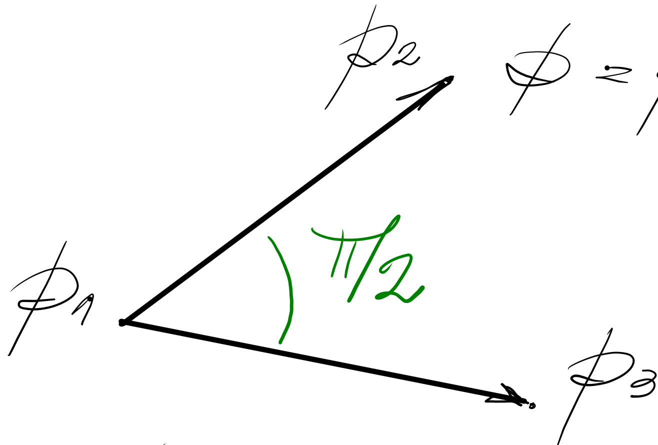
3.4 Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Calcular el área del triángulo de vértices $p_1 = 6$, $p_2 = 2x(x+1)+6$, $p_3 = 3x(x-1)+6$.

$p_1 = 6 \qquad p_2 = 2x(x+1)+6$

$p_3 = 3x(x-1)+6$



$p = p_2 - p_1 = 2x(x+1)$

$q = p_3 - p_1 = 3x(x-1)$

Área triángulo $\qquad \langle p, q\rangle = \|p\|\,\|q\|\cos\theta = 0$

$\Rightarrow p \perp q$ el triáng es rectángulo $\Rightarrow$ Área $= \dfrac{B \cdot h}{2}$

$= \dfrac{\|p\|\,\|q\|}{2} = \dfrac{4 \cdot 6}{2} = 12$

3.5 Sea $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo de dimensión 3 y sea

$$\mathcal{B} = \{u_i : i \in \mathbb{I}_3\} \subset \{u \in \mathbb{V} : \|u\| = 1\}$$

una base de $\mathbb{V}$ tal que $\|u_i + u_j\|^2 = 2 + \sqrt{3}$ y $\cancel{\|u_i - u_j\|^2 = 2 - \sqrt{3}}$ para $i \neq j$.

(**a**) Hallar la matriz del producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

a) $\|u_i + u_j\|^2 = \langle u_i + u_j ; u_i + u_j\rangle =$

$= \underbrace{\|u_i\|^2}_{1} + 2\underbrace{\langle u_i\, u_j\rangle}_{\sqrt{3}/2} + \underbrace{\|u_j\|^2}_{1} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow$

$(G_{\mathcal{B}})_{ij} = \langle u_i\, u_j\rangle$

$\langle u_i ; u_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ \sqrt{3}/2 & i \neq j \end{cases}$

$$\Rightarrow G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}$$

(**b**) Hallar la matriz $\Theta := [\arccos(\langle u_i, u_j\rangle)]_{\substack{i\in\mathbb{I}_3 \\ j\in\mathbb{I}_3}}$.

b) $i \neq j$ $\quad \cos\theta = \dfrac{\langle u_i\, u_j\rangle}{\|u_i\|\,\|u_j\|} =$

$= \sqrt{3}/2 \Rightarrow \theta = \pi/6$

$i = j$: $\quad \theta = 0$

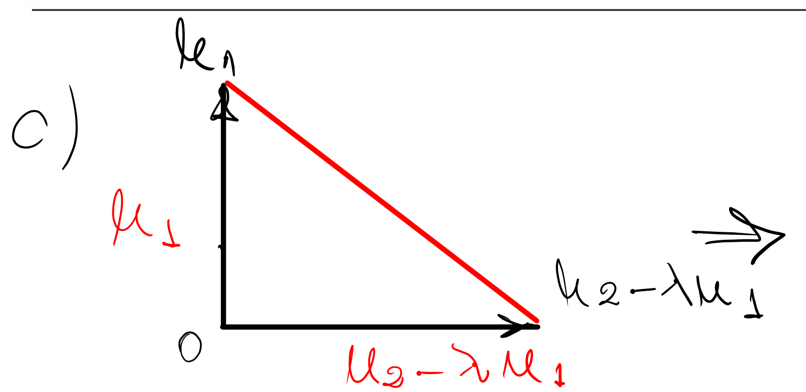
(**c**) Construir un triángulo rectángulo cuyos vértices sean $0, u_1, u_2 - \lambda u_1$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿Es único?

