## Sobre espacios métricos y normados

1. Una *distancia*, o una *métrica*, en un conjunto $\mathcal{X}$ es una función $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+$ que posee las tres propiedades siguientes:
   a) Para $x, y \in \mathcal{X}$: $d(x, y) = 0$ si, y sólo si $x = y$.
   b) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in \mathcal{X}$ (*simetría*).
   c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{X}$ (*desigualdad triangular*).

   La expresión $d(x, y)$ se lee *la distancia entre los puntos $x$ e $y$*. El par $(\mathcal{X}, d)$, constituido por el conjunto $\mathcal{X}$ munido de una distancia, se denomina *espacio métrico*.
2. La noción de distancia permite introducir la noción de límite: se dice que *la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x$*, o que *$x_n$ tiende a $x$*, cuando
$$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0.$$
   En tal caso $x$ se llama *el límite de la sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y se denota por $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
3. En todo lo que sigue, y salvo que se diga lo contrario, $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
4. Una *norma* en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^+$ que posee las tres propiedades siguientes:
   a) $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.
   b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{V}$.
   c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{V}$ (*desigualdad triangular*).

   Al número no negativo $\|x\|$ se le denomina *la norma de $x$* y el par $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ se llama *espacio normado*. La norma de $x$ representa la longitud del segmento de recta $[0, x] := \{tx : t \in [0, 1]\}$ que une a los puntos $0$ y $x$. Notar que si $x \neq 0$, entonces $u_x := \|x\|^{-1}x$ pertenece al subespacio generado por $x$ y $\|u_x\| = 1$. $\longrightarrow$ versor
5. Todo espacio normado $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ se convierte en un espacio métrico, si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{V}$ se define
$$d(x, y) := \|x - y\|.$$
   Notar que la distancia inducida por una norma posee las siguientes propiedades adicionales:
   a) $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ (*invarianza por traslaciones*: la distancia entre $x$ e $y$ no cambia si ambos puntos se someten a una misma traslación).
   b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ (*cambio de escala por dilataciones*: al dilatar ambos puntos por un mismo factor $\lambda$, la distancia queda multiplicada por $|\lambda|$).
   c) En particular, $d(x, y) = d(x - y, 0)$, de modo que las distancias al origen son suficientes para conocer todas las demás.

## Sobre espacios euclídeos

6. Un *producto interno* en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ que posee las las siguientes propiedades: $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$
   (i) Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y, z \in \mathbb{V}$
      1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,
      2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.
   (ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ $\forall x, y \in \mathbb{V}$.
   (iii) $\langle x, x\rangle > 0$ si $x \neq 0$. $\Leftrightarrow \langle x, x\rangle \geq 0 \wedge \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$
7. Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ munido de un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se llama *espacio euclídeo* y se denota por $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se dice que $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un *espacio euclídeo real* y cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se dice que $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un *espacio euclídeo complejo*.

# Ejemplo

$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definido por: $\langle x, y\rangle = y^* x$, donde $y^* = \overline{y^T}$ se llama producto interno canónico en $\mathbb{K}^n$.

Obs : $\overline{Y^T} = (\overline{Y})^T$

$V = \mathbb{C}^2$

$Y = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overline{Y} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overline{Y}^T = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \end{pmatrix}$

Obs : $K = \mathbb{R}$ $\quad \langle x, y\rangle = Y^T x$

1. Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y, z \in \mathbb{K}^n$:

   (a) $\langle x + y, z\rangle$ por definición del producto interno
   $= z^*(x + y) = \overline{z^T}(x + y)$ por propiedades del producto de matrices
   $= \overline{z^T}x + \overline{z^T}y = z^*x + z^*y = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

   (b) $\langle \lambda x, y\rangle$ por definición del producto interno
   $= y^*(\lambda x)$ por propiedad del producto de escalar por matriz
   $= \overline{y^T}(\lambda x) = \lambda\overline{y^T}x = \lambda y^* x$ por definición del producto interno
   $= \lambda\langle x, y\rangle$

   (c) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

   Tomo $\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\overline{x^T} \cdot y} = \overline{\overline{x^T}} \cdot \overline{y} = x^T \overline{y} = (x^T \overline{y})^T = (\overline{y})^T (x^T)^T$
   $= \overline{y^T} \cdot x = \langle x, y\rangle$ ✓

2. Para cada $\lambda \in \mathbb{K}^n$ $\langle x, y\rangle = y^*x$ por definición del producto interno; y como el producto interno es un escalar: $\overline{x^T}\,\overline{\overline{y}} = x^*y$
$= (y^*x)^T = x^T(y^*)^T = \overline{\overline{x^T\overline{y}}}$ por propiedades del producto de matrices y de la conjugación
$= x^*\overline{y} = \overline{x^*y} = \langle y, x\rangle$ por la definición del producto interno.

