1 17/10/2024

Repaso

V $\mathbb{R}$ $\langle\, ;\, \rangle$ Espacio vectorial Euclídeo ($\mathbb{R}$) Hermítico ($\mathbb{C}$)

$\langle\, ;\, \rangle$ pi Axiomas $(G_B)_{ij} = \langle v_i ; v_j \rangle$ $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ B_V base

$\langle x ; y \rangle = ([y]^B)^t G_B [x]^B$ no es una Transf. lineal

$\|\ \|$ Norma inducida $\|v\| = (\langle v ; v \rangle)^{1/2}$

Distancia $\|v - u\| = d(u, v)$

$BOG = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$ $\langle v_i ; v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases}$

$BON = \{u_1, u_2 \dots u_n\}$ $\langle u_i ; u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Complemento ortogonal

A es un conj de vectores $A^{\perp} = \{\text{vectores} \perp \text{a todos los de } A\}$ subespacio

$\mathbb{R}^2$ $\quad A=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ptc $\quad A^\perp = \left\{v\in\mathbb{R}^2 : v \perp \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$

$\left\langle \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = a+b=0 \Rightarrow a=-b \Rightarrow A^\perp = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

$(A^\perp)^\perp =$ OJO gen $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \neq A$

$S^\perp = \{v\in V : \langle v,u\rangle \ \forall u\in S\}$ en dimensión finita $(S^\perp)^\perp = S$

para hallar el $S^\perp$ basta con buscar los vectores $\perp$ a una base de S. $\quad S\oplus S^\perp = V$

Proyecciones $\quad P_S(v) = v_S \qquad v_S\in S : (v-v_S)\in S^\perp$

$P_S(v) = v - P_{S^\perp}(v) \Rightarrow v = v_S + v_{S^\perp} \Rightarrow v_S = P_S(v)$

y $\quad v_{S^\perp} = P_{S^\perp}(v)$

Ejemplo ptc $\quad S=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \quad S^\perp = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

1º forma $\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

3

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha+\gamma = x\\ \alpha+\beta-\gamma = y\\ \beta+\gamma = z\end{cases}\qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x\\1&1&-1&y\\0&1&1&z\end{array}\right)\ F_2-F_1 \checkmark$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x\\0&1&-2&y-x\\0&1&1&z\end{array}\right)\ F_3-F_2\quad \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x\\0&1&-2&y-x\\0&0&3&z-y+x\end{array}\right)$$

$$\gamma = (x-y+z)\,1/3 \qquad \beta = y-x+2\gamma = -1/3\,x+1/3\,y+2/3\,z$$

$$\alpha = x-\gamma = 2/3\,x+1/3\,y-1/3\,z$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 1/3\left[(2x+y-z)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+(-x+y+2z)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+(x-y+z)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right]\checkmark$$

$$v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{1/3\begin{pmatrix}2x+y-z\\x+2y+z\\-x+y+2z\end{pmatrix}}_{\in S}+\underbrace{1/3\begin{pmatrix}x-y+z\\-x+y-z\\x-y+z\end{pmatrix}}_{\in S^{\perp}}$$

$$v = P_S(v) + P_{S^{\perp}}(v)$$

$$P_S(v) = \overbrace{1/3\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}}^{[P_S]_E^E}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$P_{S^{\perp}}(v) = 1/3\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

4 Como $\dim S^{\perp} = 1$ y $\dim S = 2$ conviene calcular

$P_{S^{\perp}}(v)$ y $P_S(v) = v - P_{S^{\perp}}(v)$ Busco una BON de $S^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$

$$P_{S^{\perp}}(v) = \left\langle v, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = 1/3 \, (x - y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1/3 \begin{pmatrix} x - y + z \\ -x + y - z \\ x - y + z \end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$P_S(v) = v - P_{S^{\perp}}(v)$ .... Otra forma Buscar una BON de S $S = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ plano

$S^{\perp} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\perp$ plano $x - y + z = 0$

$$BON_S = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}} \right\}$$

completo p/ que cumpla la ecuación del plano

$$P_S(v) = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 = 1/2 \, (x + y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1/6 \, (x - y - 2z) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2}(x+y)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{6}(x-y-2z)\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tfrac12 x + \tfrac12 y\\ \tfrac12 x + \tfrac12 y\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\tfrac16 x - \tfrac16 y - \tfrac13 z\\ -\tfrac16 x + \tfrac16 y + \tfrac13 z\\ -\tfrac13 x + \tfrac13 y + \tfrac23 z\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\tfrac23 x + \tfrac13 y - \tfrac13 z\\ \tfrac13 x + \tfrac23 y + \tfrac13 z\\ -\tfrac13 x + \tfrac13 y + \tfrac23 z\end{pmatrix} = P_S(v) = \tfrac13\begin{pmatrix}2x+y-z\\ x+2y+z\\ -x+y+2z\end{pmatrix}$$

Definimos $d(v,S) = \| P_{S^\perp}(v) \|$.

