Sea $O(2,\mathbb{R}) := \{R_\theta, S_\theta : \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definidas por

$$R_\theta\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},$$ Rotaciones

$$S_\theta\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.$$ Simetrías

(a) Hallar y graficar la imagen de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ por $R_{\pi/3}$ y explicar el significado geométrico de la acción de $R_{\pi/3}$ sobre los vectores de $\mathbb{R}^2$.

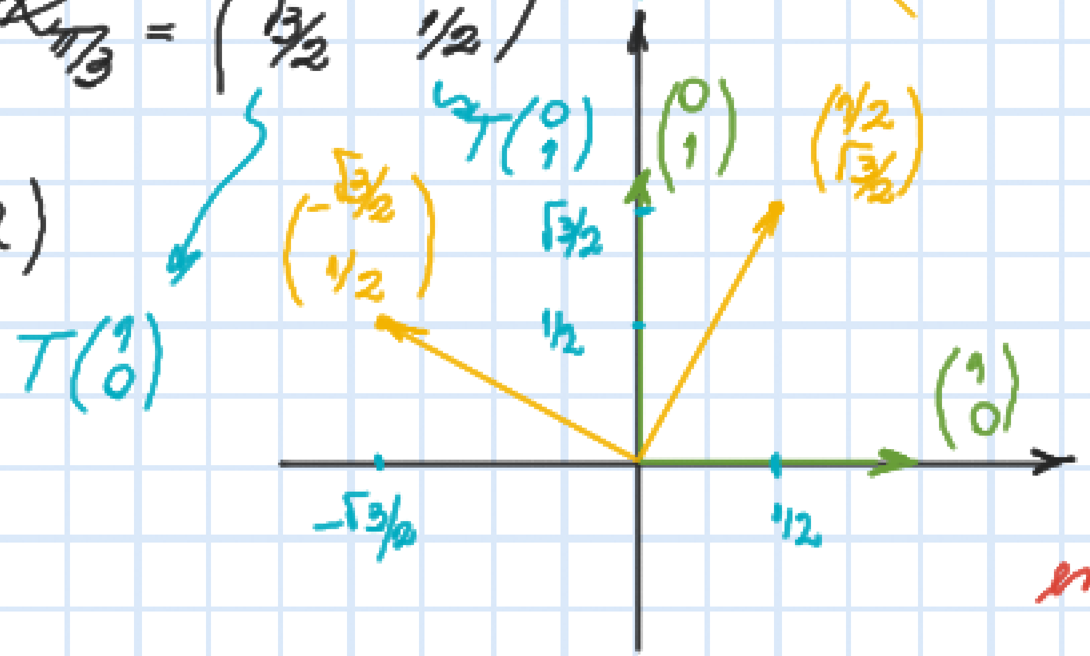
(c)



R_θ provoca una rotación en sentido antihorario de ángulo θ

$R_{\pi/3} = \begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$

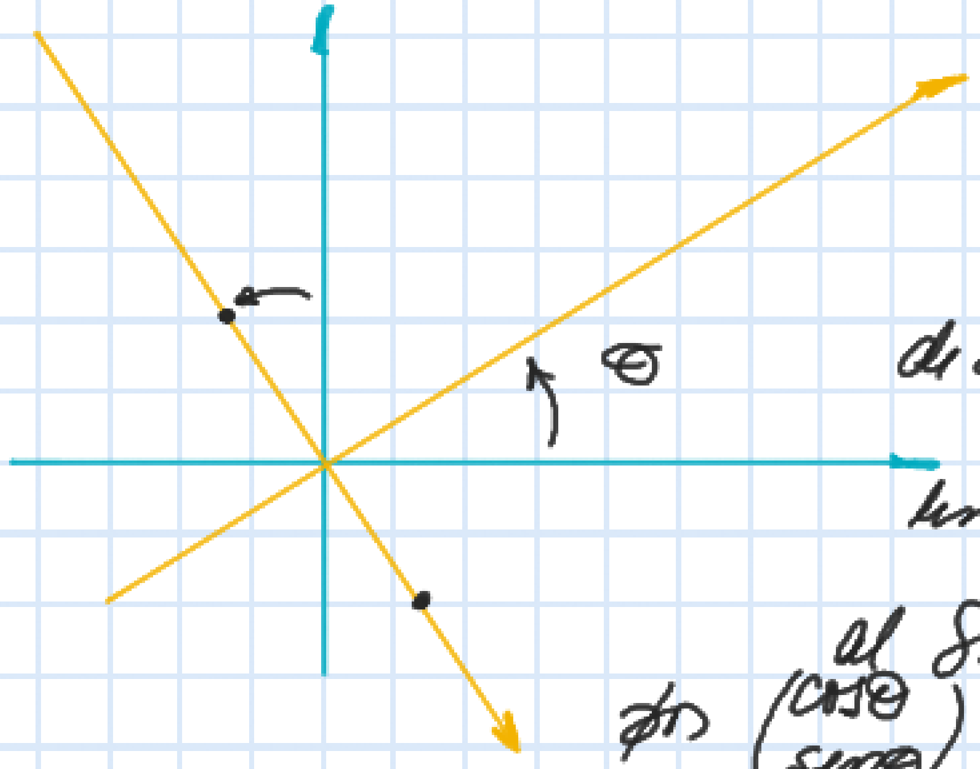
(a)



Rotación ángulo $\pi/3$

La base canónica rotó un ang de $\pi/3$ en sentido antihorario

(*)



