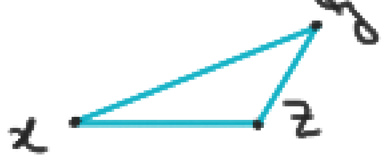
Producto Interno

Preliminares

Sobre espacios métricos y normados

1. Una *distancia*, o una *métrica*, en un conjunto $\mathcal{X}$ es una función $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+$ que posee las tres propiedades siguientes: ✱



   a) Para $x, y \in \mathcal{X}$: $d(x,y) = 0$ si, y sólo si $x = y$.
   b) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in \mathcal{X}$ (*simetría*).
   c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x,y,z \in \mathcal{X}$ (*desigualdad triangular*).

   La expresión $d(x,y)$ se lee *la distancia entre los puntos x e y*. El par $(\mathcal{X}, d)$, constituido por el conjunto $\mathcal{X}$ munido de una distancia, se denomina *espacio métrico*.

Producto Cartesiano ✱ $A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$

Ej: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Ejemplo de distancia $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$

$d(x,y) = d(y,x) = 1$

cumple a) b) c)

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $\quad 1 \leq 1 + 1$

Otro Ej. en $\mathbb{R}$ $d(x,y) = |x - y|$

2. La noción de distancia permite introducir la noción de límite: se dice que *la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x*, o que *x_n tiende a x*, cuando

$$\lim_{n \to \infty} d(x, x_n) = 0.$$

   En tal caso x se llama *el límite de la sucesión* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y se denota por $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

$\mathcal{X} = \mathbb{R}$ $\quad d(a,b) = |a - b|$

Ej: $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ $\qquad d(1; x_n) = \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n \to \infty} d(1, x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$

3. En todo lo que sigue, y salvo que se diga lo contrario, $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

4. Una *norma* en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^+$ que posee las tres propiedades siguientes:

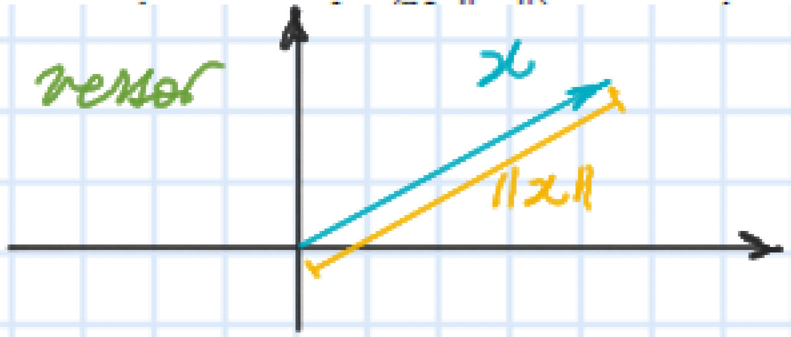
   $\mathbb{R}_{\geq 0}$

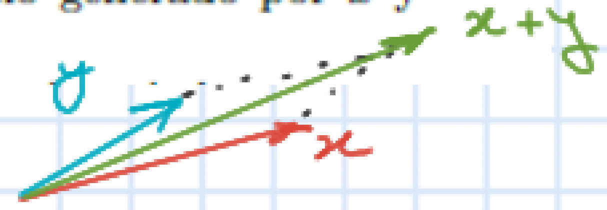
   a) $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.
   b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{V}$.
   c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{V}$ (*desigualdad triangular*).

   Al número no negativo $\|x\|$ se le denomina *la norma de x* y el par $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ se llama *espacio normado*. La norma de x representa la longitud del segmento de recta $[0, x] := \{tx : t \in [0,1]\}$ que une a los puntos 0 y x. Notar que si $x \neq 0$, entonces $u_x := \|x\|^{-1} x$ pertenece al subespacio generado por x y $\|u_x\| = 1$.

vector unitario

$\frac{x}{\|x\|}$ versor





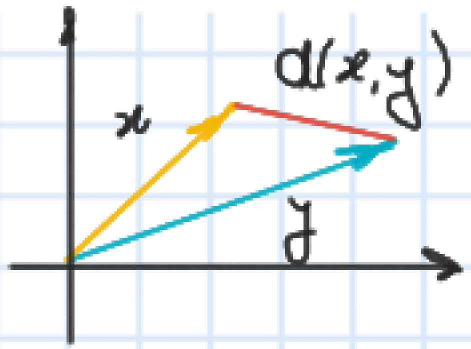
(distancia)

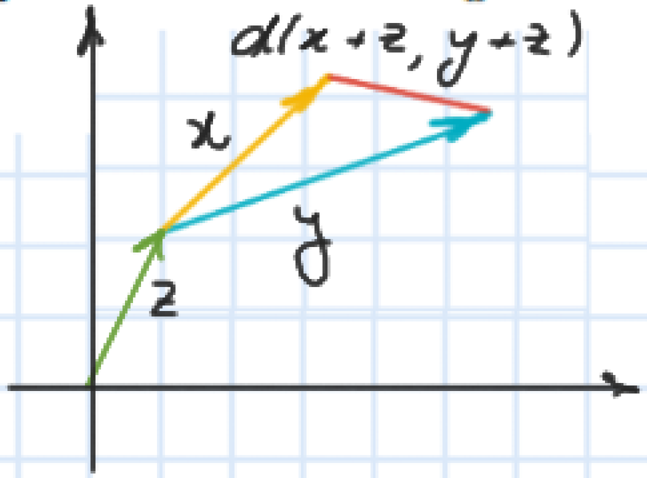
5. Todo espacio normado $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ se convierte en un espacio métrico, si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{V}$ se define

