Autovalores y Autovectores.
Primera Parte.

Departamento de Matemática
FIUBA

Autovalores y autovectores de matrices y transformaciones lineales

Vamos a trabajar con matrices cuadradas, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y con endomorfismos $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$.

Recordar que las matrices están relacionadas con las transformaciones

Tanto si trabajamos con matrices, como si trabajamos con transformaciones lineales nos puede interesar encontrar las "rectas", direcciones, que permaneces invariantes.

Esto quiere decir que buscaremos los vectores v en $\mathbb{K}^n$ o en $\mathbb{V}$ (según estemos trabajando con una matriz o una t.l), no nulos, tales que:

$Av = \lambda\, v$. o en el caso de la t.l. $T(v) = \lambda v$, donde $\lambda \in \mathbb{K}$

Si estoy trabajando en Reales necesito autovalores λ reales

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}, X_0 \in \mathbb{K}^n$.
Muchas veces nos encontramos con sucesiones en $\mathbb{K}^n$:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= AX_0. \\
X_2 &= AX_1 \implies X_2 = A^2 X_0. \\
\vdots &= \vdots \\
X_n &= AX_{n-1} \implies X_n = A^n X_0.
\end{aligned}
$$

Si queremos anticipar el comportamiento de la sucesión para valores grandes de n, tenemos que tener una idea del comportamiento de las potencias de la matriz A.

Calcular la potencia n-ésima de una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ suele ser engorroso.
Las matrices cuadradas en las que es más sencillo calcular las distintas potencias naturales, son las matrices diagonales, a las que en general notamos como $D = diag(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n)$.

$$D = diag(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Es fácil verificar que entonces, $D^k = diag(\lambda_1^k,\ \lambda_2^k,\ \dots,\ \lambda_n^k)$

Otro caso no tan sencillo como este, pero sí mucho más sencillo que el general, es el de las matrices $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ que pueden *factorizarse* en la forma:

$A = Q\ D\ Q^{-1}$ con Q una matriz inversible y $D = diag(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n)$.

Pues, si $A = Q\ D\ Q^{-1}$:

$$A^2 = A \cdot A = Q\ D\ \overbrace{(Q^{-1}Q)}^{I}\ D\ Q^{-1} = Q\ D^2\ Q^{-1}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = Q\ D\ Q^{-1}Q\ D\ Q^{-1}\ Q\ D\ Q^{-1}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = Q\ D\ (Q^{-1}Q)\ D\ (Q^{-1}\ Q)\ D\ Q^{-1} = Q\ D^3\ Q^{-1}$$

En general entonces, si $n \in \mathbb{N}$:

No siempre es posible esta factorización

$$A = Q\ D\ Q^{-1} \Longrightarrow A^n = Q\ D^n\ Q^{-1}$$

Otro caso no tan sencillo como este, pero sí mucho más sencillo que el general, es el de las matrices $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ que pueden *factorizarse* en la forma:
$A = Q\ D\ Q^{-1}$ con Q una matriz inversible y
$D = diag(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n)$.
Pues, si $A = Q\ D\ Q^{-1}$:

Hoja repetida

$$A^2 = A \cdot A = Q\ D\ (Q^{-1}Q)\ D\ Q^{-1} = Q\ D^2\ Q^{-1}$$
$$A^3 = A \cdot A \cdot A = Q\ D\ Q^{-1}Q\ D\ Q^{-1}\ Q\ D\ Q^{-1}$$
$$A^3 = A \cdot A \cdot A = Q\ D\ (Q^{-1}Q)\ D\ (Q^{-1}\ Q)\ D\ Q^{-1} = Q\ D^3\ Q^{-1}$$

En general entonces, si $n \in \mathbb{N}$:

$$A = Q\ D\ Q^{-1} \Longrightarrow A^n = Q\ D^n\ Q^{-1}$$

Veamos entonces qué relación tiene que existir entre la matriz A, la matriz Q y la matriz D para que esto sea posible.
Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz inversible y $D = diag(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
Vamos a explicitar las columnas de la matriz Q:
$Q = [\underbrace{V_1}_{C_1(Q)}|\ \underbrace{V_2}_{C_2(Q)}|\ \dots|\underbrace{V_n}_{C_n(Q)}],\ V_i \in \mathbb{K}^{n\times 1}$.

OBS:
$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es LI
Sino $\nexists\ Q^{-1}$

Entonces:

$$A = Q\ D\ Q^{-1} \iff A\ Q = Q\ D$$

$AQ = QD\underbrace{Q^{-1}Q}_{I}$

Veamos entonces qué relación tiene que existir entre la matriz A, la matriz Q y la matriz D para que esto sea posible.
Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz inversible y $D = diag(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
Vamos a explicitar las columnas de la matriz Q:
$Q = [V_1|\ V_2|\ \dots|V_n],\ V_i \in \mathbb{K}^{n\times 1}$.