$x^*y = \langle y, x\rangle \quad \therefore \quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

$\overline{\overline{z}} = z \ \forall z \in \mathbb{C}$
$\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

3. Para cada $x \in \mathbb{K}^n$ $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$. Por lo tanto, $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ y, por definición del producto interno, $\langle x, x\rangle = \overline{x^T}x = \overline{x}^Tx = |x_1|^2 + \cdots |x_n|^2 > 0$ si $x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ (recordar que el módulo de un número complejo es un número real positivo si dicho número no es el $0_{\mathbb{C}}$.).
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\langle x, x\rangle = x^Tx = x_1^2 + \cdots x_n^2 > 0$ si $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$

$z . \overline{z} = |z|^2 \ \forall z \in \mathbb{C}$

Por ejemplo, sean $\mathbb{V} = \mathbb{C}^2$ y los vectores

$$x = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2-i \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2i \\ 3-i \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y\rangle = \begin{pmatrix} -2i & 3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2-i \end{pmatrix} = -3-7i$$

$$\langle y, x\rangle = \begin{pmatrix} 1-i & -2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ 3-i \end{pmatrix} = -3+7i = \overline{\langle x, y\rangle}$$

En particular $K = \mathbb{R}$ $\quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} = \langle y, x\rangle$

De la def de producto interno salen dos propiedades:

1) $\langle x, y+z\rangle = \overline{\langle y+z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle}$
$= \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

2) $\underbrace{\langle x, \lambda y\rangle}_{\lambda \in K} = \overline{\langle \lambda y, x\rangle} = \overline{\lambda\langle y, x\rangle}$
$= \overline{\lambda}\ \overline{\langle y, x\rangle} = \underline{\overline{\lambda}\langle x, y\rangle}$

Si $K = \mathbb{R}$
$\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$

Ejemplo en $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$

$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$ es producto interno en $\mathbb{R}_2[x]$?

Obs: $\langle \underbrace{1+x^2}_{p}, \underbrace{2-x+x^2}_{q}\rangle = 1.2 + 2.2 = 6 \qquad K = \mathbb{R}$

Quiero ver si se cumplen:

$p, q, h$ polinomios $\in \mathbb{R}_2[x]$

1) $\langle p, q\rangle = \langle q, p\rangle$
2) $\langle p+q, h\rangle = \langle p, h\rangle + \langle q, h\rangle$
3) $\langle \lambda p, q\rangle = \lambda\langle p, q\rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$
4) $\langle p, p\rangle > 0$ si $p \neq 0_{\mathbb{R}[x]} \Leftrightarrow \langle p, p\rangle \geq 0 \wedge \langle p, p\rangle = 0 \Leftrightarrow p = 0_{\mathbb{R}[x]}$

1) $\langle q, p\rangle \underset{\text{def. de la función}}{=} q(0)p(0) + q(1)p(1) = p(0)q(0) + p(1)q(1) = \langle p, q\rangle$

def. de + en $\mathbb{R}_2[x]$

2) $\langle p+q, h\rangle = (p+q)(0)h(0) + (p+q)(1)h(1) = [p(0)+q(0)]h(0) + [p(1)+q(1)]h(1)$
$= [p(0)h(0) + p(1)h(1)] + [q(0)h(0) + q(1)h(1)] = \langle p, h\rangle + \langle q, h\rangle$

3) $\langle \lambda p, q\rangle = (\lambda p)(0)q(0) + (\lambda p)(1)q(1) = \lambda p(0)q(0) + \lambda p(1)q(1) =$
def de producto x escalar
$= \lambda(p(0)q(0) + p(1)q(1)) = \lambda\langle p, q\rangle$

4) $\langle p,p\rangle = p(0)p(0) + p(1)p(1) = \underbrace{[p(0)]^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{[p(1)]^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0$

Si $p = 0_{\mathbb{R}[x]} \Rightarrow \langle 0_{\mathbb{R}[x]}, 0_{\mathbb{R}[x]}\rangle = 0^2(0) + 0^2(1) = 0$

Pero $\langle p,p\rangle = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} p = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$

$\langle p,p\rangle = p^2(0) + p^2(1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p(0)=0 \\ p(1)=0 \end{cases}$ 0 y 1 son raíces del polinomio de $\mathbb{R}_2[x]$

$p(x) = a + bx + cx^2 \quad p(0)=0 \Rightarrow \underline{a=0}$

$p(1) = 0 \Rightarrow \cancel{a} + b + c = 0 \Rightarrow b = -c$

$\therefore\ p(x) = b(x-x^2)\ \forall b\in\mathbb{R}$ para estos polinomios

$\langle p,p\rangle = 0 \ \wedge\ p(x) \neq 0_{\mathbb{R}_2[x]}$ si $b\neq 0$

$p(x) = x - x^2 \neq 0_{\mathbb{R}_2[x]} \wedge \langle p,p\rangle = 0 \Rightarrow \langle p,q\rangle$ No es un producto interno en $\mathbb{R}_2[x]$

Obs: En $\mathbb{R}_1[x]$ $\langle p,q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$ es producto interno

En $\mathbb{R}_2[x]$ $\langle p,q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$ es producto interno (También lo es en $\mathbb{R}_1[x]$) pero No es producto interno, ya que $p(x) = x(x-1)(x-2)$ / $\langle p,p\rangle = 0 \ \wedge$ $p \neq 0_{\mathbb{R}_3[x]}$

en $\mathbb{R}_3[x]$

Ejemplo en $V = \mathbb{R}^2$ $\quad K=\mathbb{R}$

Sea $\langle X,Y\rangle = Y^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{M} X \quad X,Y\in\mathbb{R}^2$. Se trata de un p.i en $\mathbb{R}^2$?