$$d(x,y) := \|x - y\|.$$

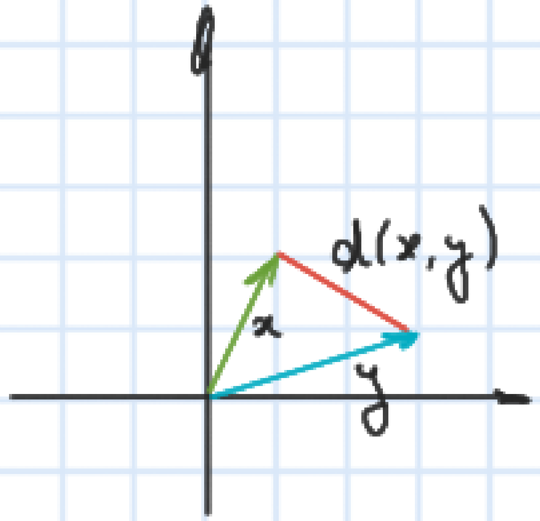
   Notar que la distancia inducida por una norma posee las siguientes propiedades adicionales:

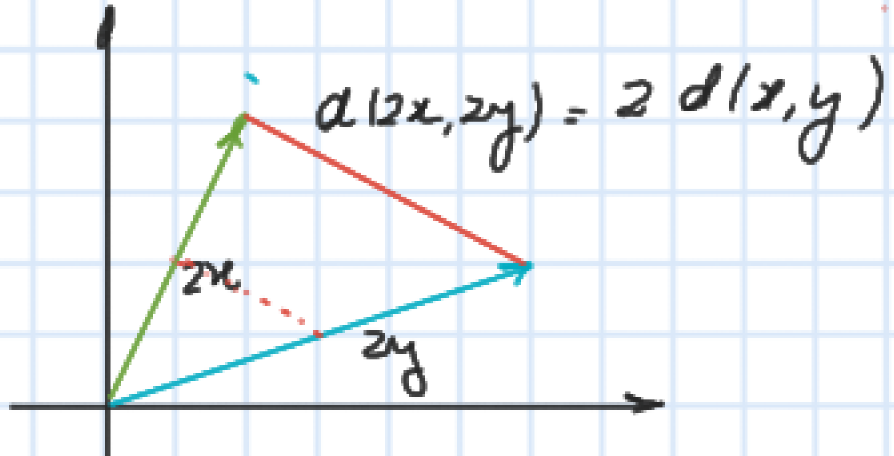
   a) $d(x,y) = d(x + z, y + z)$ (*invarianza por traslaciones*: la distancia entre x e y no cambia si ambos puntos se someten a una misma traslación).
   b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$ (*cambio de escala por dilataciones*: al dilatar ambos puntos por un mismo factor λ, la distancia queda multiplicada por $|\lambda|$).
   c) En particular, $d(x,y) = d(x - y, 0)$, de modo que las distancias al origen son suficientes para conocer todas las demás.





b)





Teorema de Thales

. **Sobre espacios euclídeos**

6. Un *producto interno* en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{K}$ que posee las las siguientes propiedades:

el punto representa un vectores

(i) Para cada $\lambda\in\mathbb{K}$ y $x,y,z\in\mathbb{V}$

1) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$,

2) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$.

(ii) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}\ \forall x,y\in\mathbb{V}$. En $\mathbb{R}$ es conmutativo

(iii) $\langle x,x\rangle > 0$ si $x\neq 0$.

1) $\langle x, y+z\rangle \overset{(ii)}{=} \overline{\langle y+z, x\rangle} \overset{1)}{=} \overline{\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle} =$

$= \overline{\langle y,x\rangle} + \overline{\langle z,x\rangle} \overset{(ii)}{=} \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

Distributivo respecto a la suma de vectores a derecha e izquierda

2) $\langle x, \lambda y\rangle \overset{(ii)}{=} \overline{\langle \lambda y, x\rangle} = \overline{\lambda\langle y,x\rangle} = \bar{\lambda}\,\overline{\langle y,x\rangle} \overset{(ii)}{=} \bar{\lambda}\langle x,y\rangle$

OBSERVACIÓN:

iii $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}$ (por ii) $\langle x,x\rangle = \overline{\langle x,x\rangle}$

7. Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ munido de un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se llama *espacio euclídeo* y se denota por $(\mathbb{V},\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Cuando $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ se dice que $(\mathbb{V},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un *espacio euclídeo real* y cuando $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ se dice que $(\mathbb{V},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un *espacio euclídeo complejo*.

OBS: Si definimos un pi en V podemos tomar $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ y $d(x,y) = \|x-y\|$

Euclídeo → normado → métrico

P.I — norma — distancia

8. La tabla de multiplicación de una colección de vectores $\mathfrak{X} = (x_i : i\in\mathbb{I}_n)$ se llama *la matriz de Gram de* $\mathfrak{X}$ y se denota por $G_{\mathfrak{X}}$ → vectores

$$G_{\mathfrak{X}} := [\langle x_i,x_j\rangle]_{\substack{i\in\mathbb{I}_n\\ j\in\mathbb{I}_n}} = \begin{bmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle \\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle & \cdots & \langle x_2,x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n,x_1\rangle & \langle x_n,x_2\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle \end{bmatrix}.$$

El *Gramiano de* $\mathfrak{X}$, denotado por $G(\mathfrak{X})$, es el determinante de la matriz $G_{\mathfrak{X}}$.