(**d**) Calcular el área del triángulo de vértices $0, u_1, u_2$.

(**e**) Calcular el área del triángulo de vértices u_1, u_2 y u_3.

---

c)

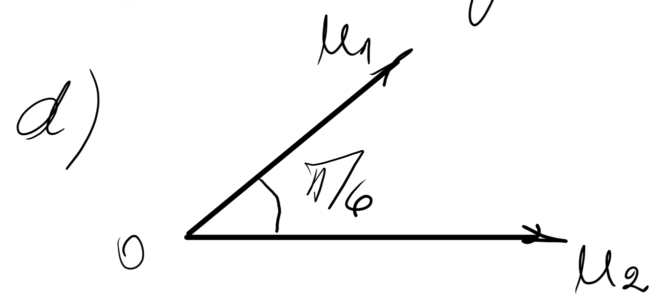


$\Rightarrow$

$\langle u_1 ; u_2 - \lambda u_1\rangle = 0 \Rightarrow$

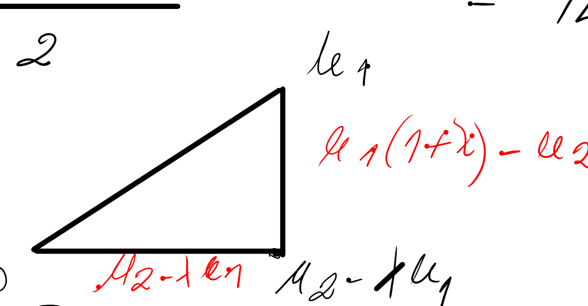
$\sqrt{3}/2 - \lambda = 0 \qquad \lambda = \sqrt{3}/2$

d)



Área $\Delta = \dfrac{\|u_1\|\,\|u_2\| \operatorname{sen} \pi/6}{2} = 1/4$

también podemos tomar

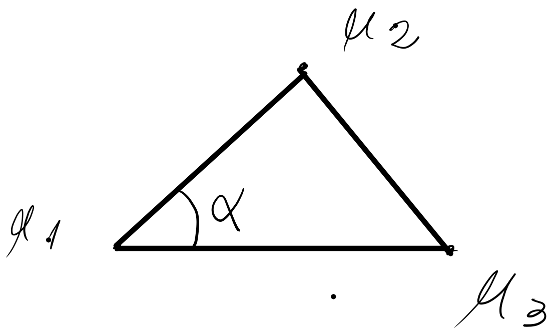


$\langle u_1(1+\lambda) - u_2 \;,\; u_2 - \lambda u_1\rangle = \sqrt{3}/2\,(1+\lambda) - \lambda(1+\lambda) - 1 + \lambda\sqrt{3}/2 = 0$

Hay 3 angulos en el Δ p/ elegir cual es $\pi/2$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\lambda) - \lambda(1+\lambda) - 1 + \lambda\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda - \lambda + \lambda^2 - 1 + \lambda\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\lambda^2 + (\sqrt{3}-1)\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 0 \qquad \left(1-\sqrt{3} \pm \sqrt{4-2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}\right)1/2 = \lambda_{1,2}$$



$$\frac{1}{2}\left[\|u_2-u_1\| \; \|u_3-u_1\| \operatorname{sen}\alpha\right]$$

$$\left(\langle u_2-u_1 ; u_2-u_1\rangle\right)^{1/2} = \left(1-\sqrt{3}+1\right)^{1/2} = \left(2-\sqrt{3}\right)^{1/2}$$

$$\text{Área} = 1/2\,(2-\sqrt{3})^{1/2}(2-\sqrt{3})^{1/2}\operatorname{sen}\alpha = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\langle u_2-u_1 , u_3-u_1\rangle}{\|u_2-u_1\| \; \|u_3-u_1\|} = \frac{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\sqrt{3}}$$

Taller 12

2. Dada la matriz $G = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, la base de $\mathbb{R}^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con matriz:

$$[T]_B^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad T\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

$T\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular $\left\| T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|$, $\left\| T\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \right\|$ y $\theta = \measuredangle \left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$ con el producto definido por G.