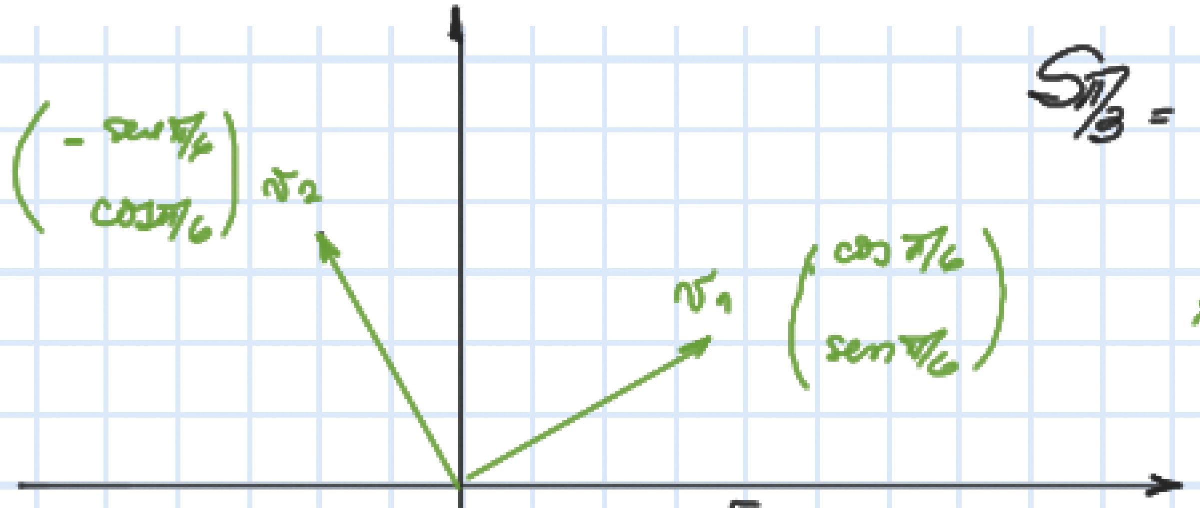
S_θ Efecto en los ejes

Provoca una rotación de ángulo θ seguida de una simetría respecto al subespacio generado por $\binom{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

(b) Hallar y graficar la imagen de la base

$$\left\{\overset{v_1}{\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2\\1/2\end{bmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{bmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{bmatrix}}\right\}$$

por $S_{\pi/3}$ y explicar el significado geométrico de la acción de $S_{\pi/3}$ sobre los vectores de $\mathbb{R}^2$.



$S_{\pi/3} = \begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$

$\pi/6 = 1/2\ \pi/3$

$S_{\pi/3}(v_1) = \begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\1/2\end{pmatrix}$ $\quad S_{\pi/3}(v_1) = v_1$

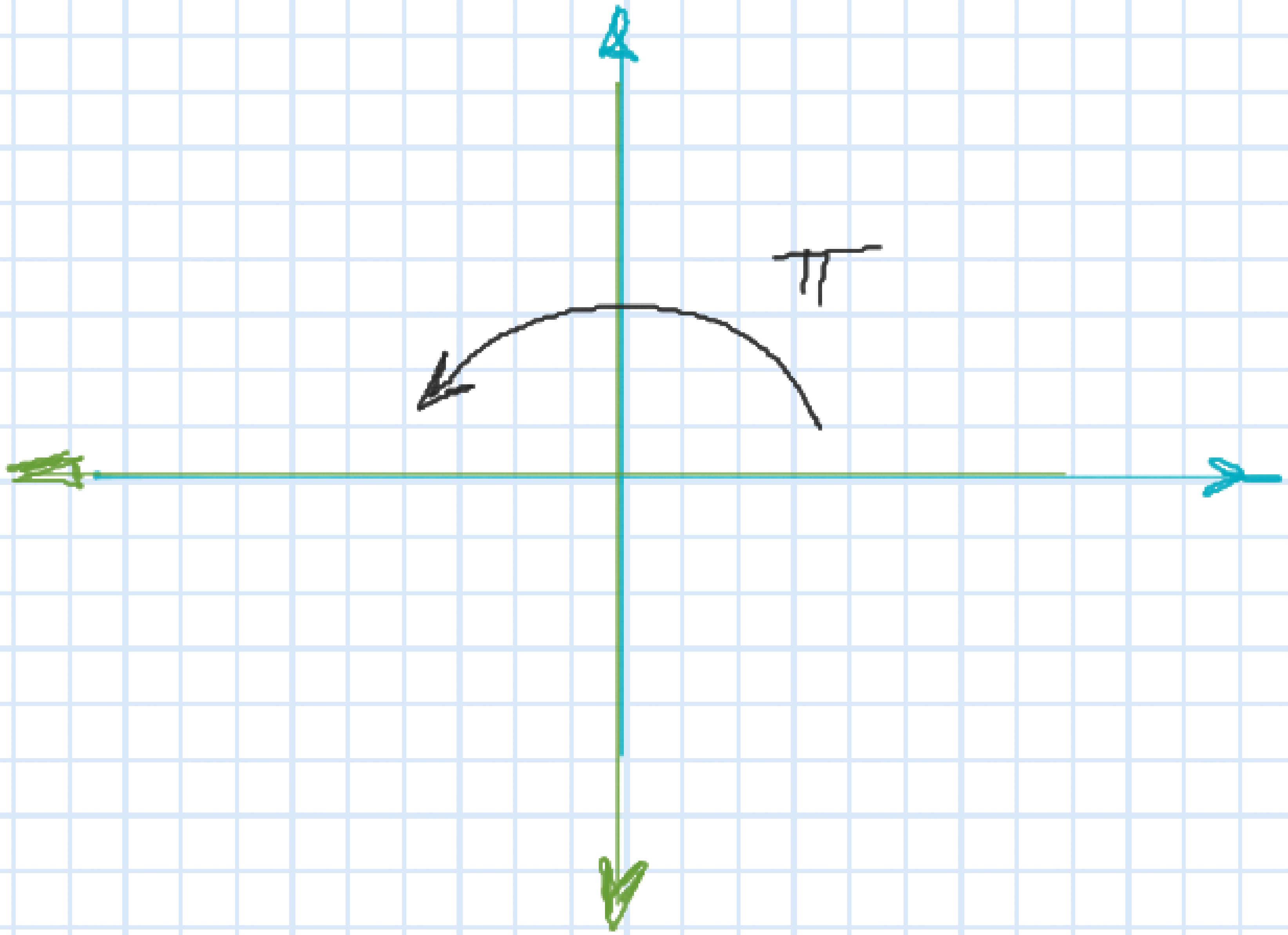
$S_{\pi/3}(v_2) = \begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0/2\\-\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$ $\quad S_{\pi/3}(v_2) = -v_2$