9. La matriz de Gram de una base $\mathcal{B} = \{v_i : i\in\mathbb{I}_n\}$ de $\mathbb{V}$ determina unívocamente al producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y se llama *la matriz del producto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *respecto de la base* $\mathcal{B}$.

Esta función es PI

Ejemplo $\mathbb{R}^2$ $\langle x,y\rangle = 5x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$

$E = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $G_E = \begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,e_2\rangle \\ \langle e_2,e_1\rangle & \langle e_2,e_2\rangle\end{pmatrix}$

OBS $x^T G\, y = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} =$

$([x]^E)^T$ $[y]^E$ $\langle x,y\rangle = ([x]^B)^T G_B [y]^B$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\}$ $\qquad G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}10 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

$\langle x,y\rangle = 5x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$

$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 10$

$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 5-1+1-3$

$G_{\mathcal{B}} = G_{\mathcal{B}}^T$

$(G_{\mathcal{B}})_{ii} = \|v_i\|^2 > 0$

$\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = 5-1-1+3$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad \alpha = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad \beta = \frac{x_1-x_2}{2}$

$([x]^{\mathcal{B}})^T G_{\mathcal{B}} [y]^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2} & \frac{x_1-x_2}{2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}10 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{y_1+y_2}{2}\\ \frac{y_1-y_2}{2}\end{pmatrix} =$

$= \left(5(x_1+x_2) + (x_1-x_2)\right)\frac{y_1+y_2}{2} + \left((x_1+x_2)+3(x_1-x_2)\right)\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right) =$

$= (6x_1+4x_2)\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) + (4x_1-2x_2)\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right) =$

$= 5x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$

10. Todo espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se convierte en un espacio normado, si para cualquier $x \in \mathbb{V}$ se define

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

La función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^+$ así definida es una norma en $\mathbb{V}$ y se llama la *norma inducida* por el producto interno.

11. La *desigualdad de Cauchy-Schwarz* establece que

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{V}.$$

$\Rightarrow \dfrac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq 1 \qquad \forall x \neq 0_V \quad y \neq 0_V$

Si $\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \left| \dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} \right| \leq 1$

$\Rightarrow$ podemos definir

12. Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial el *ángulo* θ *entre dos vectores no nulos* x *e* y se define mediante la fórmula

$$-1 \leq \cos\theta := \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1,$$

Caso en $\mathbb{C}$ no definimos θ

donde $\theta \in [0, \pi]$. Notar que $\cos\theta = \langle u_x, u_y\rangle$.

13. Si $\langle y, x\rangle = 0$ se dice que *los vectores* x *e* y *son ortogonales* y se denota por $y \perp x$. El conjunto de todos los vectores ortogonales a x se denota por $x^\perp$, y se llama el *subespacio ortogonal a* x

$$x^\perp := \{y \in \mathbb{V} : \langle y, x\rangle = 0\}.$$

En $\mathbb{R}$ $\theta = \pi/2$ $\qquad$ $\mathbb{C}$ sólo $\perp$

En los espacios euclídeos reales la condición $\langle y, x\rangle = 0$ implica que $\theta = \frac{\pi}{2}$ salvo que $x = 0$ o $y = 0$.

Proposición $x^\perp$ es subespacio de V

$x^\perp \subset V$ por definición $\qquad x^\perp \neq \emptyset$ pues 0_V es ortogonal a todo vector de V

$\langle 0_V, x\rangle = 0_K$

$\langle 0_V, x\rangle = \langle 0_K \cdot v, x\rangle = 0_K \langle v, x\rangle = 0_K$

Si $y \in x^\perp$, $z \in x^\perp$, $\alpha \in K$ $\Rightarrow \alpha y + z \in x^\perp$

pues $\langle \alpha y + z, x\rangle = \langle \alpha y, x\rangle + \langle z, x\rangle =$

$\alpha\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle = \alpha \cdot 0 + 0 = 0$

14. Obsérvese que si $x \neq 0$, entonces para todo $y \in \mathbb{V}$ vale que

$\|x\| \neq 0$

$u_x = x/\|x\|$

$$y = \underbrace{\langle y, u_x\rangle}_{\alpha} u_x + (y - \underbrace{\langle y, u_x\rangle}_{\alpha} u_x). =$$

$\alpha u_x + (y - \alpha u_x) = y$ ✓

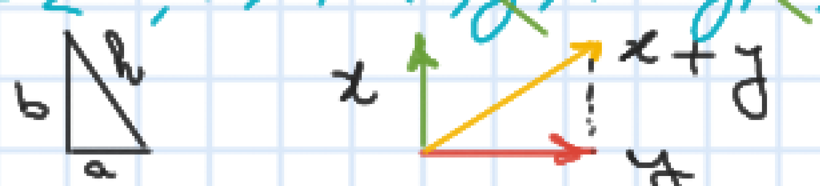
15. El *teorema de Pitágoras* establece que si x e y son ortogonales, vale que

$h^2=(C.a)^2+(C.o)^2$

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle=0$

$\|x+y\|^2=\langle x+y;x+y\rangle=\langle x,x\rangle+\cancel{\langle x,y\rangle}+\cancel{\langle y,x\rangle}+\langle y,y\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2$



16. Un sistema de vectores $\mathcal{S}=\{v_i : i\in\mathbb{I}\}\subset\mathbb{V}\setminus\{0\}$ se llama *ortogonal*, cuando

$$\langle v_i,v_j\rangle=0 \text{ para todo } i\neq j.$$

$h^2=a^2+b^2$

Obsérvese que $\mathcal{S}$ es un sistema ortogonal si, y sólo si, las matrices de Gram de todos los subconjuntos finitos de $\mathcal{S}$ son diagonales.