¿Son ortogonales? Calcular el área de $T\left(C\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \right) \right)$.

b) Hallar todos los $v \in \mathbb{R}^2$ tales que el triángulo determinado por 0, e_1 y v sea rectángulo en 0 e isósceles con el p.i. determinado por G.

a) $\left\| T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$ $\quad$ OJO $\quad$ $\langle x ; y \rangle = y^T G x$

$G_E = \begin{pmatrix} \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2 & \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle & \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|^2 \end{pmatrix}$

$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle^{1/2} = \left((1\ 0) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^{1/2} = 2$

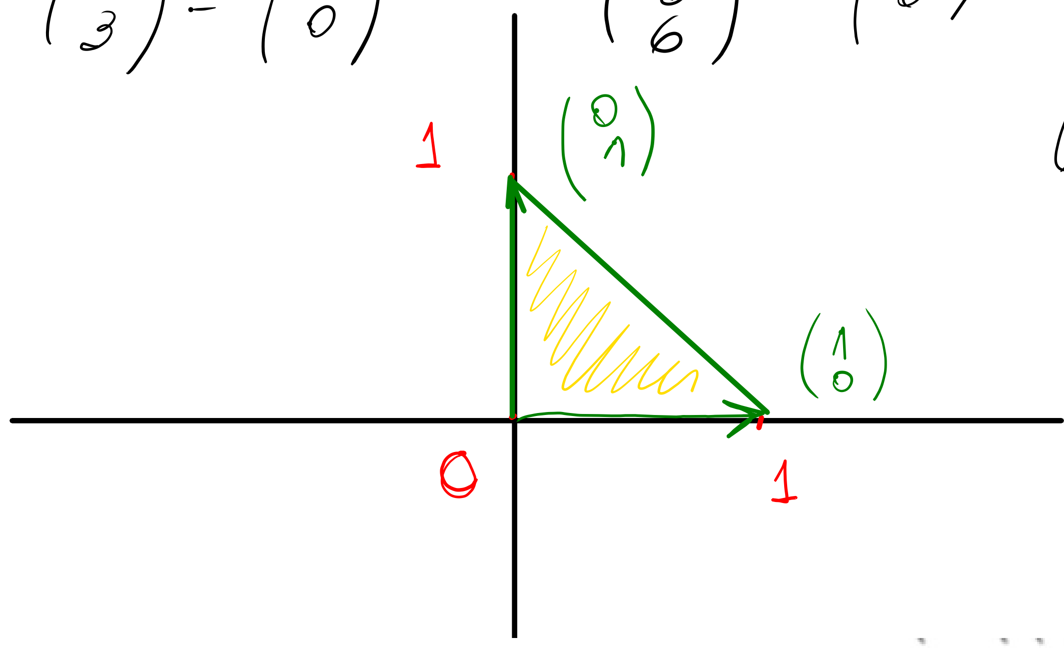
$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 1 = (G_{22})^{1/2}$

Ángulo entre $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ no son $\perp$ porque $(G_E)_{12} \neq 0$

$\cos\theta = \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{1}{2 \cdot 1} \Rightarrow \theta = \pi/3$

Calcular el área de $T\left(C\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\8\end{pmatrix}\right)\right)$.