Entonces:

$$A = Q\ D\ Q^{-1} \iff A\ Q = Q\ D$$

$$A[V_1|\ V_2|\ \dots|V_n] = [V_1|\ V_2|\ \dots|V_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Ahora sólo tenemos que recordar que en el producto de dos matrices $\text{Col}_i(A\,B) = A\; Col_i(B)$, para cada i.
Entonces si en (1), igualando columna por columna, tenemos:

$$A\text{Col}_1(Q) = A\;V_1 = [V_1|\;V_2|\;\ldots|V_n]\text{Col}_1(D) = [V_1|\;V_2|\;\ldots|V_n]\begin{bmatrix}\lambda_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

$$A\;V_1 = [V_1|\;V_2|\;\ldots|V_n]\begin{bmatrix}\lambda_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = \lambda_1 V_1$$

$1 \leq i \leq n$

Si repetimos esto para cada columna tendremos:

$\forall i \quad Av_i = \lambda_i v_i$

$$A\mathrm{Col}_i(Q) = A\ V_i = [V_1|\ V_2|\ \ldots|V_n]\mathrm{Col}_i(D) = [V_1|\ V_2|\ \ldots|V_n]\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AV_i = \lambda_i V_i$$

entonces hemos encontrado la relación que tienen que cumplir las matrices Q y D para que $A = Q\ D\ Q^{-1}$

$$\boxed{\mathrm{A}= \mathrm{Q\ D\ Q}^{-1} \Leftrightarrow AV_i = \lambda_i V_i,\ \mathrm{donde} V_i = \mathrm{Col}_i(Q)} \quad (2)$$

Entonces, otra vez aparece esta relación entre la matriz A, un vector de $\mathbb{K}^n$ y un escalar.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Definición: Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, un **autovalor** de A es un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq 0$ que cumple $Av = \lambda v$.
Se dice que v es **autovector** de A. asociado a dicho λ

Calculo de autovalores y autovectores La primera pregunta entonces es cómo encontramos los autovalores y autovectores de una matriz A. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de A, por definición existe $v \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ tal que $Av = \lambda v$

$\in \mathbb{K}^{n \times n}$ $\in \mathbb{K}^{n \times n}$ $\in \mathbb{K}^n$ $\in \mathbb{K}^n$

$(\lambda I - A)v$ $\in \mathbb{K}^n$

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (\lambda v - Av) = 0_{\mathbb{K}^n} \text{ y } v \neq 0_{\mathbb{K}^n}.$$

$$(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{v} = 0_{\mathbb{K}^n} \text{ y } \mathrm{v} \neq 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Esto quiere decir que el sistema lineal homogéneo: $(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{X} = 0_{\mathbb{K}^n}$ tiene infinitas soluciones pues sabemos que hay una solución que es no trivial.

El sistema es compatible por ser homogéneo necesito que sea indeterminado.

Entonces, $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de $A \Leftrightarrow (\mathrm{\lambda I - A})$ no es inversible $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \det(\mathrm{\lambda I - A}) = 0$. Esta ecuación es un polinomio de grado n en λ .
Además, v es autovector de A asociado al autovalor
$\lambda \Leftrightarrow (\mathrm{\lambda I - A})\mathrm{v} = 0_{\mathbb{K}^\mathrm{n}}$

Cálculo de autovalores y autovectores para $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

- Buscamos $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\det(\mathrm{\lambda I - A}) = 0$.
- Para cada λ, los autovectores de A asociados a λ son $v \neq 0_{\mathbb{K}^n} / (\mathrm{\lambda I - A})\mathrm{v} = 0_{\mathbb{K}^\mathrm{n}} \Leftrightarrow \mathrm{v} \in \mathsf{Nul}(\mathrm{\lambda I - A})$.

Trabajar con A-λI es equivalente a trabajar con λI - A

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

- Con la definición dada el resultado de (2), se puede enunciar diciendo :

> $A = Q\ D\ Q^{-1}$ **si cada columna de Q es un autovector de A asociado al autovalor λ, correspondiente en la matriz diagonal D, además Q inversible implica que existe una base de $\mathbb{K}^n$ formada por autovectores de A.**

- El conjunto de autovectores de A asociados a cada autovalor λ_0 son los vectores no nulos, solución del sistema homogéneo $(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{X} = 0_{\mathbb{K}^n}$. Se llama **Autoespacio de A asociado a** λ_0 al subespacio $\mathrm{Nul}(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})$ y se nota:

Autoespacio también se denomina subespacio propio asociado a λ

$$S_{\lambda=\lambda_0} = \{v \in \mathbb{K}^n / Av = \lambda_0 v.\}$$

$$S_{\lambda=\lambda_0} = \{\text{autovectores de } A \text{ asociados a } \lambda_0\} \cup \{0_{K^n}.\}$$

Recordar que el nulo no es autovector

Ejemplo: Dadas las siguientes matrices en $R^{2\times 2}$:

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Encuentre autovalores y autovectores. ¿Alguna de ellas puede *factorizarse* en la forma $Q\ D\ Q^{-1}$?

Resolución:

$\boxed{\text{Para } A_1:}$

Para encontrar sus autovalores, buscamos $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_1) = 0$.

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_1) = \begin{vmatrix} (\lambda - 1) & -1 \\ -1 & (\lambda - 1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow |\lambda - 1| = 1 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 1$ o $\lambda - 1 = -1$.