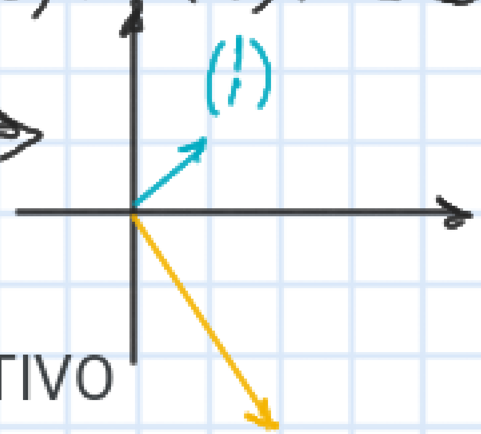
Ej. $\mathbb{R}^2$ $\langle x,y\rangle=5x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$

$\left\{\underset{x}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}\underset{y}{\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}}\right\}$ es un sistema ortogonal

$\langle x;y\rangle=5.1.2+2.1+1(-3)+3.(-3).1=0$

Pero si $\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2 \Rightarrow$ producto escalar, p.i. canónico

$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right\}$ no es ortogonal



LA ORTOGONALIDAD ES UN CONCEPTO RELATIVO
DEPENDE DEL PRODUCTO INTERNO

En cambio $x \parallel y$ si $\exists\alpha\in\mathbb{K} : x=\alpha y$

EL PARALELISMO (DEP. LINEAL) ES ABSOLUTO

$\{x;y\}=\{\alpha y,y\}$ es LD.

17. Un sistema ortogonal de vectores $\{u_i : i\in\mathbb{I}\}$ se llama *ortonormal*, cuando

$$\|u_i\|=1 \text{ para todo } i\in\mathbb{I}.$$

$\langle x,y\rangle=5x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$

$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right\}$ $\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|=(5+1+1+3)^{1/2}=\sqrt{10}$

$\left\|\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right\|=(5.2.2+2(-3)+2(-3)+(-3)(-3).3)^{1/2}$
$=(20-12+27)^{1/2}=\sqrt{35}$

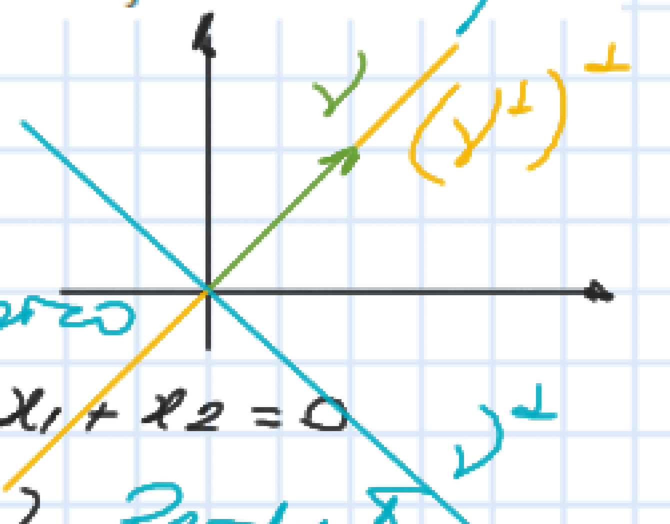
Versores ortogonales $\rightarrow$ $\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{10}\\1/\sqrt{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/\sqrt{35}\\-3/\sqrt{35}\end{pmatrix}\right\}$ es un sistema ortonormal

18. Si $\mathcal{V}$ es un conjunto no vacío de vectores, el *subespacio ortogonal a* $\mathcal{V}$, denotado por $\mathcal{V}^\perp$, se define por

$$\mathcal{V}^\perp:=\{x\in\mathbb{V}:\langle x,v\rangle=0 \text{ para todo } v\in\mathcal{V}\}$$

Es subespacio

$(\mathcal{V}^\perp)^\perp=\text{gen}\,\mathcal{V}$ OJO



$\mathbb{R}^2$ p.i.c. $\mathcal{V}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ producto interno canónico

$\mathcal{V}^\perp=\left\{x\in\mathbb{V}:\left\langle x,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0\right\}\Rightarrow x_1+x_2=0$

$x_1=-x_2 \Rightarrow \mathcal{V}^\perp=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

Producto escalar $\langle x,y\rangle=y^Tx=x^Ty$

$(\mathcal{V}^\perp)^\perp=\left\{x\in\mathbb{V}:\left\langle x,\begin{pmatrix}a\\-a\end{pmatrix}\right\rangle=0\right\}$

$x_1a-x_2a=0 \quad \forall a\in\mathbb{R} \Rightarrow x_1=x_2$

$\Rightarrow (\mathcal{V}^\perp)^\perp=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

19. El *producto interno canónico en* $\mathbb{K}^n$, $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ se define por

$$\langle x, y\rangle := y^* x,$$

En $\mathbb{R}$ $\langle x,y\rangle = y^T x$

donde $y^* := \overline{y^T}$ es el traspuesto conjugado del vector y. Notar que $y^* x = x^T \overline{y}$.