Simetría respecto a $S_1 = gen\{v_1\}$ en la dirección de $S_2 = gen\{v_2\}$

Rotación

$$R_\theta\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$\pi = \theta$



$$R_\pi = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

(d) Comprobar que

$$\left\{ \overset{v_1}{\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \operatorname{sen}(\theta/2) \end{bmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix}} \right\}$$

Son 2 vectores

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$

$\Rightarrow$ alcanza con ver que son LI

es una base de $\mathbb{R}^2$ y hallar su imagen por S_θ.

$$S_\theta\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

$$\alpha \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \operatorname{sen}\theta/2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta/2 \\ \cos\theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistema homog

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\operatorname{sen}\theta/2 \\ \operatorname{sen}\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 1 \neq 0$

SC Determ

$\alpha = \beta = 0$

$$S_\theta \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \operatorname{sen}\theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \overset{v_1}{\begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \operatorname{sen}\theta/2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} = \underset{v_2}{\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}}$$

$$S_\theta \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta/2 \\ \cos\theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} = -v_2$$

e) S_θ es una simetría respecto a $S_1 = \text{gen}\{v_1\}$ en la dirección de $S_2 = \text{gen}\{v_2\}$ (*)

(f) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hallar las matrices respecto a la base canónica de las siguientes transformaciones lineales, y en cada caso explicar su significado geométrico:

$$R_\alpha \circ R_\beta; \quad S_\alpha \circ S_\beta, \quad S_\alpha \circ R_\beta, \quad R_\beta \circ S_\alpha.$$

$$R_\alpha \circ R_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & -(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta) \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta & -\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = R_{\alpha+\beta}$$

$R_\alpha \circ R_\beta = R_\beta \circ R_\alpha$ rotación de ángulo $\alpha+\beta$

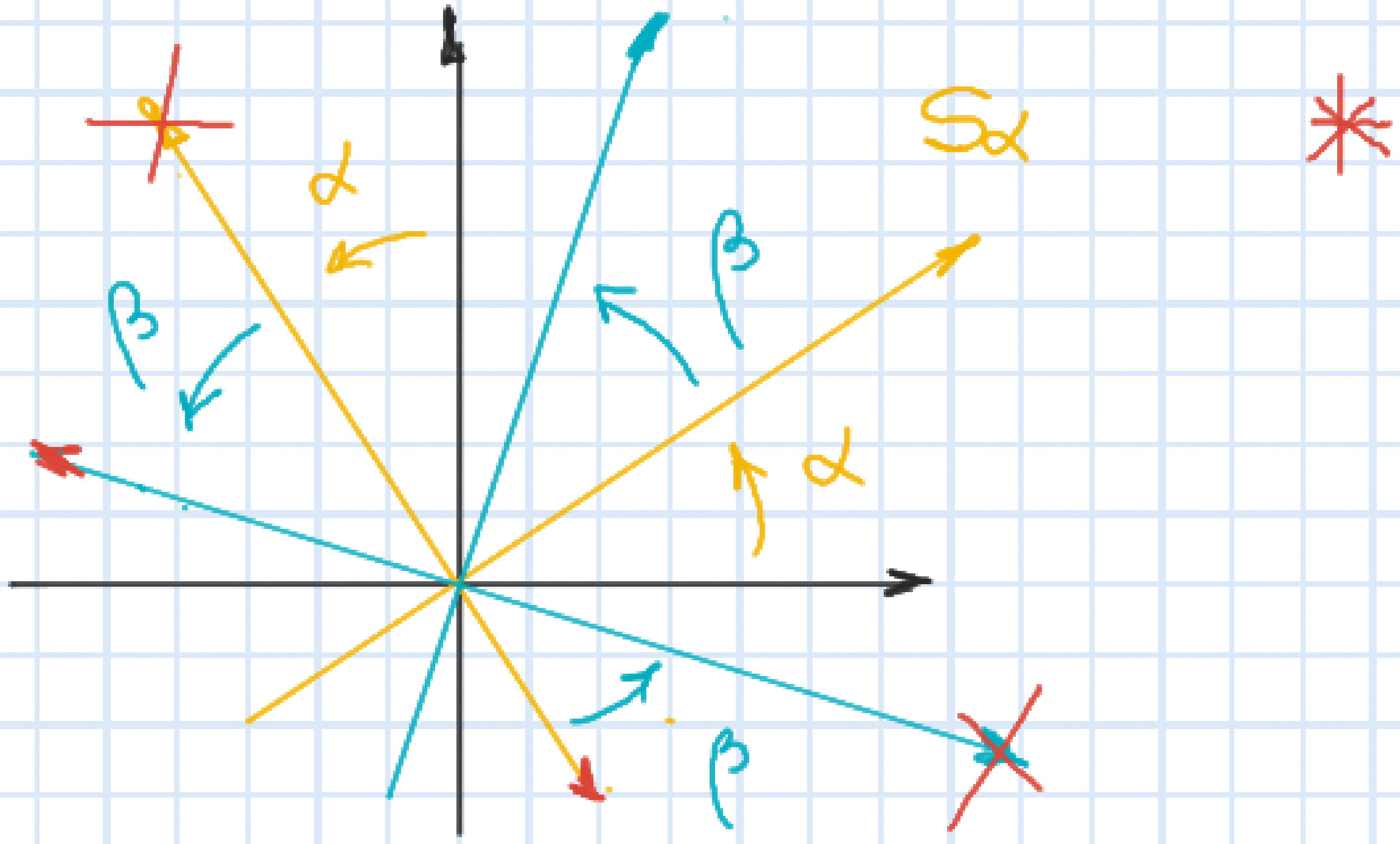
$$S_\alpha \circ S_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & -(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta) \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta & \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = R_{\alpha+\beta}$$