$\boxed{\lambda = 2 \text{ o } \lambda = 0}$ $\quad m_2 = 1 \quad\quad m_0 = 1$

Busquemos ahora los autovectores asociados a cada uno de estos autovalores.

Para encontrar los autovectores asociados a $\lambda = 2$ buscamos el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo determinado por la matriz que queda de reemplazar λ por 2 en $(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_1)$.

$S_{\lambda=2} = \mathrm{Nul}(2\mathrm{I} - \mathrm{A}_1)$. o sea las soluciones del sistema homogéneo determinado por la matriz que queda al reemplazar λ por 2 en $(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_1)$.

Ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$S_{\lambda=2}$: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2+F_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2$. $S_{\lambda=2} = \mathrm{gen}\{[1\ 1]^T\}$

Busquemos ahora $S_{\lambda=0}$. Otra vez, tenemos que buscar las soluciones de un sistema homogéneo que, en este caso, queda definido por la matriz:

Si el autovalor es 0 el autoespacio es el Nul(A)

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow x_1 = -x_2,\ S_{\lambda=0} = \mathrm{gen}\{[-1\ \ 1]^T\}.$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}}_{v} \underbrace{=}_{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{0}_{\lambda} . \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}}_{v}$

Para contestar si existen Q, matriz inversible y $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$ tal que $A_1 = Q\ D\ Q^{-1}$ sólo tenemos que recordar que para que esto sea posible las columnas de Q deben ser autovectores de A, obviamente l.i. pues Q debe ser una matriz inversible, rg(Q=2). En este caso vemos que esto es posible pues, por ejemplo, los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ son autovectores de A linealmente independientes, el primero asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$ y el segundo asociado a $\lambda_2 = 0$, entonces si construimos las matrices:

$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se cumple que:

Si elijo $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Obviamente, esta factorización no es única.

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

Hay infinitas factorizaciones

$\boxed{\text{Para } A_2.}$

Como antes buscamos sus autovalores: $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_2) = 0$. Calcular $\det(\lambda I - A) = 0$ es equivalente a calcular el $\det(A - \lambda I) = 0$

$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_2) = \begin{vmatrix} (\lambda - 2) & -3 \\ 3 & (\lambda - 2) \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = -9$ (no tiene soluciones reales).

$(\lambda - 2)^2 = -9 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 3i$ o $\lambda - 2 = -31$.

$\boxed{\lambda_1 = 2 + 3i \text{ y } \lambda_2 = 2 - 3i \Rightarrow A \text{ no tiene autovalores reales.}}$

Por lo tanto **no existen** Q y D en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A = Q\,DQ^{-1}$.

$\boxed{\text{Para } A_3.}$

Buscamos la ecuación que determina los autovalores $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_3) = 0$.

$$A_3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda I - A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_3) = \begin{vmatrix} (\lambda - 2) & -3 \\ 0 & (\lambda - 2) \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

$$m_2 = 2$$

En este caso obtuvimos un único autovalor, pues $\lambda = 2$ es una raíz doble del polinomio anterior.

Busquemos los autovectores de A asociados a $\lambda = 2$:

Buscamos $\mathrm{Nul}(2\mathrm{I} - \mathrm{A}_3)$:

$$(2I - A_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$S_{\lambda=2}$: $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = 0$ $S_{\lambda=2} = \mathrm{gen}\{[1\ 0]^T\}$

$$\begin{cases} 0x_1 - 3x_2 = 0 \\ 0.x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases} \quad x_2 = 0 \ ✓$$

Entonces, en este caso tampoco conseguimos *factorizar* la matriz A en la forma $A = Q\,DQ^{-1}$ pues no existen dos autovectores l.i. para construir la matriz Q.

$$(\lambda I - A)v = 0$$

Si pongo cualquier λ que no verifique

$\det(\lambda \mathrm{I} - A) = 0$ la única solución es la trivial y no sirve.

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Definiciones

En todo que sigue, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Se dice que A es **diagonalizable** si existe $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible y $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $A = Q\ D\ Q^{-1}$.

Por lo desarrollado al comienzo del episodio:
A es diagonalizable $\iff$ existe una base de K^n formada por autovectores de A. Con los autovectores puedo armar la Q.

Se llama **polinomio característico de** A, al polinomio de grado n, $P_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})$.

Los autovalores de A son las raíces de su polinomio característico.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Si λ_0 es autovalor de A, se llama **multiplicidad algebraica** de λ_0, a la multiplicidad de λ_0 como raíz del polinomio característico. (Se nota: m_λ.)

Recordemos: λ_0 es una raíz de multiplicidad m de P, si
$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m q(\lambda)$, con $q(\lambda_0) \neq 0$. q es un polinomio

Si λ_0 es autovalor de A, se llama **multiplicidad geométrica** de λ_0, a la dimensión de su autoespacio asociado. Notamos: $\mu_\lambda = \dim(\mathrm{Nul}(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A}))$.