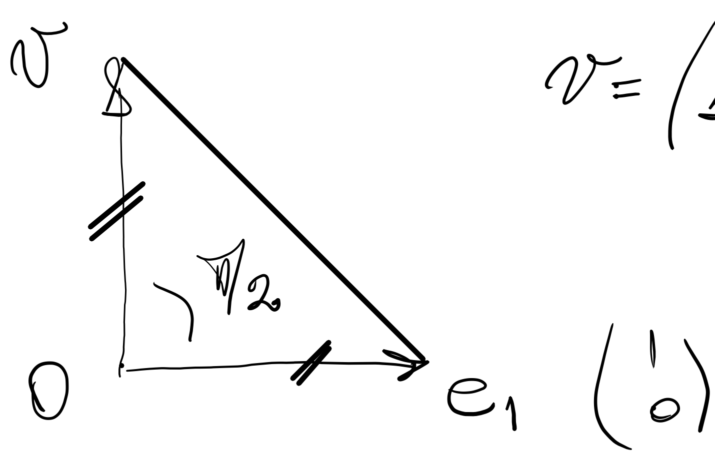
$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad T\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\quad T\begin{pmatrix}7\\8\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



$$\text{Área } \Delta = \left(\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\| \operatorname{sen}\theta\right) 1/2$$

$$= 2 \cdot 1 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}/2$$

b) Hallar todos los $v \in \mathbb{R}^2$ tales que el triángulo determinado por 0, e_1 y v sea rectángulo en 0 e isósceles con el p.i. determinado por G.



$$v=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = 4a+b=0$$
$$b=-4a$$

$$v = \alpha\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$$

$$v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \|v\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 2$$

$$\|v\|^2 = 4 = \alpha^2 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|^2 = \alpha^2 12$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 12$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 1/3$$

$$|\alpha| = \sqrt{3}/3 \Rightarrow \alpha = \pm \sqrt{3}/3$$

$$v = \pm \sqrt{3}/3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

3.7 [ver **Ejercicio 2.15**] En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera el subespacio

$$\mathbb{S} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T\right\}.$$

(a) Escribir cada vector $x \in \mathbb{R}^3$ en la forma $x = x_{\mathbb{S}} + x_{\mathbb{S}^\perp}$ con $x_{\mathbb{S}} \in \mathbb{S}$ y $x_{\mathbb{S}^\perp} \in \mathbb{S}^\perp$ y comprobar que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^\perp$.

(b) Hallar la matriz con respecto a la base canónica de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{S}$.

(c) Calcular la distancia al subespacio $\mathbb{S}$ de cada uno de los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(d) Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $P_{\mathbb{S}}(x) = \begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}^T$ cuya distancia a $\mathbb{S}$ sea igual a $\sqrt{3}$.

(e) Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $P_{\mathbb{S}}(x) = \begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}^T$ cuya distancia al origen sea igual a 5.

(f) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que sean equidistantes a los puntos $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}6 & 6 & 6\end{bmatrix}^T$.

S

plano $x + y + z = 0$

(a OJO)

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$S^\perp = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ pic

$x = x_S + x_{S^\perp}$

$\mathbb{R}^3 = S \oplus S^\perp$

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha + \gamma = x$
$\beta + \gamma = y$
$-\alpha - \beta + \gamma = z$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ -1 & -1 & 1 & z \end{array}\right) \checkmark \xrightarrow{F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & -1 & 2 & z + x \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 3 & x + y + z \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 3 & x+y+z \end{array}\right)$$

$$\gamma = \tfrac{1}{3}(x+y+z) \qquad \beta = y - \tfrac{1}{3}(x+y+z) =$$

$$= -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{3}z$$

$$\alpha = x - \gamma = x - \tfrac{1}{3}(x+y+z) = \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\left[\underbrace{(2x-y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (-x+2y-z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_S \in S} + \underbrace{(x+y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_{S^\perp} \in S^\perp}\right]$$

$$\underset{v}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underbrace{\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix}}_{P_S(v) \,\in S} + \underbrace{\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}}_{P_{S^\perp}(v) \,\in S^\perp}$$

$$P_S(v) = v_S : \quad v - v_S \in S^\perp$$

Base di $S^\perp$ $\left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\}$ $\Rightarrow$ $P_{S^\perp}(v) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}(x+y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

Matrices en base canónica

$$[P_S]_E^E = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$[P_S(e_1)]^E \quad \ldots$$

$$[P_{S^\perp}]_E^E = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$[P_S]_E^E + [P_{S^\perp}]_E^E = I \checkmark$$

3.9 Sea $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo de dimensión 3 y sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{V}$ cuya matriz de Gram es

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar la matriz con respecto a la base $\mathcal{B}$ de la proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathbb{S} = \operatorname{gen}\{v_1, v_2\}$.

