

1. Sean S_1 y S_2 los subespacios de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ definidos por

$$S_1 = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : X \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X \right\} \text{ y } S_2 = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Hallar una base de $S_1 + S_2$ que contenga una base de S_1 y una base de S_2 .

Hay que encontrar una base de $S_1 \cap S_2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$b = c \quad \checkmark$$

$$a + b = d \quad (1)$$

$$d = a + c \quad (2)$$

$$c + d = b + d \quad (3) \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \quad F_2 - F_1$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$b = c \quad \checkmark$$

$$a = -b + d$$

$$c = b \quad \checkmark$$

$$a + b - d = 0$$

$$\begin{pmatrix} -b + d & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A \in S_2 \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$S_1 \cap S_2 \rightarrow$$

$$a = -b + a \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{S_1 \cap S_2}_{\text{Base de } S_1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Siendo $S_1 + S_2$ tiene dimensión 3

$$\text{Base}_{S_1 + S_2} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\notin S_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Base } S_2 \notin S_1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Sea $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son las bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ definidas por

$$\mathcal{B}_1 = \{[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T, [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T, [1 \ -1 \ 0 \ 1]^T, [2 \ 2 \ 1 \ 1]^T\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{[1 \ 1 \ 1]^T, [1 \ 1 \ 0]^T, [1 \ -1 \ 1]^T\}.$$

Hallar la imagen por T del subespacio $S = \text{gen}\{[2 \ 0 \ 1 \ 1]^T, [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T\}$.

$v \in S$ si:

$$v = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T(v) = \alpha T \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para con ser la imagen de v_1 y v_2 para usar la matriz necesito $[v_1]_{\mathcal{B}_1}$ y $[v_2]_{\mathcal{B}_1}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2F_3 - F_2 \\ 2F_4 - F_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - F_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[v_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[v_2]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T(v_1)]_{\mathcal{B}_2} = [T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} [v_1]_{\mathcal{B}_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[T(v_2)]^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T(v_2) = 0 \quad T(v_1) = 1w_1 + 1w_2 + 2w_3$$

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$T(S) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \underset{w_1}{[1 \ 1 \ 1]^T}, \underset{w_2}{[1 \ 1 \ 0]^T}, \underset{w_3}{[1 \ -1 \ 1]^T} \right\}.$$

$$C_{B_2}^E [T]_{B_1}^{B_2} = [T]_{B_1}^E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_E^E = C_{B_2}^E [T]_{B_1}^{B_2} C_E^{B_1} \cdot \frac{1}{(C_{B_1}^E)^{-1}}$$

3. Sea $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 + C_2 = C_3$$

$$\text{Nu}(T) \neq \{0\}$$

donde $\mathcal{E}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}$ es la base de $\mathbb{R}_2[x]$ definida por $\mathcal{B} = \{1+x+x^2, x, 1\}$.

Hallar la preimagen por T del vector $v = [2 \ 2 \ 2]^T$.

$$\phi \in \mathbb{R}_2[x] : T(\phi) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} [\phi]_{\mathcal{B}} = [T(\phi)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} [\phi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} [\phi]^B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

* $C_1 + C_2 = C_3$

Obs * $\Rightarrow$ La solución no es única

$$[\phi]^B_{particular} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[\phi]^B_{homog} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow [\phi]^B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ 1+x+x^2; x; 1 \right\}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \alpha (1+x+x^2+x-1) + 2 = \alpha (2x+x^2) + 2$$

no es subespacio

La respuesta no es subespacio es la preimagen del $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Si me piden la preimagen de $S = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

La respuesta sería $[\phi]^B = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

la preimagen sería $\phi(x) = 2a + b(x^2 + 2x)$

un subespacio $\text{gen} \{ 2; x^2 + 2x \}$

Hallar la preimagen del $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$[T]_B^E [P]^B = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a + c = 2$$