En el ejemplo $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $p_\lambda(A) = (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow$

$m_2 = 2$ raíz doble $S_{\lambda=2} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ dim $S_{\lambda=2} = 1$

$\mu_2 = 1$ $\mu_2 < m_2 \Rightarrow A$ no es diagonalizable

Si para un ava $\mu_\lambda < m_\lambda$ entonces A no es diagonalizable

Observaciones

$\dim S_\lambda \geq 1$
$\forall \lambda$
$\mu_\lambda \leq m_\lambda$

a. Si $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ es autovalor de $A \Rightarrow \mu_\lambda \geq 1$.
(Trivial por definición de autovalor y autovector)

b. Si $\lambda = 0$ es autovalor de $A \Rightarrow S_{\lambda=0} = \text{Nul}(A)$.
Es inmediato pues $S_{\lambda=0} = \text{Nul}(0\mathrm{I} - \mathrm{A}) = \text{Nul}(-\mathrm{A}) = \text{Nul}(\mathrm{A})$.

c. Si A es inversible $\lambda \neq 0, \forall\ \lambda$ autovalor de A.
Pues A es inversible $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n \Leftrightarrow \dim(\text{Nul}(A)) = 0 \Leftrightarrow$
$\lambda = 0$ no es autovalor de A.

d. Sea $\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k\}$ un conjunto de autovectores de A asociados respectivamente a los autovalores $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k$, tal que $(\lambda_i \neq \lambda_j \forall\ i \neq j) \Rightarrow \{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k\}$ es l.i.

$S_{\lambda_1} \oplus S_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus S_{\lambda_k}$

Demostración:

Vamos a demostrarlo por el ABSURDO.
Supongamos que el conjunto $\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k\}$ no es l.i $\Rightarrow$ será l.d.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Por el lema demostrado en el **Episodio 3.** de espacios vectoriales, sabemos que si el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es l.d, existe un primer vector v_m, $1 < m \leq k$ de manera tal que $\{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}\}$ es l.i. y $\{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m\}$ es l.d. (Sabemos que $m > 1$ pues $\{v_1\}$ es l.d. sólo si $v_1 = 0_{\mathbb{K}^n}$ y esto es absurdo pues v_1 es autovector de A, por lo tanto $v_1 \neq 0_{\mathbb{K}^n}$) $\Rightarrow \{v_1\}$ es LI
Esto quiere decir que existen $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{K}$ tal que:

$$v_m = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{m-1} v_{m-1}. \quad (3)$$

Multiplico por A de ambos lados.

$$Av_m = A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{m-1} v_{m-1}).$$

$$Av_m = \alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 + \cdots + \alpha_{m-1} Av_{m-1}.$$

$$\lambda_m v_m = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_{m-1} v_{m-1}. \quad (4)$$

Si en (3), multiplicamos ambos miembros por λ_m, obtenemos:

$$\lambda_m v_m = \lambda_m \alpha_1 v_1 + \lambda_m \alpha_2 v_2 + \cdots + \lambda_m \alpha_{m-1} v_{m-1}. \quad (5)$$

Igualamos (4) y (5):

$$\alpha_1\lambda_1 v_1+\alpha_2\lambda_2 v_2+\cdots+\alpha_{m-1}\lambda_{m-1}v_{m-1} = \lambda_m\alpha_1 v_1+\lambda_m\alpha_2 v_2+\cdots+\lambda_m\alpha_{m-1}v_{m-1}$$

$$\underbrace{\alpha_1}_{0}\overbrace{(\lambda_1-\lambda_m)}^{\neq 0}v_1+\underbrace{\alpha_2}_{0}\overbrace{(\lambda_2-\lambda_m)}^{\neq 0}v_2+\cdots+\underbrace{\alpha_{m-1}}_{0}\overbrace{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)}^{\neq 0}v_{m-1} = 0_{\mathbb{K}^n}$$

Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}\}$ es un conjunto l.i. los escalares de esta última combinación lineal deben ser todos nulos:

Ejemplo $\{v_1, v_2, v_3\}$ Supongo v_3 es cl de $\{v_1, v_2\}$

v_i son autovectores asociados a $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

$(*)\ v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ $\qquad A v_3 = A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \Rightarrow \lambda_3 v_3 = \alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2$

$\lambda_3 v_3 = \lambda_3(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$ $\qquad - \quad \lambda_3 v_3 = \alpha_1 \lambda_3 v_1 + \alpha_2\lambda_3 v_2$

$0 = \underbrace{\alpha_1}_{0}(\lambda_1-\lambda_3)v_1 + \underbrace{\alpha_2}_{0}(\lambda_2-\lambda_3)v_2$

$\{v_1, v_2\}$ es LI $\Rightarrow$

$\lambda_1 \neq \lambda_3 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \qquad \lambda_2 \neq \lambda_3 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow v_3 = 0$ $(*)$ ABS pues v_3 es autovector

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

$$\begin{cases} \alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_m)}_{\neq 0} = 0 \\ \alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_m)}_{\neq 0} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m-1} \underbrace{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)}_{\neq 0} = 0 \end{cases}$$

Luego:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0 \Rightarrow v_m = 0_{\mathbb{K}^m}$$

ABSURDO, pues $v_m \neq 0_{\mathbb{K}^m}$ por ser un autovector de A.El absurdo proviene de suponer que $\{v_1, \ v_2, \ \dots, \ v_k\}$ es l.d.
Entonces $\{v_1, \ \dots, v_k\}$ es l.i.

$$\boxed{\textbf{A autovalores distintos corresponden autovectores l.i.}}$$

Ya tenemos un resultado importante:

Si una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tiene n autovalores distintos en $\mathbb{K} \Rightarrow A$ es diagonalizable.