(**b**) Hallar la proyección ortogonal de v_3 sobre el subespacio $\mathbb{S}$.

(**c**) Calcular la distancia de v_3 al subespacio $\mathbb{S}$.

(**d**) Hallar el conjunto de todos los $v \in \mathbb{V}$ cuya distancia a v_1 coincide con su distancia a v_2.

$S = \text{gen}\{v_1, v_2\}$ $\quad S^\perp$?

$S^\perp = \{v \in V : \langle v, v_1\rangle = \langle v, v_2\rangle = 0\}$

$v = a v_1 + b v_2 + c v_3$

$\langle v, v_1\rangle = ([v_1]^B)^T G_B [v]^B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \quad a + 1/2\, b + 1/3\, c = 0$$

$6a + 3b + 2c = 0$

$\langle v, v_2\rangle = 0$

$1/2\, a + 1/3\, b + 1/4\, c = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} F_2 - F_1$$

$6a + 4b + 3c = 0$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad b = -c$$

$6a + 3b - 2b = 0$

$a = -1/6\, b \qquad v = -1/6\, b v_1 + b v_2 - b v_3$

Elijo $b = 6 \Rightarrow S^\perp = \text{gen}\{-v_1 + 6v_2 - 6v_3\}$

$S = \text{gen}\{v_1, v_2\}$ $\qquad$ $S^\perp = \text{gen}\{v_1 - 6v_2 + 6v_3\}$

Puedo hacer $\text{proy}_{S^\perp} v$ $\qquad$ puedo buscar BON$_S$ y hacer $\text{proy}_S v$

$$v = a v_1 + b v_2 + c v_3 = \underbrace{\alpha v_1 + \beta v_2}_{\in S} + \underbrace{\gamma (v_1 - 6v_2 + 6v_3)}_{\in S^\perp}$$

$$\alpha + \gamma = a$$
$$\beta - 6\gamma = b$$
$$6\gamma = c$$

$\gamma = c/6$ $\qquad$ $\beta - c = b$

$\beta = b + c$

$\alpha = a - c/6$

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 = \underbrace{\left(a - \frac{c}{6}\right) v_1 + (b + c) v_2}_{\in S} + \underbrace{\frac{c}{6}(v_1 - 6v_2 + 6v_3)}_{\in S^\perp}$$

$$P_S(v) = P_S(a v_1 + b v_2 + c v_3) = \left(a - \tfrac{1}{6}c\right) v_1 + (b + c) v_2$$

$$[P_S]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad [P_{S^\perp}]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_S(v) = P_S(av_1 + bv_2 + cv_3) = (a - 1/6\, c)\, v_1 + (b+c)\, v_2$$

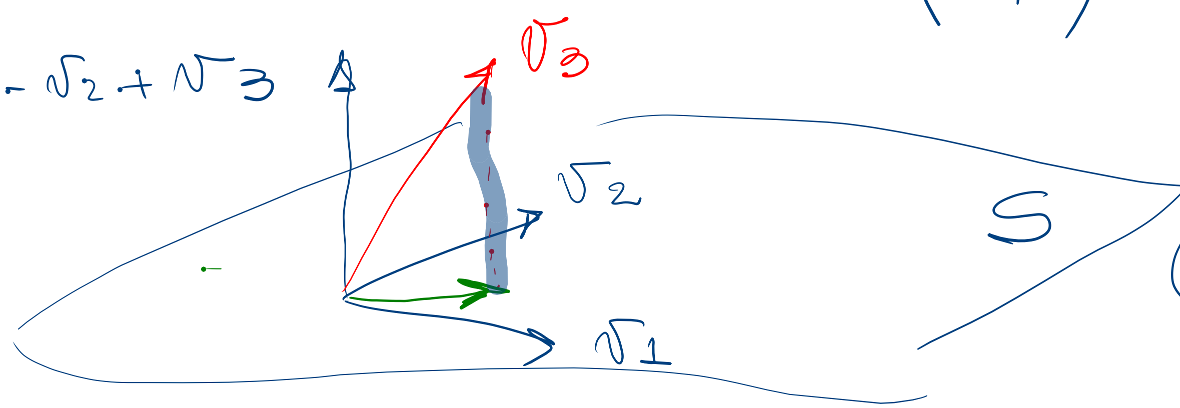
$$P_S(v_3) = -1/6\, v_1 + v_2 \qquad d(v_3, S) = \| P_{S^\perp} v_3 \|$$