No tomé una BON

$$\underset{w_1}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} \quad \underset{w_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}$$

Uso la fórmula así

Muy mal

$$P_S(v) = \langle v\, w_1\rangle w_1 + \langle v\, w_2\rangle w_2$$

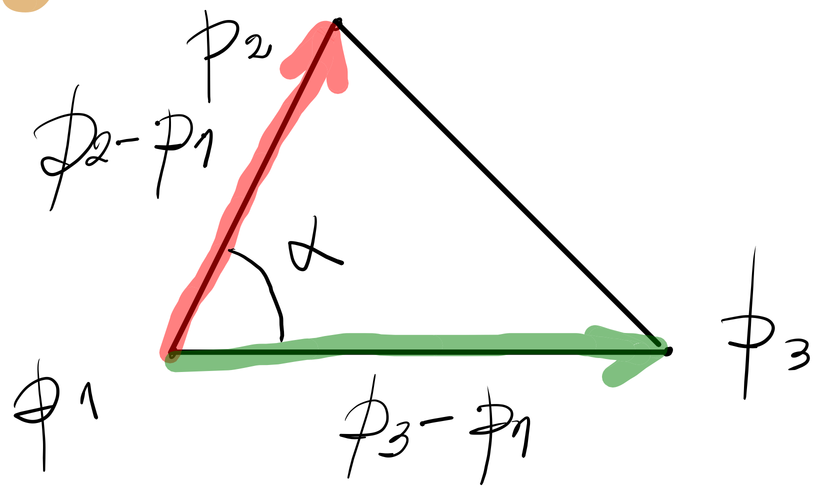
$$= (x+y)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + (y+z)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\ x+2y+z\\ y+z\end{pmatrix}$$

$$v - P_S(v) = \begin{pmatrix}-y\\ -x-y-z\\ -y\end{pmatrix} \notin S^\perp = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

3.4 Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Calcular el área del triángulo de vértices $p_1 = 6$, $p_2 = 2x(x+1) + 6$, $p_3 = 3x(x-1) + 6$.



$$\left(\|p_2 - p_1\| \, \|p_3 - p_1\| \operatorname{sen}\alpha\right) 1/2$$

$$p_2 - p_1 = 2x(x+1) = p$$

$$p_3 - p_1 = 3x(x-1) = q$$

$$\|\underbrace{p_2 - p_1}_{p}\|^2 = \langle p, p\rangle = \cancelto{0}{p(-1)\,p(-1)} + \cancelto{0}{p(0)\,p(0)} + p(1)\,p(1) = 4\cdot 4$$

$$\|p_2 - p_1\| = 4$$

$$\langle q, q\rangle = q(-1)\,q(-1) = 6\cdot 6 = 36 \qquad \|p_3 - p_1\| = 6$$

$$\cos\alpha = \frac{\langle p, q\rangle}{\|p\|\,\|q\|} = \frac{p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)}{\|p\|\,\|q\|} = 0$$

$\Rightarrow \alpha = \pi/2 \Rightarrow \Delta$ es rectángulo Área $= 1/2\, B \cdot h =$

$= 1/2 \cdot 4 . 6 = 12$

3.13 [*herramienta*] Sean $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $(\mathbb{R}^m, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ los $\mathbb{R}$-espacios euclídeos canónicos de dimensiones n y m, respectivamente, sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Por definición, resolver la ecuación $Ax = b$ por mínimos cuadrados significa determinar el conjunto $\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$ de todos los $x \in \mathbb{R}^n$ cuyas imágenes por A minimizan la distancia al vector b.

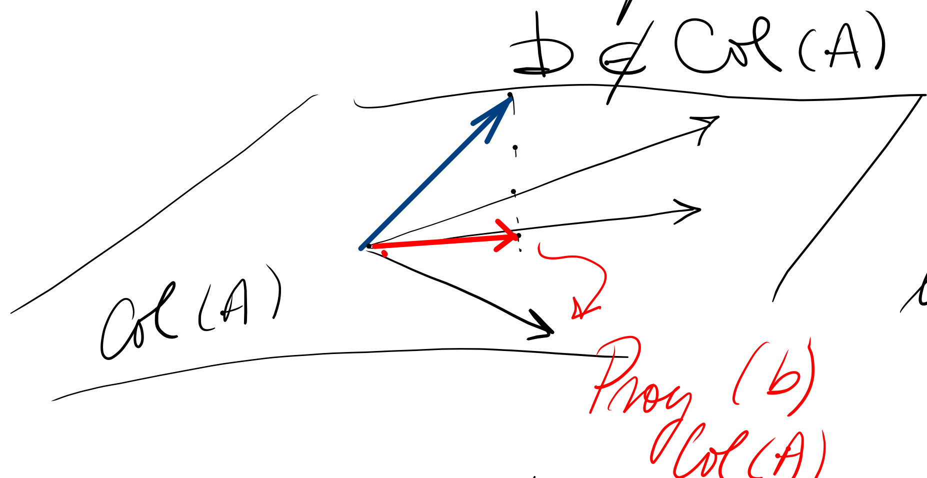
Cuadrados Mínimos pic

$Ax = b \in \mathbb{R}^m$ m ecuaciones n incógnitas

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$

El sistema es compatible si $b \notin Col(A)$

Sino será incompatible $\Rightarrow$ "aparece" cuadrados mínimos



De todos los vectores de $Col(A)$ el más cercano a b es $P_{Col(A)}(b)$

Cuando el sistema es incompatible resolver por cuadrados mínimos significa encontrar $\hat{x}$: $A\hat{x} = P_{Col(A)}(b)$

Ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$BON_{Col(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ Incompatible $\Rightarrow$ Busco $P_{Col(A)}(b)$

$Col(A) \rightarrow x - y + z = 0$

8 $$P_{Col(A)}\, b = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\+2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\4/3\\2/3\end{pmatrix}$$

$$b - P_{Col(A)}(b) \in (Col(A))^{\perp} \qquad b - P_{Col(A)}(b) = \begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix} \in (Col(A))^{\perp}$$

$\Rightarrow$ La solución por cuadrados mínimos es $\hat{x}$:

$$A\hat{x} = P_{Col(A)}(b) \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\hat{x} = \begin{pmatrix}2/3\\4/3\\2/3\end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_2 = 2/3$$

Busco $\hat{x}$: $\| b - \underbrace{A\hat{x}}_{\in Col(A)} \|$ sea la menor posible

El más cercano a b es su proyección

$\Rightarrow$ busco es $A\hat{x} = P_{Col(A)}\, b$

(**a**) Explicar por qué

9

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = P_{\mathrm{col}(A)}(b)\}.$$

De todos los vectores del subesp. $\mathrm{Col}(A)$ el más cercano a b es $P_{\mathrm{Col}(A)}(b)$

(**b**) Observar que $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = P_{\mathrm{col}(A)}(b)\} \neq \emptyset$. Motivo por el cual para cualquier $b \in \mathbb{R}^m$ existe al menos una solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$.

$\forall S \subset \mathbb{R}^m$ $P_S b$ existe

y $\mathrm{Col}(A)$ es subesp de $\mathbb{R}^m$

(**c**) Verificar que $\mathrm{nul}(A^T) = \mathrm{col}(A)^\perp$.

$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{gen}\{v_1, \dots, v_n\}$.

$A^T = \begin{pmatrix} — v_1 — \\ — v_2 — \\ \vdots \\ — v_n — \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

$A^T \cdot u = 0 \Rightarrow u \in \mathrm{nul}(A^T)$

$A^T u = \begin{pmatrix} \langle v_1, u\rangle \\ \langle v_2, u\rangle \\ \vdots \\ \langle v_n, u\rangle \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \langle v_i ; u\rangle = 0$ $u \perp v_i$ $\forall\, 1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow u \in (\mathrm{Col}(A))^\perp$

(**d**) Utilizando que $b - P_{\mathrm{col}(A)}(b) \perp \mathrm{col}(A)$, concluir que

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \{x \in \mathbb{R}^n : A^T Ax = A^T b\}.$$

Queremos que $b - A\hat{x} \in (\mathrm{Col}(A))^\perp$ $A\hat{x} = P_{\mathrm{Col}(A)}(b)$

$\Rightarrow$ Si $b - A\hat{x} \in (\mathrm{Col}(A))^\perp = \mathrm{nul}(A^T) \Rightarrow A^T(b - A\hat{x}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad A^T(b - A\hat{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^Tb = A^TA\hat{x} \Rightarrow$ compatible

$A^TA\hat{x} = A^Tb$ este sistema tiene solución.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad Ax = b$ incompatible

CASO no pones que multiplico ambos miembros por A^T

$A^TA\hat{x} = A^Tb \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$2x_1 + x_2 = 2$

$(x_1 + 2x_2 = 2)\, 2$ resto

$3x_2 = 2 \qquad x_2 = 2/3$

$2x_1 + 2/3 = 2 \qquad x_1 = 2/3$

(e) Verificar que $\text{nul}(A) = \text{fil}(A)^{\perp}$.

$A = \begin{pmatrix} - f_1 - \\ \vdots \\ - f_m - \end{pmatrix}$ $\quad f_i$ fila i de A

$Av = 0$

$v \in \text{nul}(A) \qquad Av = \begin{pmatrix} - f_1 - \\ \vdots \\ - f_m - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f_1\, v \rangle \\ \langle f_2\, v \rangle \\ \vdots \\ \langle f_m\, v \rangle \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v \perp f_i \ \forall$ fila de $A \Rightarrow$

$v \in (\text{Fil}(A))^{\perp}$ (2)

$\dim \text{nul}(A) = \dim (\text{Fil}(A))^{\perp}$ (1)

De (1) y (2)