$S_\alpha \circ S_\beta = S_\beta \circ S_\alpha$ rotación de ángulo $\alpha+\beta$

(*)



α
β
S_α
α
β
β

$$S_\alpha \circ R_\beta = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\operatorname{sen}\beta\\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & -\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\\ -\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\beta\operatorname{sen}\alpha & -(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos(\alpha-\beta) & \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) & -\cos(\alpha-\beta)\end{pmatrix} = S_{\alpha-\beta}$$

$S_\alpha \circ R_\beta$ simetría resp. a $S_1 = \operatorname{gen}\{v_1\}$ en la dirección de $S_2 = \operatorname{gen}\{v_2\}$

$$v_1 = \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\ \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\ \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{pmatrix}$$

$$R_\beta \circ S_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\beta & -\operatorname{sen}\beta\\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix} = S_{\alpha+\beta}$$

$R_\beta \circ S_\alpha$ simetría resp. a $S_1 = \operatorname{gen}\{v_1\}$ en la dirección de $S_2 = \operatorname{gen}\{v_2\}$

$$v_1 = \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\ \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\end{pmatrix}$$

(g) Concluir que el conjunto $O(2,\mathbb{R})$ es cerrado por composiciones.

(h) Observar que $R_0 = I_{\mathbb{R}^2}$. $\theta = 0$

g) Composición de rotaciones/simetrías con rotaciones/simetrías da rotaciones/simetrías

$$R_\alpha \circ R_\beta = S_\alpha \circ S_\beta = R_{\alpha+\beta}$$

$$S_\alpha \circ R_\beta = S_{\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad R_\beta \circ S_\alpha = S_{\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

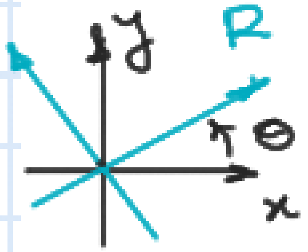
h) R_0 si $\theta = 0$ no rota

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = I_{\mathbb{R}^2} \qquad \hookrightarrow \theta = 0$$

$\cos 0 = 1$

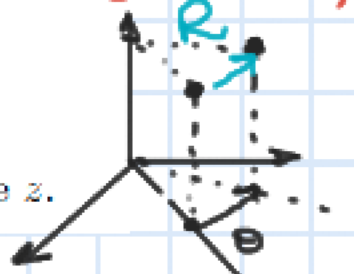
$\operatorname{sen} 0 = 0$

2.26 Observar que la transformación lineal $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por



$$R\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\right) := \begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0\end{bmatrix}^T,$$
$$R\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right) := \begin{bmatrix}-\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0\end{bmatrix}^T,$$
$$R\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right) := \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T,$$

$$R_{xy} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$



es la rotación de ángulo θ en sentido antihorario del plano xy alrededor del eje z.