20. El *producto interno canónico en* $\mathbb{K}^{m\times n}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{K}^{m\times n} \times \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}$ se define por

$$\langle X, Y\rangle := \operatorname{tr}(Y^* X),$$

donde $Y^* := \overline{Y^T}$ es la matriz traspuesta conjugada de Y. Notar que $\operatorname{tr}(Y^* X) = \operatorname{tr}(X^T \overline{Y})$.

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2i\\ -i\end{pmatrix}\right\rangle = (-2i \quad i)\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = -2i - 1$$

Ej en $\mathbb{C}^2$

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}_{X}, \underbrace{\begin{pmatrix}3 & 4\\ -5 & 2\end{pmatrix}}_{Y}\right\rangle = \operatorname{tr}(Y^T X) =$$

$$\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}3 & -5\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right] = \operatorname{tr}\begin{pmatrix}3.2+(-5)(-1) & 3\\ 6 & 4.1+2.0\end{pmatrix} =$$

$$= \underline{3.2} + \underline{(-5)(-1)} + \underline{4.1} + \underline{2.0}$$

3.1 Sea $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio euclídeo finito dimensional y sea $v_0 \in \mathbb{V}\setminus\{0\}$ un vector arbitrario pero fijo.

$\dim V = n$ vector fijo $v_0 \neq 0_V$

(a) Comprobar que la aplicación $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\phi(v) := \langle v, v_0\rangle$$

es una funcional lineal de $\mathbb{V}$. Describir su núcleo e indicar la dimensión del mismo. Observar que $\mathbb{V} = \operatorname{Nu}(\phi) \oplus \operatorname{gen}\{v_0\}$.

(b) Explicar por qué la aplicación $\psi : \mathbb{V} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\psi(v) := \langle v_0, v\rangle$$

no es una funcional lineal de $\mathbb{V}$.

: repasar la definición de producto interno.

a) $\phi : V \to \mathbb{C}$ $\quad \phi(v) = \langle v, v_0\rangle$ Quiero ver que es una T. lineal

Dados $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$\phi(\alpha u + v) = \alpha\phi(u) + \phi(v)$$

$$\phi(\alpha u + v) = \langle \alpha u + v, v_0\rangle = \langle \alpha u, v_0\rangle + \langle v, v_0\rangle$$ axiomas del p.i

$$= \alpha\langle u, v_0\rangle + \langle v, v_0\rangle =$$

$$= \alpha\phi(u) + \phi(v) \checkmark$$

Ej en $\mathbb{C}^2$ p.i C $\quad v_0 = \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$$\phi(v) = \left\langle v, \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\rangle = (1 \quad -i)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = x - iy$$

$$\phi\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = x - iy \qquad \phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$$

En $\mathbb{C}^2$ $\langle u, v\rangle = 3u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + u_1\bar{v}_2 + u_2\bar{v}_1$

$$\phi\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\rangle = 3.x1 + iy + xi + y.1 =$$

$$\phi\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = (3+i)x + (1+i)y$$

$v \in V$

$\operatorname{Nu}(\phi)$ $\quad \phi(v) = 0 \Rightarrow \langle v, v_0\rangle = 0 \Rightarrow$

$\operatorname{Nu}\phi = v_0^\perp$ subespacio de V

$\ker \phi = v_0^{\perp} = S \subseteq V$

$\dim V = \dim \ker \phi + \dim \operatorname{Im} \phi$

$n = (n-1) + 1$

$\operatorname{Im} \phi \subset \mathbb{C} \quad \dim \operatorname{Im}(\phi) \leq 1$

Como $v_0 \neq 0 \quad \phi(v_0) = \|v_0\|^2 \neq 0$

$\in \operatorname{Im}(\phi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}(\phi) = 1$

$(v_0^{\perp})^{\perp} = S^{\perp} \qquad S \oplus S^{\perp} = V$

ver videos

b) $\psi(v) = \langle v_0, v \rangle$ no es funcional lineal

$\psi(v+u) = \langle v_0, v+u \rangle =$

$= \langle v_0, v \rangle + \langle v_0, u \rangle = \psi(v) + \psi(u)$ ✓

$\psi(\alpha v) = \langle v_0, \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \langle v_0, v \rangle$

$= \bar{\alpha}\, \psi(v) \qquad$ Ej: $\psi(iv) = -i\, \psi(v)$

3.2 [*miniatura*] Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio euclídeo de dimensión 2 y sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base de $\mathbb{V}$. Sean $x = x_1 v_1 + x_2 v_2$ y $y = y_1 v_1 + y_2 v_2$ vectores cualesquiera de $\mathbb{V}$. ver videos

(a) Utilizar las propiedades del producto interno para comprobar que

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} \langle v_1, v_1 \rangle + x_1 \overline{y_2} \langle v_1, v_2 \rangle + x_2 \overline{y_1} \langle v_2, v_1 \rangle + x_2 \overline{y_2} \langle v_2, v_2 \rangle .$$