Pues, como acabamos de demostrar, si A tiene n autovalores distintos, a autovalores distintos corresponden autovectores linealmente independientes, entonces existen n autovectores l.i. que formaran una base de K^n. Entonces podremos construir matrices Q y D tales que $A = Q\ D\ Q^{-1}$.✓

Propiedades sobre autovalores de $A \in K^{n \times n}$ (para la práctica):

1 - $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$. (Se consideran los autovalores con repetición.) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_m$
- $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i$. (Se consideran los autovalores con repetición.)
- Si λ autovalor de A asociado al autovector v:
  - $(\lambda^k + t)$ es autovalor de $(A^K + t\mathrm{I})$ asociado al autovector v.
  - Si A es inversible $\Rightarrow \frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1} asociado al autovector v.

$Av = \lambda v \quad A^k v = \lambda^k v$

$Iv = v \quad tIv = tv$

- Si λ autovalor de $A \Rightarrow \lambda$ es autovalor de A^T.(Los autovectores no tienen porque ser los mismos.)

$Av = \lambda v$

$A^{-1} A v = A^{-1} \lambda v$

$v = \lambda A^{-1} v$

$\frac{1}{\lambda} v = A^{-1} v$

1 Si A es diagonalizable

$A = QDQ^{-1} \quad \det(A) = \det(QDQ^{-1}) = \det Q \det D \det Q^{-1} =$

$= \underbrace{\det Q \det Q^{-1}}_{1} \det D = \det D = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Entonces nos queda por responder qué pasa si A, no tiene a autovalores distintos. Eso significa que el polinomio característico tiene raíces de multiplicidad mayor que 1.

Ejemplo:

Sean $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ matrices en $\mathbb{C}^{3\times 3}$. ¿Son diagonalizables A y B ?

Resolución:

Empecemos estudiando la matriz A:

El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal.

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \begin{vmatrix} (\lambda-5) & -1 & 0 \\ 0 & (\lambda-5) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1) \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-5)^2$$

Los autovalores de A son $\lambda_1 = -1$, de multiplicidad algebraica $m_{\lambda_1} = 1$ y $\lambda_2 = 5$, de multiplicidad algebraica $m_{\lambda_2} = 2$.

Busquemos sus autovectores.

$\boxed{\lambda_1 = -1}$

$S_{\lambda=1}$ queda determinado por la matriz del sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} -6 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = 0 = x_1 \Rightarrow S_{\lambda=-1} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\boxed{\lambda_2 = 5}$

$S_{\lambda=5}$ queda determinado por la matriz del sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = 0 \text{ y } x_2 = 0 \Rightarrow S_{\lambda=5} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Entonces, la matriz A **no es diagonalizable** pues sólo podemos conseguir dos direcciones linealmente independientes definidas por sus autovectores. No existe una base de $\mathbb{C}^3$ formada por autovectores de A.

$m_5 = 2 > \mu_5 = 1$

Repitamos el estudio para la matriz B: $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$P_B(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{B}) = \begin{vmatrix} (\lambda - 2) & -3 & 0 \\ -3 & (\lambda - 2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 5) \end{vmatrix}$$

$$P_B(\lambda) = (\lambda - 5)[(\lambda - 2)^2 - 9] = (\lambda - 5)((\lambda - 2) - 3)((\lambda - 2) + 3)$$

$$P_B(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 5)^2$$ raíz doble

Los autovalores de B son $\lambda_1 = -1$, de multiplicidad algebraica $m_{\lambda_1} = 1$ y $\lambda_2 = 5$, de multiplicidad algebraica $m_{\lambda_2} = 2$.
Busquemos sus autovectores.

$$\boxed{\lambda_1 = -1}$$

$S_{\lambda=-1}$ queda determinado por la matriz del sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = 0, \text{ y } x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow$$

$$S_{\lambda=-1} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$\boxed{\lambda_2 = 5}$$

$S_{\lambda=5}$ queda determinado por la matriz del sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2, \; x_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow S_{\lambda=5} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$m_5 = \mu_5 \Rightarrow$ A es diagonalizable

Entonces la matriz B **es diagonalizable** pues existe una base de $\mathbb{C}^3$ formada por autovectores de B. Por ejemplo:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Asociados a $\lambda = 5$ (ambos) $\Rightarrow$ no importa el orden de las columnas

Podemos construir $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

↳ ave asoc al ava -1

aves asociados al ava 5

Y entonces se cumple que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

OJO Respetar el orden!

Cuando los autovalores "se repiten" como raíces del polinomio característico no podemos asegurar, sólo con ese dato, si la matriz resultará diagonalizable o no. Necesitamos, estudiar algo más para poder predecirlo.