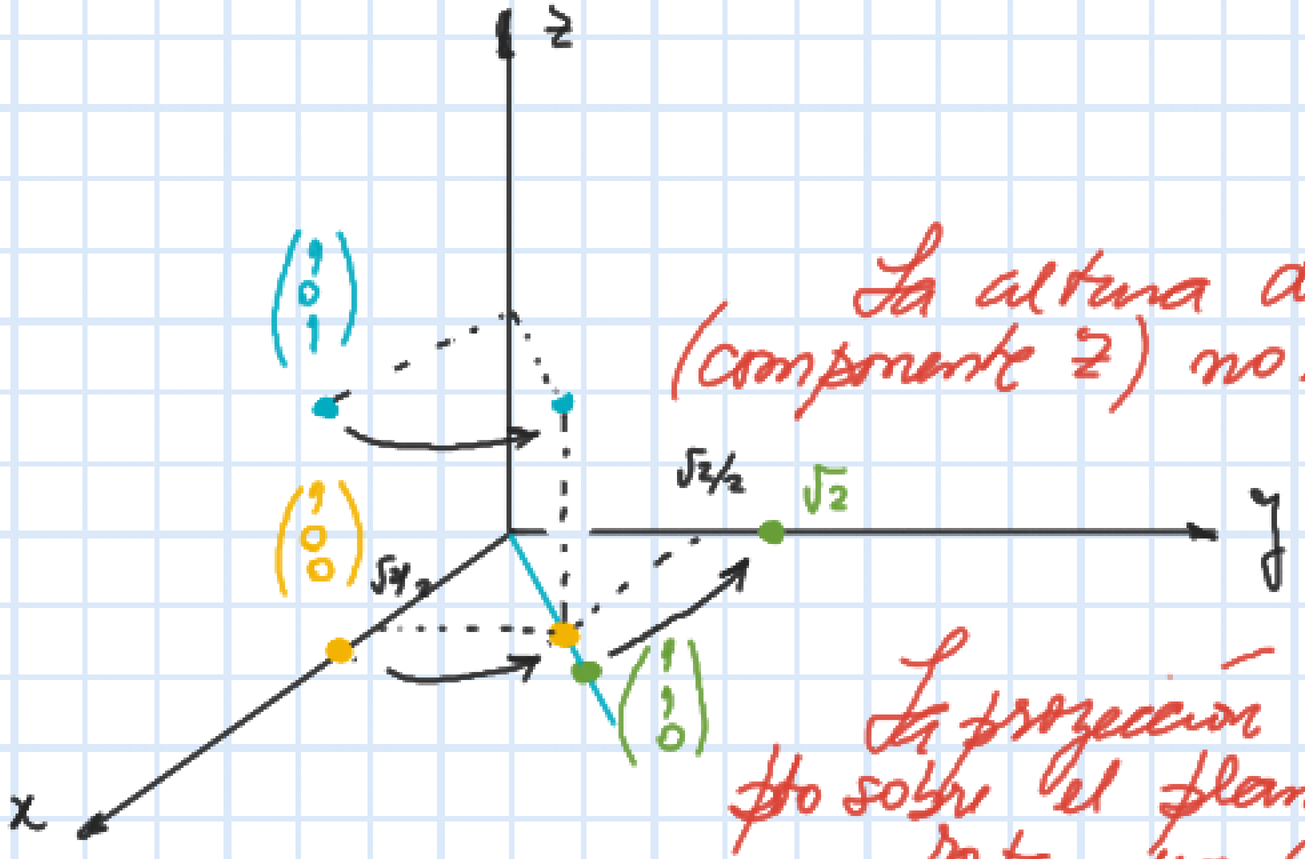
Si miramos que pasa en el plano x-y vemos una R_θ. Como $R\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ el eje z es el eje de rotación

(a) Hallar y graficar la imagen de los siguientes vectores por la rotación de ángulo $\pi/4$ en sentido antihorario del plano xy alrededor del eje z:

$$v_1 = [1 \quad 0 \quad 0]^T,\ v_2 = [1 \quad 1 \quad 0]^T,\ v_3 = [1 \quad 0 \quad 1]^T.$$

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cos\pi/4 = \operatorname{sen}\pi/4 = \sqrt{2}/2$$

$$R(v_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R(v_3) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



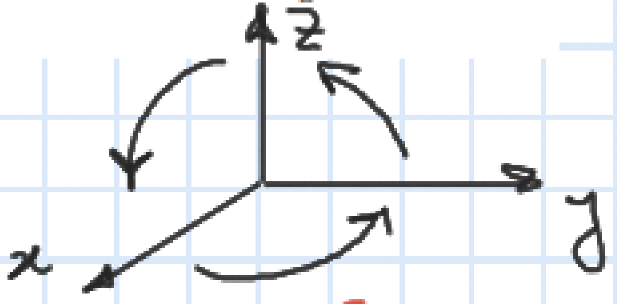
La altura del pto (componente z) no se altera

La proyección del pto sobre el plano x y rota un ángulo $\pi/4$

(b) Hallar la matriz respecto de la base canónica de la rotación de ángulo θ en sentido antihorario del plano yz alrededor del eje x.

(c) Hallar la matriz respecto de la base canónica de la rotación de ángulo θ en sentido antihorario zx alrededor del eje y.

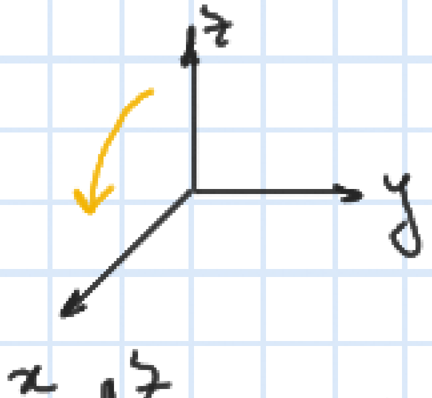
$$b) \quad \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