(b) Observar que la identidad precedente se puede escribir en cualquiera de las siguientes dos formas equivalentes

$$\langle x, y \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} .$$

(c) Notar que las identidades anteriores significan que

$$\langle x, y \rangle = [x]^{\mathcal{B}\,T} G_{\mathcal{B}} \overline{[y]^{\mathcal{B}}} = [y]^{\mathcal{B}\,*} G_{\mathcal{B}}^{T} [x]^{\mathcal{B}},$$

donde $G_{\mathcal{B}} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ es la matriz de Gram definida por

$$G_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix} .$$

(d) Comprobar que $G_{\mathcal{B}} = G_{\mathcal{B}}^{*}$ y que $\det(G_{\mathcal{B}}) > 0$.

a) $x = x_1 v_1 + x_2 v_2 \qquad y = y_1 v_1 + y_2 v_2$

$\langle x, y \rangle = \langle (x_1 v_1 + x_2 v_2), (y_1 v_1 + y_2 v_2) \rangle =$

$\langle x_1 v_1, y_1 v_1 \rangle + \langle x_1 v_1, y_2 v_2 \rangle + \langle x_2 v_2, y_1 v_1 \rangle + \langle x_2 v_2, y_2 v_2 \rangle =$

$= x_1 \bar{y}_1 \langle v_1, v_1 \rangle + x_1 \bar{y}_2 \langle v_1, v_2 \rangle + x_2 \bar{y}_1 \langle v_2, v_1 \rangle + x_2 \bar{y}_2 \langle v_2, v_2 \rangle$

b) $= \overline{(\bar{y}_1 \;\; \bar{y}_2)} \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

$= ([y]^{\mathcal{B}})^{T} G_{\mathcal{B}} [x]^{\mathcal{B}}$

$(G_B)_{ij} = \langle v_i , v_j \rangle = \overline{\langle v_j ; v_i \rangle} = \overline{(G_B)_{ji}}$

$= \overline{(G_B)_{ji}} \Rightarrow \overline{G_B}^T = G_B$

(G_B es hermítica)

$\det(G) = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2\rangle \langle v_2, v_1 \rangle =$

$= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2\rangle \overline{\langle v_1, v_2\rangle} =$

$= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - |\langle v_1, v_2\rangle|^2 > 0 \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ base $\{v_1, v_2\}$ es LI $\Rightarrow > 0$

$a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{R}$

$(a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$ *

Desig. $0 \leq |\langle v_1, v_2\rangle| \leq \|v_1\| \|v_2\|$

$\Rightarrow |\langle v_1, v_2\rangle|^2 \leq \|v_1\|^2 \|v_2\|^2$

Cuando $|\langle v_1, v_2\rangle| = \|v_1\| \|v_2\|$
cuando son LD

Si $v_2 = \alpha v_1$ $\langle v_1, \alpha v_1\rangle = \overline{\alpha} \|v_1\|^2 =$

$\Rightarrow |\langle v_1, \alpha v_1\rangle| = |\overline{\alpha}| \|v_1\|^2 =$

$= |\alpha| \|v_1\| \|v_1\| = \|v_1\| \|v_2\|$

* como $\{v_1, v_2\}$ es base $\Rightarrow \det(G_B) > 0$

3.3 En cada uno de los siguientes casos, verificar que la fórmula

$$\langle x, y\rangle := y^T G x$$

Si $G = G^T$ y definido (+)

define un producto interno en $\mathbb{R}^2$:

En $\mathbb{R}$ G es simétrica $\Rightarrow y^T G x$ define un pi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(a) $G \in \mathcal{G}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Casos partic. de $\mathcal{G}_2$ $\quad \theta = \pi/2 \quad \theta = \pi/3 \quad \theta = \pi/4 \quad \theta = \pi/6$

(b) $G \in \mathcal{G}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{bmatrix} : \theta \in (0, \pi) \right\}$.

caso particular de $\mathcal{G}_3$ $\quad \ell_1 = \ell_2 = 1$

(c) $G \in \mathcal{G}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} \ell_1^2 & \ell_1\ell_2\cos\theta \\ \ell_1\ell_2\cos\theta & \ell_2^2 \end{bmatrix} : \theta \in (0, \pi), \ell_1 > 0, \ell_2 > 0 \right\}$.

es un caso particular de $\mathcal{G}_4$

(d) $G \in \mathcal{G}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a > 0, \det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} > 0 \right\}$.

$a > 0$
$a.c - b^2 > 0$
$y\ a > 0 \Rightarrow c > 0$

$\ell_1 = \sqrt{a}$ $\quad \ell_2 = \sqrt{c}$

$\sqrt{a}\sqrt{c}\cos\theta = b$

Probando que $y^T G x$ es pi para d)
queda probado para a) b) y c)

- $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y ; z\rangle$ ✓

$\langle x+y ; z\rangle = z^T G (x+y) = z^T G x + z^T G y =$
$= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

- $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ ✓

$\langle\lambda x,y\rangle = y^T G \lambda x = \lambda y^T G x =$

$= \lambda\langle x,y\rangle$

- $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ ✓ no pongo el conj porque estoy en $\mathbb{R}$

$\langle x,y\rangle = \underbrace{\overset{1\times n}{y^T}\overset{n\times n}{G}\overset{n\times 1}{x}}_{\in K} = (y^T G x)^T =$

