ÁLGEBRA II
PRIMER REPASO (ABRIL 2023)

---

1. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales vale que:

$$\text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ a \end{bmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ a \end{bmatrix} \right\},$$

---

2. Sea $p = 1 + 2x - 3x^2$ y sea $\mathcal{B}_1 = \{1 + x, q, x - x^2\}$ la base de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $[p]^{\mathcal{B}_1} = [1 \ -1 \ 1]^T$. Hallar una base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

---

3. Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}_2[x]$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \text{gen} \{2 + x, 2 - 2x + x^2\} \quad \text{y} \quad \mathbb{S}_2 = \text{gen} \{3 + 2x + 2x^2, 1 + 2x^2\}.$$

Hallar una base de $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$.

---

4. Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ y $\mathbb{U}$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\},$$
$$\mathbb{T} = \text{gen} \left\{ [-1 \ 2 \ 2 \ 0]^T, [3 \ 0 \ 0 \ 2]^T \right\}.$$

Hallar, si es posible, una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga, a la vez, a una base de $\mathbb{S}$ y a una base de $\mathbb{T}$.

---

5. Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : X \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X \right\},$$
$$\mathbb{S}_2 = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Construir un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$. ¿Es único? Si la respuesta es negativa, construir otro.

---

6. Sean $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}$ y $\mathbb{U}$ los subespacios de $\mathbb{R}_4[x]$ definidos por

$$\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(3) = p(2) = p(1) = 0\},$$
$$\mathbb{T} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(6) = p(3) = p(1) = 0\},$$
$$\mathbb{U} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) = 0\}.$$

Construir un base de $\mathbb{U}$ que contenga a una base de $\mathbb{T}$ y a una base de $\mathbb{S}$. ¿Es única? Si la respuesta es negativa, construir otra.

---

7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T, \\ T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \\ T\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

y sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ el subespacio definido por $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$. Hallar todas las soluciones de la ecuación $T(x) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ que pertenecen al subespacio $\mathbb{S}$.

---

8. Sea $\mathbb{V} = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A^T = A\}$ el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de la matrices simétricas de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ y sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, definidas por

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathcal{C} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}. \end{aligned}$$

(a) Hallar una base del núcleo de T .

(b) Hallar una base de la imagen de T .

(c) Hallar el conjunto solución de la ecuación $T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

---

9. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}_2[x]$, respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T \right\} \text{ y } \mathcal{C} = \{x^2 - 2x, x + 1, x - 3\}.$$

Hallar la preimagen por T del subespacio $\{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = p(0)\}$.

---

10. Sea Σ la simetría de $\mathbb{R}^3$ con respecto al plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$ en la dirección de la recta generada por $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(a) Hallar la imagen por Σ del subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$.

(b) Hallar la preimagen por Σ del subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$.

---

11. Sea Π la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ en la dirección de la recta $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3 = 0\}$.

(a) Hallar la imagen por Π del segmento de extremos $[2 \ 1 \ 0]^T$ y $[1 \ 1 \ 1]^T$.

(b) Hallar la imagen por Π del segmento de extremos $[1 \ 1 \ 1]^T$ y $[1 \ 0 \ 1]^T$.

(c) Hallar la imagen por Π del triángulo de vértices $[2 \ 1 \ 0]^T$, $[1 \ 1 \ 1]^T$, $[1 \ 0 \ 1]^T$.

(d) Hallar la imagen por Π del triángulo de vértices $[2 \ 1 \ -1]^T$, $[1 \ 1 \ 0]^T$, $[0 \ 1 \ 0]^T$.

---

12. Sea Π la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ en la dirección de la recta gen $\{[1 \ 0 \ 1]^T\}$.

(a) Hallar la imagen por Π del plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0\}$.

(b) Hallar la preimagen por Π de la recta $\{y \in \mathbb{R}^3 : 2y_1 - y_3 = 0, y_2 = 0\}$.