$$c) \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

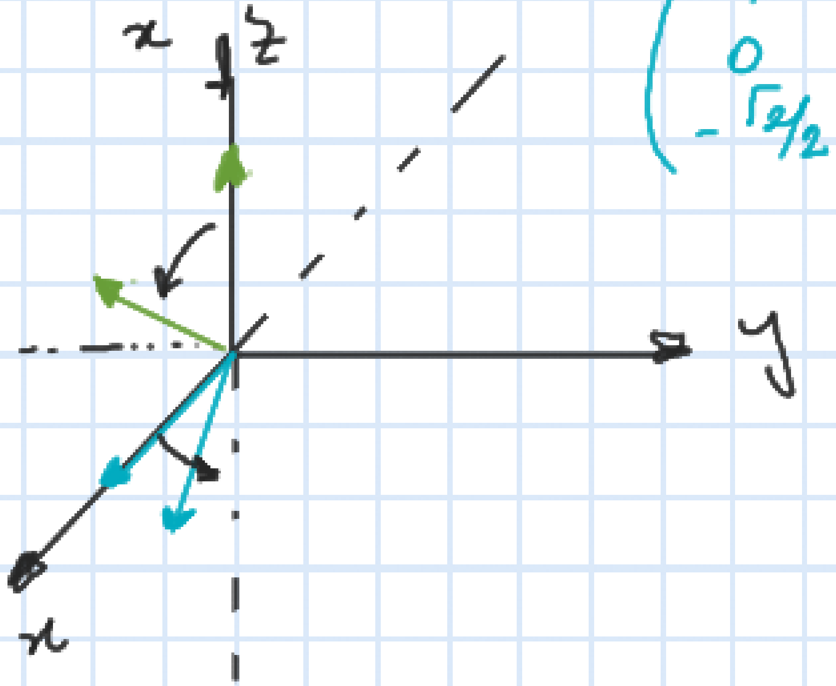
sentido antihorario

plano z x resp al eje y



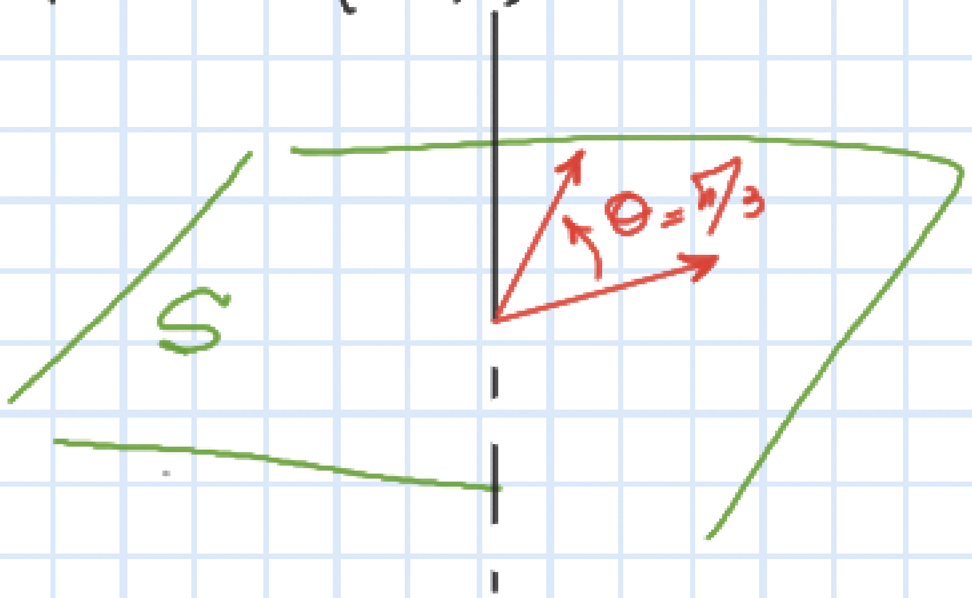
Ej. $\theta = \pi/4$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$



Obtener la matriz en base canónica de la rotación de eje $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ sobre el plano $S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ (Ángulo $\pi/3$)

Pensar...



27. **Principio de inducción.** Sea $\mathcal{P}(k)$ una función proposicional con $k \in \mathbb{N}$. Si

(1) La primera proposición $\mathcal{P}(1)$ es verdadera; y

(H.I.) para cada $k \in \mathbb{N}$, bajo la hipótesis de la validez de $\mathcal{P}(k)$ puede deducirse la validez de la proposición $\mathcal{P}(k+1)$,

entonces, $\mathcal{P}(k)$ es verdadera para todo $k \in \mathbb{N}$.[1]

(T. I.) $\mathcal{P}(k+1)$ es verd

$\mathcal{P}(k)$ es verd $\forall k \geq k_0$

Caso base

(1) $\mathcal{P}(k_0)$

En general $k_0 = 1$

$\mathcal{P}(1)$ es V

* $\mathcal{P}(k)$ es V $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(k+1)$ es V

$\mathcal{P}(1)$ es V $\overset{*}{\Rightarrow}$ $\mathcal{P}(2)$ es V

$\mathcal{P}(2)$ es V $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(3)$ es V

$\vdots$

$\forall k$ $\mathcal{P}(k)$ es V

Proposición: enunciado del cual se puede decir si es V o F (verdadero o falso)

Función proposicional: enunciado depende de una variable y en función de los valores que tome podrá ser una prop. verdadera o falsa

Si $x \in (0,1) \Rightarrow x^2 < k$ $\quad \mathcal{P}(k)$

$\mathcal{P}(1/2)$ es falsa $\quad \mathcal{P}(5)$ es verdadera

1) Verifico que $\mathcal{P}(1)$ es V

Hi) $\mathcal{P}(k)$ es V

Ti) $\mathcal{P}(k+1)$ es V

Hi) Tomo como hipótesis que se cumple para cierto k

Ti) Usando la Hi) intento demostrar que se cumple para $k+1$

Hi) $\Rightarrow$ Ti)

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$[T]_E^E \, [x]^E = [T(x)]^E$$

$$A x = T(x)$$

1. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales vale que:

$$S = \operatorname{gen}\left\{\underset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\a\\2\end{bmatrix}}, \underset{w}{\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix}3\\-3\\a\end{bmatrix}}\right\} = \operatorname{gen}\left\{\underset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\a\\2\end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix}3\\-3\\a\end{bmatrix}}\right\};$$

