2.13 [ver **Ejercicio 1.23**] Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \Big\{ \underbrace{\tfrac{1}{2}x(x-1)}_{p_1}, \underbrace{-x(x-2)}_{p_2}, \underbrace{\tfrac{1}{2}(x-1)(x-2)}_{p_3} \Big\},$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

(a) Analizar las propiedades de T.

(b) Hallar la matriz de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

(c) Hallar la matriz de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(d) Hallar la matriz de T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$.

(e) Hallar la imagen por T del subespacio gen $\{2 + 3x + 2x^2, 5 + 5x + 4x^2\}$.

¿Qué se puede decir "mirando" la matriz?

Como se observa que las columnas forman un cj. LI $\Rightarrow$ podemos decir que es inyectiva $\Rightarrow$ es sobreyectiva

$\dim V = \dim \mathbb{R}_2[x] = \dim \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ es isomorfismo

$$[T]_{\mathcal{B}}^{C} \cdot C_E^{\mathcal{B}} = [T]_E^{C}$$

$$C_E^{\mathcal{B}} = \left([1]^{\mathcal{B}} \quad [x]^{\mathcal{B}} \quad [x^2]^{\mathcal{B}} \right)$$

¿$\mathcal{B}$ quién es?

Raíces $\quad p_1: 0,1 \quad p_2: 0,2 \quad p_3: 1,2 \qquad 0 \quad 1 \quad 2$

$p_1($

$$p_1(2) = 1 \qquad p_2(1) = 1 \qquad p_3(0) = 1$$

$$p = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3$$

$$p(1) = \beta$$

$$p(0) = \gamma$$

$$p(2) = \alpha p_1(2) + \beta p_2(2) + \gamma p_3(2) = \alpha$$

$$C_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad [T]_B^C \, C_E^B = [T]_E^C$$

$$[1]^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [x]^B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [x^2]^B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) $[T]_B^C$

$$[T]_B^E = C_C^E \, [T]_B^C$$

$$C_C^E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) $$[T]_E^E = C_C^E \, [T]_B^C \, C_E^B$$

Hallar la imagen

$$\text{gen}\{\overset{p_1}{2+3x+2x^2}\ ;\ \overset{p_2}{5+5x+4x^2}\} = S$$

$$p \in S \Rightarrow p = \alpha(2+3x+2x^2) + \beta(5+5x+4x^2)$$

$Im(S)$ = es un subespacio de dimensión 2 pues es isomorf.

$\Rightarrow$ Basta buscar la imagen de p_1 y p_2

$$[T]_E^E [p_1]^E = [T]_E^E \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = v_1$$

(faltaría hacer las cuentas)

$$p_1 = 2 + 3x + 2x^2$$

$$p_2 = 5 + 5x + 4x^2$$

$$v_2 = [T]_E^E \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= [T(p_2)]^E$$

Coordenas en canónica = componentes del vector

$\Rightarrow$ Imagen de $S = \text{gen}\{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

2.14 Sea $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[x])$ la transformación lineal definida por

$$T_2\left(\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T\right) := (a+b) + (a+c)x + (b+c)x^2.$$

(a) Hallar las matriz de T_2 con respecto a las bases canónicas que correspondan.

(b) Comprobar que T_2 es un isomorfismo y hallar la matriz de T_2^{-1} con respecto a las bases canónicas que correspondan.

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_2 = \{1, x, x^2\}$$

$$[T]_{E_1}^{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Matriz tiene inversa (Columnas forman un cj. LI)

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + x \qquad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + x^2 \qquad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x + x^2$$

$\Rightarrow$ T es isomorfismo $\quad [T^{-1}]_{E_2}^{E_1} = \left([T]_{E_1}^{E_2}\right)^{-1}$

Si $[T]_{B_1}^{B_2}$ donde B_1 B_2 son cualquier base de V y W respectivamente tiene inversa $\Rightarrow$ podemos asegurar que T es isomorfismo.

2.18 Sea $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $\Pi \circ \Pi = \Pi$ y $\Pi\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$, $\Pi\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$.

(a) Hallar la imagen por Π del segmento de extremos $\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$.

(b) Hallar la imagen por Π del segmento de extremos $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$.

(c) Hallar la imagen por Π del triángulo de vértices $\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$.

(d) Hallar la imagen por Π del triángulo de vértices $\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$.

$$Im(\Pi) = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\} = S$$

$$\underset{ES}{\Pi\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} = \Pi \circ \Pi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \Pi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Proyecta sobre S

$$\underset{ES}{\Pi\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}} = \Pi \circ \Pi\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \Pi\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right\}$$

todo OK

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\pi\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = -2\pi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\pi\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\pi\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= -2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \checkmark$$

$\alpha + \beta + \gamma = 1$ $\qquad \alpha = -2$

$\gamma = 2$

$\beta = 1$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \in S$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \bullet\!-\!\!-\!\!-\!\bullet \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{\pi}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \underset{1}{\alpha}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \underset{0}{\beta}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \underset{1}{\gamma}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\pi\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \pi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \pi\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underset{-1}{\alpha}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \underset{1}{\beta}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \underset{1}{\gamma}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\pi\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -\pi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \pi\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \pi\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

La imagen del segmento es el segm. de ext. $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

La imagen del segm. es un punto

(c) Hallar la imagen por Π del triángulo de vértices $[2\ \ 1\ \ 0]^T$, $[1\ \ 1\ \ 1]^T$, $[1\ \ 0\ \ 1]^T$.

$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \to \underset{a}{\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}}$ $\quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \to \underset{b}{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}$ $\quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Segmento que une a y b

2.20 Sea $\Sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $\Sigma \circ \Sigma = I_{\mathbb{R}^3}$ y

$$\Sigma\left(\begin{bmatrix}4 & 0 & -3\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \ \Sigma\left(\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}5 & 1 & -4\end{bmatrix}^T.$$

Hallar la imagen por Σ del subespacio $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} \xrightarrow{\quad\Sigma\quad} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix} = \underset{1/2}{\alpha} \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + \underset{1}{\beta} \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} + \underset{-1/2}{\gamma} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Sigma\begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix} = 1/2\, \Sigma\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + 1\, \Sigma\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} - 1/2\, \Sigma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$\Sigma\begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,\Sigma\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + 1\,\Sigma\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\,\Sigma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} \checkmark$$

$$S \rightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$\text{base di } S = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \underset{-1/2}{\alpha}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + \underset{1}{\beta}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} + \underset{1/2}{\gamma}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \underset{-1/2}{\alpha}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + \underset{1}{\beta}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} + \underset{1/2}{\gamma}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Sigma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = -1/2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix} + 1/2\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\\-6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \underset{-3/4}{\alpha}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + \underset{1}{\beta}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} + \underset{3/4}{\gamma}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Sigma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-3/4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\\-9/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\1\\-7\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}(S) = S^* = \mathrm{gen}\left\{\begin{pmatrix}8\\1\\-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\1\\-6\end{pmatrix}\right\}$$