$$a = b = 0 \quad c = 1$$

$$P_{S^\perp}(v_3) = 1/6\, v_1 - v_2 + v_3 = v_3 - P_S(v_3) \quad \checkmark$$

$$\| P_{S^\perp}(v_3) \|^2 = \begin{pmatrix} 1/6 & -1 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$6v_1 - v_2 + v_3$$



$$P_S(v_3) = -1/6\, v_1 + v_2$$

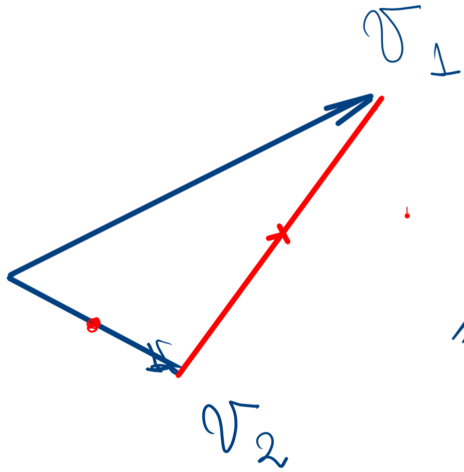
$$\begin{pmatrix} -1/6 & 1 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\| P_S(v_3) \|^2 + \| P_{S^\perp}(v_3) \|^2 = \underbrace{\| v_3 \|^2}_{1/5}$$

(**d**) Hallar el conjunto de todos los $v \in \mathbb{V}$ cuya distancia a v_1 coincide con su distancia a v_2.

(d) Hallar el conjunto de todos los $v \in \mathbb{V}$ cuya distancia a v_1 coincide con su distancia a v_2.

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}.$$



$$d(v, v_1) = d(v, v_2)$$

$$\|v - v_1\| = \|v - v_2\| \Rightarrow \|v - v_1\|^2 = \|v - v_2\|^2$$

$$v = a v_1 + b v_2 + c v_3 \Rightarrow \|(a-1) v_1 + b v_2 + c v_3\|^2 = \|a v_1 + (b-1) v_2 + c v_3\|^2$$

$$(a-1 \quad b \quad c)\, G \begin{pmatrix} a-1 \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a \quad b-1 \quad c)\, G \begin{pmatrix} a \\ b-1 \\ c \end{pmatrix}$$

$$(a-1)^2\, 1 + 1/2 \cdot 2\, (a-1)b + 1/3\; 2\, (a-1)c + 1/4\; 2\, bc + b^2\, 1/3 + c^2\, 1/5 =$$

$$= a^2\, 1 + (b-1)^2\, 1/3 + c^2\, 1/5 + a(b-1)\, 1/2 \cdot 2 + ac\, 1/3\, 2 + \frac{(b-1)c}{4}\, 2$$

$$\cancel{a^2} - 2a + 1 + \cancel{ab} - b + \frac{2}{3}\cancel{ac} - \frac{2}{3}c + \frac{1}{2}\cancel{bc} + \frac{1}{3}\cancel{b^2} + \cancel{\frac{1}{5}c^2} =$$

$$\cancel{a^2} + \frac{1}{3}(\cancel{b^2} - 2b + 1) + \cancel{\frac{1}{5}c^2} + \cancel{ab} - a + \frac{2}{3}\cancel{ac} + \frac{1}{2}\cancel{bc} - \frac{1}{2}c$$

$$-\cancel{2}a + 1 - \frac{2}{3}c = -\frac{2}{3}b + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}c - \cancel{a}$$

$$-a + \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}c + \frac{1}{2}c = -\frac{2}{3}$$

terminar ---