$\dim S = 2$

Supongo $\{v_1, v_2\}$ es LD $\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$:

$\alpha \begin{pmatrix}1\\a\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\a\end{pmatrix}$ $\quad \alpha = 3$, $\quad 3a = -3 \Rightarrow a = -1$, $\quad 6 = -1$ ABS

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ es LI $\Rightarrow \dim S = 2$

Para que $\{v_1, w, v_2\}$ genere lo mismo que $\{v_1, v_2\}$

$\Rightarrow w = \alpha v_1 + \beta v_2$

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\a\\2\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}3\\-3\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \alpha + 3\beta = 1 \\ a\alpha - 3\beta = 3 \\ 2\alpha + a\beta = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ a & -3 & 3 \\ 2 & a & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2 - aF_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3-3a & 3-a \\ 0 & a-6 & 0 \end{array}\right)$$

$(a-6)\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow a = 3$

$\vee$

$a = 6$

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \right\} \qquad \begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 3 \\ 6\alpha + 3\beta = -3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 6\alpha + 3(3-\alpha) = -3 \\ 3\alpha + 9 = -3 \end{array}$$

En la última

$2\alpha + 2\beta = 6 = -8 + 14$ ✓ $\qquad \beta = 7 \quad \alpha = -4$

$$\left\{ \underset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\a\\2\end{bmatrix}}, \underset{w}{\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix}3\\-3\\a\end{bmatrix}} \right\}$$

necesito que el q: sea LD $\Rightarrow$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ a & 3 & -3 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}\right| = 0 = (3a+6) - (a^2+6) + 3(2a-6) =$$

$$= 3a + \cancel{6} - a^2 - \cancel{6} + 6a - 18 = -a^2 + 9a - 18 = -(a-6)(a-3)$$

$a = 6 \vee a = 3$ el q: es LD.

2. Sea $p = 1 - 2x - 3x^2$ y sea $\mathcal{B}_1 = \{\overset{p_1}{1+x}, \overset{p_2}{q}, \overset{p_3}{x - x^2}\}$ la base de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $[p]^{\mathcal{B}_1} = [1 \;\; -1 \;\; 1]^T$. Hallar una base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{B}_1 = \{1+x, 2x^2, x - x^2\}$

$[p]^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow p(x) = p_1 - p_2 + p_3$

$1 + 2x - 3x^2 = 1 + x - (ax^2 + bx + c) + x - x^2$

$1 = 1 - c \qquad c = 0 \qquad -3 = -a - 1$

$2 = 1 - b + 1 \qquad b = 0 \qquad a = 2$

$q(x) = 2x^2$

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$[p_1]^{\mathcal{B}_2} [p_2]^{\mathcal{B}_2} [p_3]^{\mathcal{B}_2}$

$\mathcal{B}_2 = \{r_1, r_2, r_3\}$

$p_1 = r_1 - r_2$

$$\left.\begin{array}{l} p_2 = r_2 + r_3 \\ p_3 = r_2 - r_3 \end{array}\right\} p_2 + p_3 = 2r_2$$

$\Rightarrow r_2 = (2x^2 + x - x^2)\frac{1}{2} = \dfrac{x^2 + x}{2}$

$r_3 = p_2 - r_2 = 2x^2 - x^2/2 - x/2$

$r_1 = p_1 + r_2 = 1 + x + x^2/2 + x/2 = x^2/2 + 3/2\,x + 1$

$r_3 = r_2 - p_3 = \dfrac{x^2 + x}{2} - (x - x^2) = 3/2\,x^2 - 1/2\,x$

3. Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}_2[x]$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \text{gen}\{2+x,\ 2-2x+x^2\} \quad \text{y} \quad \mathbb{S}_2 = \text{gen}\{3+2x+2x^2,\ 1+2x^2\}.$$

Hallar una base de $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$.

$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3 \qquad \dim S_1 = 2 \qquad \dim S_2 = 2$

$1 \leq \dim S_1 \cap S_2 \leq 2$

Si $p \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow p \in S_1 \ , \ p \in S_2$

$$\Rightarrow p = \underbrace{\alpha(2+x)+\beta(2-2x+x^2)}_{\in S_1} = \underbrace{\delta(3+2x+2x^2)+\gamma(1+2x^2)}_{\in S_2}$$

$$\alpha(2+x)+\beta(2-2x+x^2)-\delta(3+2x+2x^2)-\gamma(1+2x^2) = 0(x) = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$$

$$\begin{array}{l} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha+2\beta-3\delta-\gamma=0 \\ \alpha-2\beta-2\delta=0 \\ \beta-2\delta-2\gamma=0 \end{array} \right.$$

S. Homog. Compatible Indeterminado

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{6F_3+F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -11 \end{pmatrix}$$

