Facultad de Ingeniería | Universidad de Buenos Aires

2do. Cuatrimestre | 2024

95.10/CB051 | Modelación numérica
75.12 | 95.04 | Análisis numérico I A
95.13 | Métodos matemáticos y numéricos

Trabajo Práctico #1

Ecuación de Poisson: resolución numérica del sistema de ecuaciones lineales

Problema

La resolución numérica de la ecuación unidimensional de Poisson ($\nabla\phi=\rho$) implica obtener la solución de un sistema de ecuaciones lineales. El uso de modelos matemáticos basados en esta ecuación es muy extendido en la física, alcanzando a la electrostática (en donde ϕ es el potencial eléctrico y $-\rho$ es la densidad de carga), en gravitación (donde ϕ es el campo gravitacional potencial y ρ es la densidad de masa), en dinámica de fluidos (donde ϕ es la velocidad y ρ representa una variable asociada a la vorticidad), entre otras. También es muy utilizada en el análisis de imágenes.

El sistema de ecuaciones lineales a resolver (Ax=b) incluye a una matriz tridiagonal y a ϕ_j (vector incógnita) y ρ_j (el vector independiente)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix}$$

La matriz A es una matriz rala con *n* filas y *n* columnas. Dado que las condiciones de borde utilizadas en la discretización de este problema son de tipo Dirichlet, presenta solo un coeficiente en la primera y en la última fila (1). En las filas intermedias incluye tres coeficientes (-1, 2 y -1) conformando su característica tridiagonal.

El problema particular que resolver implica que ϕ_1 y ϕ_n valen cero, por lo tanto $\rho_1=\rho_n=0$. La definición de los restantes coeficientes del vector independiente

$$\rho_j = h^2 \cdot \left(-x_j \cdot \left(x_j + 3\right) \cdot e^{x_j}\right) \quad j = 2,3,\ldots,n$$

siendo $h=1/(n-1)$ y $x_j = h * (j-1)$.

Para tener de referencia, la solución exacta del problema es $u_j = x_j \cdot \left(x_j - 1\right) \cdot e^{x_j}$ *(con j=1,2, ….,n)*

Tareas

a) Programar el armado del sistema de ecuaciones lineales a resolver de tal manera de posibilitar su definición para distintos tamaños.

b) Programar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por los métodos indirectos de Jacobi y Gauss Seidel. No utilizar su definición matricial.

c) Resolver el problema con ambos métodos para un tamaño del sistema de n=11. Tomar como criterio de corte una tolerancia *TOL=0.00001* y arrancar el cálculo desde la solución inicial $\phi_j^0=1$ (*j=1,2, …, n*). Presentar para cada caso el sistema a resolver y la solución obtenida mediante un gráfico.

d) Para cada una de las resoluciones del ítem *c)* desarrollar criteriosamente un indicador en función del número de iteración que muestre la velocidad de convergencia de los dos métodos. Compararlos en un gráfico y establecer conclusiones.

e) Comparar la performance de ambos métodos de acuerdo a los tamaños del sistema de ecuaciones lineales. Utilizando el mismo criterio de corte e idéntica solución inicial que en el ítem *c)*, comparar las soluciones y la cantidad de iteraciones que ser requieren para resolver sistemas de *n x n* con *n=11*, *n = 51* y *n = 101*. Además, calcular el costo computacional de cada resolución (tiempo de cálculo).

f) Comparar la performance de ambos métodos de acuerdo al criterio de corte. Utilizando el sistema de n x n con *n = 101* e idéntica solución inicial que en el ítem *c)*, comparar las soluciones y la cantidad de iteraciones que ser requieren con las tolerancias *TOL=0.00001*, *TOL=0.0001* y *TOL=0.001*. Además, calcular el costo computacional de cada resolución (tiempo de cálculo).