$x^T \underbrace{G^T}_{\text{simétrica}} (y^T)^T = x^T G y = \langle y,x\rangle$

- $\langle x,x\rangle \geq 0 \;\wedge\; \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(x_1\ x_2)\, G \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = a x_1^2 + c x_2^2 + 2b x_1x_2 =$

$a\left(x_1^2 + \frac{c}{a}x_2^2 + \frac{2b}{a}x_1x_2\right) =$

$a\left[\left(x_1^2 + \frac{2b}{a}x_1x_2 + b^2/a^2\, x_2^2 - b^2/a^2\, x_2^2\right) + c/a\, x_2^2\right]$

$= a\left[\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 - \frac{b^2x_2^2}{a^2} + \frac{c}{a}x_2^2\right] =$

$= \underbrace{a}_{>0}\left[\underbrace{(x_1 + b/a\, x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{ca-b^2}{a^2}}_{>0}\underbrace{x_2^2}_{\geq 0}\right] \geq 0$

$\det(G) = ac - b^2 > 0$

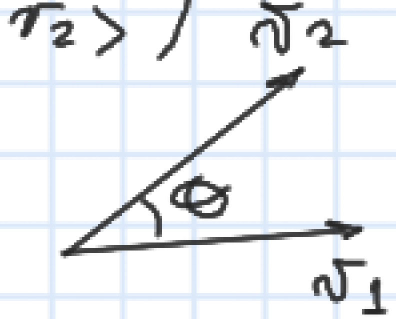
para que sea cero $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle x,x\rangle > 0$ si $x \neq 0$ ✓

$\Rightarrow y^TGx = \langle x,y\rangle$ define un pi

☞: *observar que $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_4$ y decidir en qué orden se resolverá el problema. ¿Se podrán definir otros productos internos en $\mathbb{R}^2$? ¿Qué significado geométrico tienen los coeficientes de las matrices G? ¿Qué efectos tiene la elección de cada uno de esos productos internos sobre los lados y el área del triángulo de vertices $0, e_1, e_2$? ¿Qué significado geométrico tiene el determinante de G?*

$B = \{v_1, v_2\} \qquad G_B = \begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle\end{pmatrix}$



$\langle v_1,v_1\rangle = \|v_1\|^2 = l_1^2 \Rightarrow \|v_1\| = l_1$

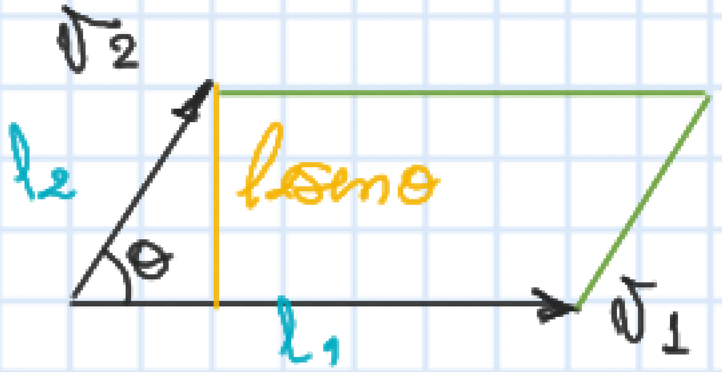
$\|v_2\|^2 = l_2^2 \Rightarrow \|v_2\| = l_2$

$\langle v_1,v_2\rangle = l_1 l_2\cos\theta = \|v_1\|\,\|v_2\|\cos\theta$

$$\det(G) = l_1^2 l_2^2 - l_1^2 l_2^2 \cos^2\theta =$$

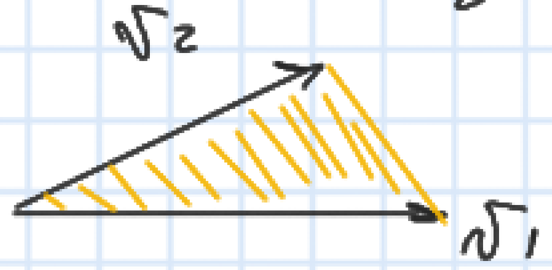
$$= l_1^2 l_2^2 (1-\cos^2\theta) = l_1^2 l_2^2 \operatorname{sen}^2\theta =$$

$$= (l_1 l_2 \operatorname{sen}\theta)^2 = (\text{Área } \square)^2$$

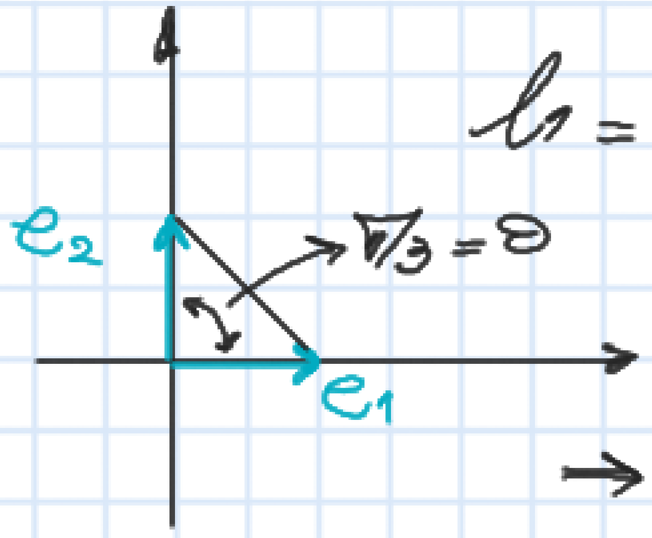


$$\text{Área } \square = \text{Base} \cdot \underset{\text{altura}}{h} = l_1 \cdot l_2 \operatorname{sen}\theta$$