$-13\delta - 11\gamma = 0$

$\delta = -{}^{11}/_{13}\,\gamma$

$-6\beta + {}^{11}/_{13}\gamma + \gamma = 0$

$\beta = {}^{4}/_{13}\,\gamma$

$2\alpha + {}^{8}/_{13}\gamma + {}^{33}/_{13}\gamma - \gamma = 0$

$2\alpha + {}^{28}/_{13}\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = -{}^{14}/_{13}\,\gamma$

$$p = -{}^{14}/_{13}\gamma\,(2+x) + {}^{4}/_{13}\gamma\,(2-2x+x^2)$$

$$= \gamma/_{13}\,(-28-14x+8-8x+4x^2) = (4x^2-22x-20)\,\gamma/_{13}$$

$S_1 \cap S_2 = \text{gen}\{2x^2-11x-10\}$

$$p = -\tfrac{11\gamma}{13}(3+2x+2x^2) + \gamma(1+2x^2)$$

$$p = \frac{\gamma}{13}(-33-22x-22x^2+13+26x^2)$$

$= \gamma/_{13}\,(4x^2-22x-20) \qquad S_1 \cap S_2 = \text{gen}\{2x^2-11x-10\}$

Otra forma: Buscamos "la condición" de S_1 y S_2

Si $p \in S_1 \Rightarrow$

$p = ax^2+bx+c = \alpha(2+x)+\beta(2-2x+x^2)$

$a = \beta$ (1) $\qquad b = \alpha - 2\beta$ (2) $\qquad c = 2\alpha + 2\beta$ (3)

(2) + (3) $\quad \underline{3\alpha = b+c} \qquad$ (2) y (1) $\quad b = \alpha - 2a \qquad \underline{\alpha = b+2a}$

$b+c = 3(b+2a) \qquad 6a+2b-c=0$

$S_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p = ax^2+bx+6a+2b\}$

$\{p = ax^2+bx+c : \underline{6a+2b-c=0}\}$

$p \in S_2 \Rightarrow p = ax^2+bx+c = \alpha(3+2x+2x^2)+\beta(1+2x^2)$

$a = 2\alpha+2\beta \qquad b = 2\alpha \qquad c = 3\alpha+\beta$

$a-b = 2\beta \qquad c-3\alpha = \beta$

$2c-6\alpha = 2\beta$

$a-b = 2c-3b \qquad 2c-3b = 2\beta$

$a+2b-2c=0$

$S_2 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : ax^2+bx+c = p : \underline{a+2b-2c=0}\}$

$S_1 \cap S_2 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : a+2b-2c=0 \ , \ 6a+2b-c=0\}$.

$S_1 \cap S_2 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : a + 2b - 2c = 0 \ \wedge \ 6a + 2b - c = 0\}$.

$$\begin{cases} a + 2b - 2c = 0 \\ 6a + 2b - c = 0 \end{cases} \quad F_2 - 6F_1 \qquad \begin{cases} a + 2b - 2c = 0 \\ -10b + 11c = 0 \end{cases}$$

$c = \frac{10}{11} b$

$a = 2c - 2b = \frac{20}{11} b - \frac{22}{11} b = -\frac{2}{11} b$.

$p(x) = \left(-\frac{2}{11} x^2 + x + \frac{10}{11}\right) b$.

$S_1 \cap S_2 = \text{gen}\{-2x^2 + 11x + 10\}$

---

4. Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\},$$
$$\mathbb{T} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}^T\right\}.$$

Hallar, si es posible, una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga, a la vez, a una base de $\mathbb{S}$ y a una base de $\mathbb{T}$.

$T \not\subset S \Rightarrow$ *

$\dim S = 3 \qquad \dim T = 2 \qquad B_T = \{u_1, u_2\}$

$B_S = \{v_1, v_2, v_3\} \qquad \dim \mathbb{R}^4 = 4$

Base de $\mathbb{R}^4$ $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

$T \subset S \quad \dim(S \cap T) = \dim T = 2$

* $T \not\subset S \quad \dim(S \cap T) = 1$

¿$\dim(S \cap T) = 0$? imposible $3 + 2 = 5 > 4$

Tarea para el hogar

---

5. Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : X \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} X\right\},$$
$$\mathbb{S}_2 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}$$

Construir un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^{2\times 2}$. ¿Es único? Si la respuesta es negativa, construir otro.

S_1: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2a_{11} & 3a_{12} \\ 2a_{21} & 3a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} \\ 3a_{21} & 3a_{22} \end{pmatrix}$ $\qquad a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$

$S_1 = \text{gen}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_2}\right\}$ $\qquad S_2 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

$S_2 = \text{gen}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B_2}\right\}$

$T = \text{gen}\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A_3}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{A_4}\right\}$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & A_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & A_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & A_2 \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & A_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & B_1 & F_3 - F_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & A_4 \end{matrix}$$

$S_1 \oplus T = \mathbb{R}^4$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \quad \nearrow 2$$

$S_2 \oplus T = \mathbb{R}^4$

Buscar otro T

6. Sean $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}$ y $\mathbb{U}$ los subespacios de $\mathbb{R}_4[x]$ definidos por

$$\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(3) = p(2) = p(1) = 0\},$$
$$\mathbb{T} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(6) = p(3) = p(1) = 0\},$$
$$\mathbb{U} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) = 0\}.$$

Construir un base de $\mathbb{U}$ que contenga a una base de $\mathbb{T}$ y a una base de $\mathbb{S}$. ¿Es única? Si la respuesta es negativa, construir otra.

1

Si $p \in S$ $p = (x-3)(x-2)(x-1)\,(ax+b)$

$S = \text{gen}\{x(x-3)(x-2)(x-1)\,;\,(x-3)(x-2)(x-1)\}$

$T = \text{gen}\{x(x-6)(x-3)(x-1)\,;\,(x-6)(x-3)(x-1)\}$.

$U = \text{gen}\{(x-1)\,;\,x(x-1)\,;\,x^2(x-1),\,x^3(x-1)\}$.

Tarea p/ el hogar.

$(x-1)(ax+bx^2+cx^3)$