Seguimos el jueves

Calculo el determinante de (λI-A) con los autovalores que obtuve busco los autovectores.

Si λ es raíz del polinomio las multiplicidades coinciden por lo tanto esas raices no son el problema.

Si λ es raíz de orden mayor a 1 del polinomio hay que ver la dimensión del subespacio propio asociado. Si coincide con el m de la raíz entonces no hay problema. Hacemos lo mismo para cada raíz multiple.

Si el polinomio tiene todas raíces simples en K entonces es diagonalizable.

$\mu_\lambda \geq 1$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Semejanza de matrices

Definición: Sean A y B dos matrices en $\mathbb{K}^{n\times n}$, se dice que B es **semejante** a A si existe $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible, tal que $B = Q\,A\,Q^{-1}$.
Se nota: $B \sim A$.

Algunas consideraciones inmediatas:

- Con esta definición, las **matrices diagonalizables** son **matrices semejantes a una matriz diagonal .**
- La relación de semejanza es **reflexiva** , $A \sim A$ pues $A = \mathrm{I}\;\mathrm{A}\;\mathrm{I}$ y también **simétrica** pues $B \sim A \Leftrightarrow \exists Q$ tal que $B = Q\,A\,Q^{-1} \Leftrightarrow Q^{-1}\,B\,Q = A \Rightarrow A \sim B$.

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

- La relación de semejanza es **transitiva**:
Si $B \sim A$ y $C \sim B \Rightarrow C \sim A$.
Aplicando la definición, $B \sim A \Leftrightarrow B = Q\ A\ Q^{-1}$ y $C \sim B \Leftrightarrow$
$C = H\ B\ H^{-1} = H\ Q\ A\ Q^{-1}\ H^{-1} = (H\ Q)\ A\ \underbrace{(Q^{-1}\ H^{-1})}_{(H\ Q)^{-1}}$.

$C = (H\ Q)\ A\ (H\ Q)^{-1} \Rightarrow C \sim A.\checkmark$

- Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial de dimensión n y B y B' son bases de $\mathbb{V}$, para toda t.l. $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ se cumple que
$[T]_{B'}^{B'} = M_B^{B'}[T]_B^B M_{B'}^B = M_B^{B'}[T]_B^B(M_B^{B'})^{-1}$

Todas las representaciones matriciales de T con respecto a una misma base son semejantes entre sí.

- Si $B \sim A \Rightarrow A$ y B tienen los mismos autovalores con la misma multiplicidad algebraica y geométrica.

  Demostración:

  a. $B \sim A \Leftrightarrow B = Q\ A\ Q^{-1}$, entonces
     $P_B(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{B}) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{Q\ A\ Q}^{-1})$
     $P_B(\lambda) = \det(\lambda QQ^{-1} - Q\ A\ Q^{-1}) = \det(Q(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{Q}^{-1})$
     $P_B(\lambda) = \det(Q)\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})\det(\mathrm{Q}^{-1})$
     $P_B(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \mathrm{P_A}(\lambda)$
     Como A y B tienen el mismo polinomio característico entonces tienen los mismos autovalores con la misma multiplicidad algebraica.
  b. Sea λ_0 autovalor de las matrices semejantes A y B, por cada v_0 autovector de A asociado al autovalor λ_0, $w_0 = Qv_0$ es autovector de B asociado a λ_0 y viceversa, por cada w_0 autovector de B asociado a λ_0 el vector $Q^{-1}w_0$ es autovector de A asociado a λ_0.
     Si v_0 es autovector de A asociado a $\lambda_0 \Rightarrow Av_0 = \lambda_0 v_0$.

Como $B = Q\ A\ Q^{-1} \Rightarrow B\ Q = Q\ A \Rightarrow B\ Qv_0 = Q\ Av_0 \Rightarrow$ $B\ (Qv_0) = Q\ (\lambda_0 v_0) = \lambda_0(Qv_0) \Rightarrow Qv_0$ es autovector de B asociado al autovalor λ_0.De la misma manera, si suponemos w_0 autovector de B asociado a λ_0 tenemos que

$$Bw_0 = Q\ A\ Q^{-1}w_0$$

$$\lambda_0 w_0 = Q\ A\ Q^{-1}w_0 \Rightarrow Q^{-1}(\lambda_0 w_0) = A\ (Q^{-1}w_0)$$

$$A\ (Q^{-1}w_0) = \lambda_0(Q^{-1}w_0)$$

Por definición de autovector $(Q^{-1}w_0)$ es autovector de A asociado a λ_0. Por lo tanto hemos demostrado que la correspondencia de autovectores de A asociados a λ_0 es uno a uno con los autovectores de B asociados a λ_0, entonces la dimensión de los respectivos autoespacios es igual.Por lo tanto la multiplicidad geométrica de λ_0 como autovalor de A es igual a la multiplicidad geométrica de λ_0 como autovalor de B.

Vamos a demostrar ahora que si λ_0 es autovalor de A siempre se cumple que su multiplicidad algebraica, m_{λ_0}, es mayor igual que su multiplicidad geométrica ,μ_{λ_0}.
Si λ_0 es autovalor de $A \Rightarrow \boxed{\mu_{\lambda_0} \leq m_{\lambda_0}}$.