$$\text{Área del Triángulo} = \frac{1}{2}\sqrt{\det(G)}$$



3.4 Hallar todos los productos internos en $\mathbb{R}^2$ que convierten al triángulo de vértices $0, e_1$ y e_2 en un triángulo equilátero. Utilizar alguno de ellos para calcular el ángulo entre los vectores $v_1 = [1 \quad 1]^T$ y $v_2 = [-1 \quad 1]^T$. ¿Cuál es el valor del área del triángulo de vértices $0, v_1$ y v_2? ¿Cómo depende del producto interno elegido?



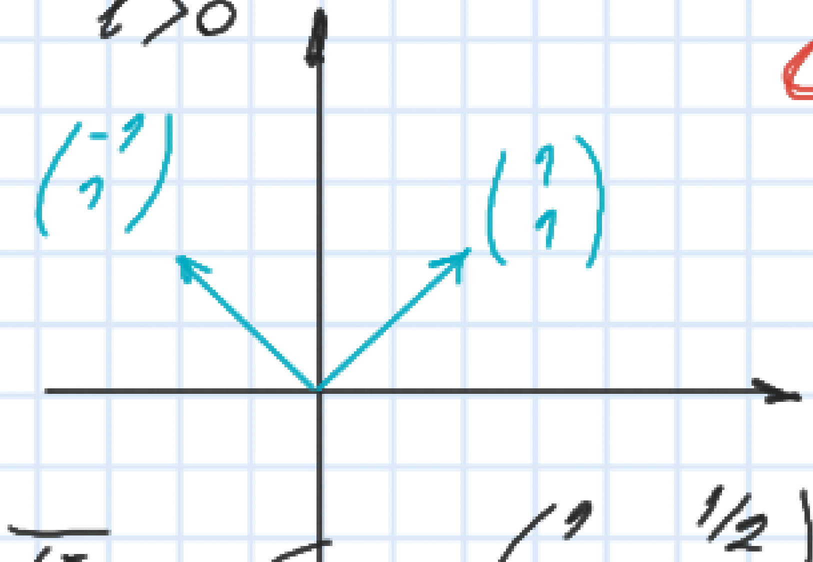
$$l_1 = l_2 = \|e_1\| = \|e_2\| = l$$

$$\cos\theta = 1/2$$

$$\rightarrow G_E = \begin{pmatrix} l^2 & l^2 \, 1/2 \\ l^2 \, 1/2 & l^2 \end{pmatrix} =$$

$$= G_E = l^2 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$l > 0$



Cuál es el ángulo

Que es $\pi/2$ por mirarlo

Sino

$$\cos\theta = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \, \|v_2\|} \Rightarrow$$

Si es $\pi/2$

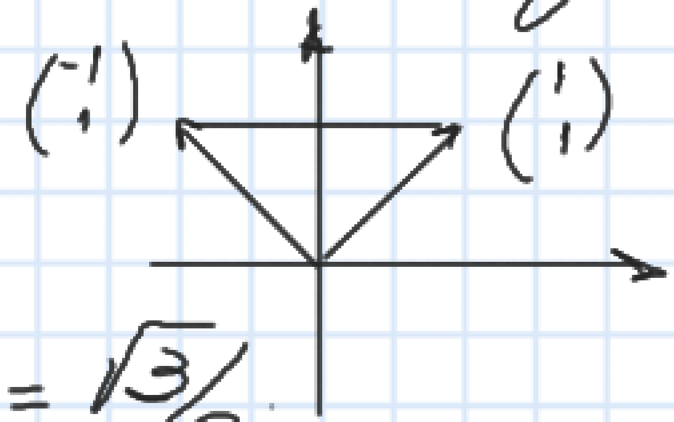
Tomo $G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1/2 + 1/2 = \underline{0} \; !$$

$$\text{Área } \Delta = 1/2 \sqrt{\det(G)} = \sqrt{3}/4$$

Área del triángulo de lados e_1 y e_2

es $\sqrt{3}/4$



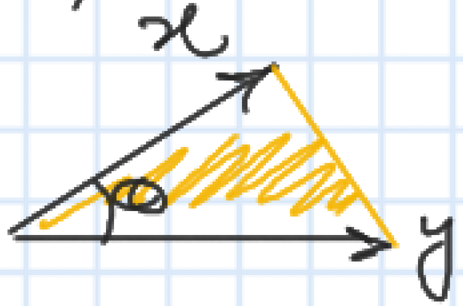
Calculemos el área

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\| \underbrace{\operatorname{sen}\pi/2}_{1}\right) = \sqrt{3}/2$$

$$(1\ \ 1)\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 3 \to \left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|^2 \qquad (1\ \ -1)\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} =$$

$$= 1/2 + 1/2 = 1$$

Dado que $\langle x, y\rangle = \left([y]^B\right)^T G_B\, [x]^B$



Área Δ $= \|x\|\,\|y\| \operatorname{sen}\theta$

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} \to \theta$$