1) $\langle X+Y, Z\rangle = Z^T M (X+Y) = Z^T M X + Z^T M Y = \langle X,Z\rangle + \langle Y,Z\rangle$

2) $\langle \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{\lambda} X, Y\rangle = Y^T M(\lambda X) = \lambda\cdot(Y^T M X) = \lambda\langle X,Y\rangle$

3) $\langle X,Y\rangle = \underbrace{Y^T M X}_{1\times 1} = (Y^T M X)^T = X^T M^T (Y^T)^T = \underline{X^T M^T Y}$

Por otro lado $\langle Y,X\rangle = \underline{X^T M Y}$ $\quad \langle X,Y\rangle = \langle Y,X\rangle$ si $M = M^T$

4) $\langle X,X\rangle = X^T M X = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = (x_1 + x_2 \quad x_1 + 3x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$

$= x_1^2 + x_2x_1 + x_1x_2 + 3x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$

$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2^2 = \underbrace{(x_1+x_2)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{2x_2^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0$

Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}\right\rangle = 0$

Si $(x_1+x_2)^2 + 2x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0\end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}$

$\therefore\ \langle X,Y\rangle = Y^T M X$ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$

Con este producto interno:

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}\right\rangle = (1\ \ 0)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2\end{pmatrix} = (1\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2\end{pmatrix} = 3$

**3.2** En cada uno de los siguientes casos, verificar que la fórmula

$$\langle x, y\rangle := y^T G x$$

define un producto interno en $\mathbb{R}^2$:

(a) $G \in \mathcal{G}_1 = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{✓}, \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} ✓, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1 \end{bmatrix} ✓, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix} ✓ \right\}$.

(b) $G \in \mathcal{G}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{bmatrix} ✓ : \theta \in (0, \pi) \right\}$.

(c) $G \in \mathcal{G}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} \ell_1^2 & \ell_1\ell_2\cos\theta \\ \ell_1\ell_2\cos\theta & \ell_2^2 \end{bmatrix} ✓ : \theta \in (0, \pi),\ \ell_1 > 0,\ \ell_2 > 0 \right\}$.

(d) $G \in \mathcal{G}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} ✓ : a > 0,\ \det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} > 0 \right\}$.

Obs: $\langle X, Y\rangle = Y^T G X$ con $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle X, Y\rangle = Y^T X$ p.i.c. en $\mathbb{R}^2$

Obs:
1) $\langle X+Y, Z\rangle = Z^T G(X+Y) = Z^T G X + Z^T G Y = \langle X, Z\rangle + \langle Y, Z\rangle$
2) $\langle \lambda X, Y\rangle = Y^T G(\lambda X) = \lambda(Y^T G X) = \lambda\langle X, Y\rangle$
3) $\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle \Leftrightarrow \underbrace{G = G^T}$
4) $\langle X, X\rangle = X^T G X > 0 \quad X \neq 0_{\mathbb{R}^2}$

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\langle X, X\rangle = (x_1 \ \ x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$= (ax_1 + bx_2 \quad bx_1 + cx_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\langle X, X\rangle = (ax_1 + bx_2 \quad bx_1 + cx_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$= a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2$$
$$= \underbrace{a}_{\neq 0}\left(x_1^2 + \frac{2b}{a} x_1 x_2 + \frac{c}{a} x_2^2\right) = a\left(x_1^2 + 2x_1\left(\frac{b}{a}x_2\right) + \frac{c}{a}x_2^2\right)$$
$$= a\left(x_1^2 + 2x_1\left(\frac{b}{a}x_2\right) + \frac{b^2x_2^2}{a^2} - \frac{b^2x_2^2}{a^2} + \frac{c}{a}x_2^2\right)$$
$$= a\left[\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \left(\frac{-b^2 + ca}{a^2}\right)x_2^2\right]$$
$$= \overset{>0}{a}\underbrace{\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2}_{\geq 0} + \left(\frac{\overset{>0}{ac - b^2}}{\underset{>0}{a}}\right)\underbrace{x_2^2}_{\geq 0}$$

$G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad a > 0 \quad \underbrace{ac - b^2}_{\det(G)} > 0$

$\therefore$ Si $\langle X, Y\rangle$ es p.i en $\mathbb{R}^2 \Rightarrow G = G^T \wedge a > 0 \wedge \det(G) > 0$

Obs: Si $G = G^T, a > 0, \det(G) > 0 \Rightarrow \langle X, Y\rangle = Y^T G X$ es p.i en $\mathbb{R}^2$

En b: $G_\theta = \begin{pmatrix} \overset{>0}{1} & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix} \quad \theta \in (0, \pi)$

✓ $G = G^T \qquad \det(G) = 1 - \cos^2\theta = \underbrace{\operatorname{sen}^2\theta}_{>0}$