Demostración:

Sea A matriz de $n \times n$, y supongamos λ_0 autovalor de A con multiplicidad algebraica, $m_{\lambda_0} = m$ y multiplicidad geométrica, $\mu_{\lambda_0} = k$.
Como $m_{\lambda_0} = m \Rightarrow P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda), Q(\lambda_0) \neq 0$.
Como $\mu_{\lambda_0} = k = \dim(S_{\lambda_0})$ entonces existe una base de S_{λ_0}, $B_{S_{\lambda_0}} = \{v_1, \ldots, v_k\}$, podemos extender esta base a una base de todo el espacio $\mathbb{K}^n$, $B = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$. Sea $Q = [v_1| \ldots |v_k|v_{k+1}| \ldots |v_n]$, claramente Q es inversible pues sus columnas forman una base de $\mathbb{K}^n$.

Calculemos

$$AQ = A[v_1|\dots|v_k|v_{k+1}|\dots|v_n]$$

Si explicitamos este producto columna a columna:

$$AQ = [Av_1|\dots|Av_k|Av_{k+1}|\dots|Av_n]$$

Reemplazamos $Av_i = \lambda_0 v_i,$ para cada $i = 1, \dots, k$.

$$AQ = [\lambda_0 v_1|\dots|\lambda_0 v_k|w_1|\dots|w_{n-k}]$$

Si ahora multiplicamos por Q^{-1} m. a m, tenemos:

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1}[\lambda_0 v_1|\lambda_0 v_2|\dots|\lambda_0 v_k|w_1|\dots|w_{n-k}]$$

Como $Q^{-1}Q = \mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{v_i} = \mathrm{e_i}$, entonces:

$$Q^{-1}A\,Q = [\lambda_0 Q^{-1}v_1|\dots|\lambda_0 Q^{-1}v_k|Q^{-1}w_1|\dots|Q^{-1}w_{n-k}]$$

$$Q^{-1}A\,Q = [\lambda_0 e_1|\dots|\lambda_0 e_k|u_1|\dots|u_{n-k}]$$

Conocemos algunas características del aspecto de esta matriz:

$$Q^{-1}A\,Q = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

Podemos expresar por bloques esta matriz de $n \times n$:

$$Q^{-1} A\, Q = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_0 \mathrm{I_k} & B \\ \hline 0 & E \end{array}\right]$$

Donde B es una matriz de $(k \times (n-k))$, E es una matriz de $(n-k) \times (n-k)$ A es semejante a la matriz $H = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_0 \mathrm{I_k} & B \\ \hline 0 & E \end{array}\right]$, pues cumple con la definición. Y por lo visto, sabemos que :

$$\boxed{\mathrm{P}_A(\lambda) = P_H(\lambda)} \ (6)$$

Veamos entonces qué podemos anticipar sobre el polinomio característico de H.

$$P_H(\lambda) = \det\left(\lambda \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I_k} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I_{n-k}} \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c} \lambda_0 \mathrm{I_k} & B \\ \hline 0 & E \end{array}\right]\right)$$

$$P_H(\lambda) = \det\left(\left[\begin{array}{c|c} (\lambda - \lambda_0)\mathrm{I_k} & -B \\ \hline 0 & (\lambda \mathrm{I_{(n-k)}} - \mathrm{E}) \end{array}\right]\right)$$

$$P_H(\lambda) = \det\left((\lambda - \lambda_0)\mathrm{I_k}\right)\det\left(\lambda \mathrm{I_{(n-k)}} - \mathrm{E}\right)$$

$$P_H(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k R(\lambda), \quad \text{con } \mathrm{gr}(R) = n - k.$$

Entonces ahora podemos reemplazar en (6), lo que conocemos de los polinomios $P_A(\lambda)$ y $P_H(\lambda)$:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k R(\lambda) = P_H(\lambda) \ (7)$$

Recordemos que en esta igualdad $m = m_{\lambda_0}$, multiplicidad algebraica de λ_0, $k = \mu_{\lambda_0}$, multiplicidad geométrica de λ_0 y $Q(\lambda_0) \neq 0$. Esta condición de Q nos asegura que $(\lambda - \lambda_0)$ no divide al polinomio Q.

Entonces, de la igualdad (7):

$$(\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k R(\lambda)$$

Entonces $(\lambda - \lambda_0)^k$, divide a la expresión que está a la izquierda de la igualdad:
$(\lambda - \lambda_0)^k$ divide a $(\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda)$
y como $(\lambda - \lambda_0)$ no divide a $Q \Rightarrow (\lambda - \lambda_0)^k$ divide a $(\lambda - \lambda_0)^m$
Entonces: $k \leq m$.
O sea para cada autovalor de A se cumple:

$$\boxed{\mu_\lambda = \text{multip. geométrica} \leq m_\lambda = \text{multip. algebraica.}\checkmark}$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Volvamos al problema de encontrar una **condición necesaria y suficiente** para poder asegurar que una matriz de $A \in K^{n\times n}$ es diagonalizable.

- Para poder asegurar que una matriz A es diagonalizable, tenemos que poder afirmar que existe una base de autovectores de K^n formada por autovectores de A.
- Ya sabemos que a autovalores distintos corresponden autovectores linealmente independientes. Como acabamos de demostrar que la multip geométrica de un autovalor es siempre menor o igual que su multiplicidad algebraica, sabemos que si un autovalor es raíz simple del polinomio característico obtendremos como autoespacio asociado a él un subespacio de dimensión 1.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

- Entonces para construir una base de autovectores asociados a una matriz A, tendrá que cumplirse que si algún autovalor tiene multiplicidad algebraica mayor que uno podamos encontrar asociados a él tantos autovectores l.i. como su multiplicidad algebraica, esto es lo mismo que pedir que la dimensión de su autoespacio asociado sea igual a su multiplicidad algebraica. O sea se debe cumplir que **multiplicidad algebraica= multiplicidad geométrica** para cada autovalor de A.

Ejemplo:

Dada en $\mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & (\alpha-2) & 0 \\ 0 & (\alpha+2) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales A resulta diagonalizable.

Resolución:

Empezamos, como siempre por calcular los autovalores de la matriz:

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \begin{vmatrix} (\lambda-2) & (-\alpha+2) & 0 \\ 0 & (\lambda-\alpha-2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-3) \end{vmatrix}$$

$P_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-\alpha-2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda = 3,$ o $\lambda = 2,$ o $\lambda = \alpha+2.$

Si $\alpha+2 \neq 3$ y $\alpha+2 \neq 2 \Rightarrow A$ tendrá tres autovalores distintos y , como a autovalores distintos corresponden autovectores l.i, la matriz resultará diagonalizable.

O sea ya sabemos qué pasa si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq 0$.
Podemos asegurar que:

$\boxed{\text{Si } \alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \Rightarrow A \text{ resulta diagonalizable.}}$

Ahora entonces, tenemos que ver qué sucede si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$.

$\boxed{\alpha = 0}$

Si $\alpha = 0 \Rightarrow$ ya sabemos que los autovalores de A serán $\lambda_1 = 2$ autovalor de multiplicidad algebraica 2 y $\lambda_2 = 3$ autovalor de multiplicidad 1.
Para saber si la matriz A resulta diagonalizable basta con calcular la multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 2$. Si su multiplicidad geométrica coincide con la algebraica será diagonalizable y sino no.

El autoespacio asociado a $\lambda_1 = 2$ es el subespacio de las soluciones del sistema homogéneo determinado por la matriz $2\mathrm{I} - \mathrm{A}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = 0 \text{ y } x_2 = 0 \Rightarrow \dim(S_\lambda = 2) = 1 \neq 2 =$$

Entonces si $\alpha = 0$ la matriz A **no es diagonalizable** pues la multiplicidad algebraica $\neq$ multiplicidad geométrica para $\lambda = 2$.

$\boxed{\alpha = 1}$

Si $\alpha = 1$ ya sabemos que los autovalores de A serán $\lambda_1 = 2$ de multiplicidad algebraica 1 y $\lambda_2 = 3$ de multiplicidad algebraica 2. Entonces, para saber si A es diagonalizable tenemos que chequear si coinciden la multiplicidad algebraica con la multiplicidad geométrica en este caso.

Analizamos las ecuaciones que definen al autoespacio $S_{\lambda=3}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz tiene rango 1, así que su nulo tiene dimensión 2. Entonces para $\lambda = 3$, en este caso, la multiplicidad geométrica = multiplicidad algebraica. Concluimos entonces que A es diagonalizable si $\alpha = 1$.

Entonces: $\boxed{A \textbf{ es diagonalizable } \forall\, \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}}$

Definición: Un subespacio $S \subseteq \mathbb{K}^n$ es un **subespacio invariante** de A (o **A-invariante**) si para todo vector $v \in S$ se cumple que $Av \in S$.

Comentarios:

a. Todo autoespacio de A es un subespacio A-invariante.

b. La recíproca no es cierto por supuesto.
Por ejemplo, tomemos la matriz B que analizamos en un ejemplo anterior.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

B es diagonalizable, sus autovalores son $\lambda = 5$, de multiplicidad algebraica y geométrica 2, y $\lambda = -1$ autovalor simple.

$$S_{\lambda=5} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=-1} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Claramente, $S_{\lambda=5}$ y $S_{\lambda=-1}$ son A-invariantes.

No son los únicos, tomemos por ejemplo el subespacio

$$S_1 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow S_1 \text{ es A-invariante.}$$

Pues si $v \in S_1,\ v = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$Av = \alpha_1(-1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2(5) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in S_1.$$

Definición: Un subespacio $S \subseteq \mathbb{V}$ es un **subespacio invariante** de $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ transformación lineal (o **T-invariante**) si para todo vector $v \in S$ se cumple que $T(v) \in S$.

Comentarios:

a. El núcleo de una transformación lineal T es un subespacio T-invariante.

b. $\text{Im}(T)$ es un subespacio invariante de T.

c. En toda rotación de un plano alrededor de un eje ortogonal a él, el plano es un subespacio T-invariante.