$$b + c = 2$$

$$a + c = 1$$

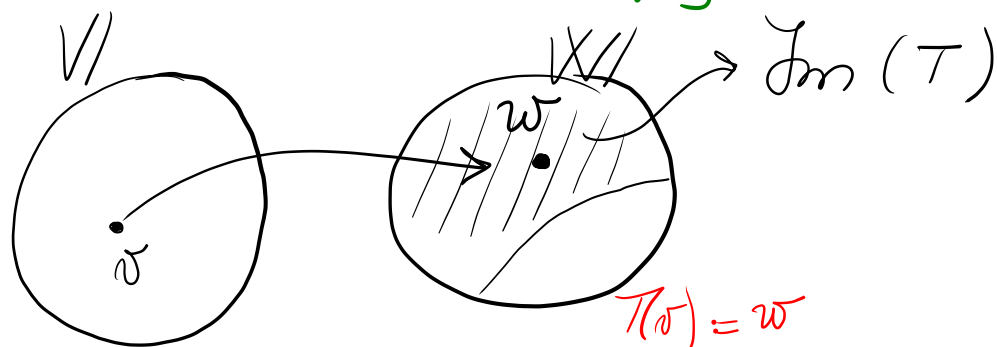
Incompatible $\Rightarrow$ preimagen $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\emptyset$

$$[T]_B^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{Im}(T)$$

y si pido la preimagen

$$S = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \text{Rta} = \text{Nul}(T) = \text{gen} \{ x^2 + 2x \}$$

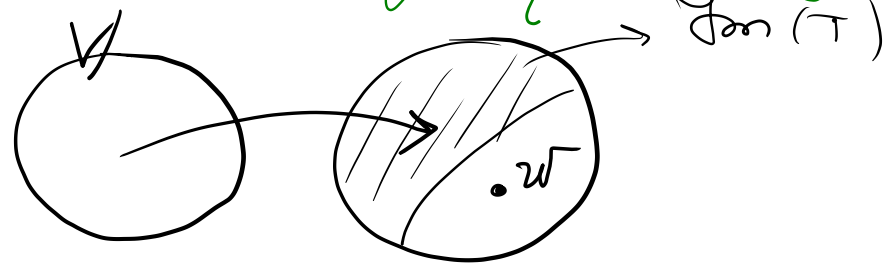


$$w \in \text{Im}(T) \Rightarrow T(v + \alpha u) = w$$

$$u \in \text{Nul}(T)$$

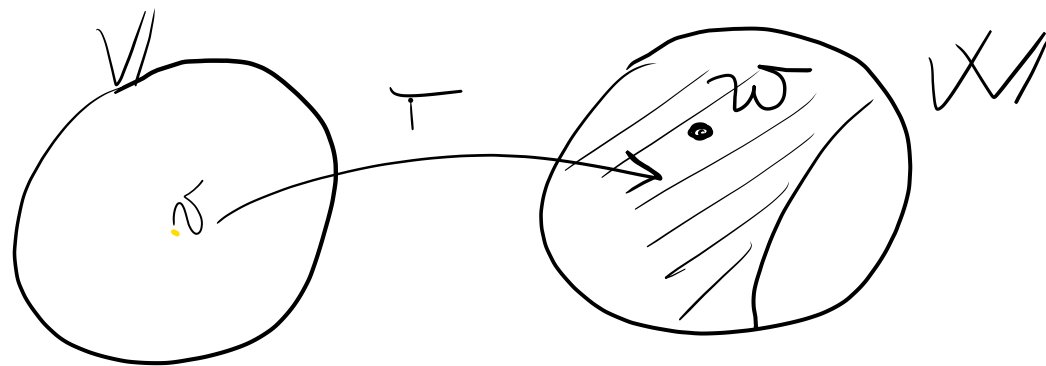
preimagen w es
 única (si) si $\text{Nul}(T) = \{0\}$
 Infinitas $\text{Nul}(T) \neq \{0\}$
 (un vector) + $\text{gen Nul}(T)$

En ningún caso es subespacio



$$w \notin \text{Im}(T) \Rightarrow \text{Preimagen de } w \emptyset$$

$$\nexists v \in V : T(v) = w$$



$$w \in \text{Im}(T)$$

$$T(v) = w$$

$$T(\alpha v) = \alpha w$$

La preimagen de $\text{gen}\{w\}$ es un subespacio de dimensión 1 si $\text{Im}(T) = \{0\}$ sino la preimagen es un subesp. $\oplus \text{Im}(T)$ es subespacio

Si $w \notin \text{Im}(T)$



Preimagen de $\text{gen}\{w\}$ es $\text{Im}(T)$

4. Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Sean $S = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = 0\}$ y $P_S : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la proyección ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ sobre S . Hallar todos los $q \in \mathbb{R}_2[x]$ tales que $P_S(q) = x - x^2$ cuya distancia a S es $\sqrt{3}$.

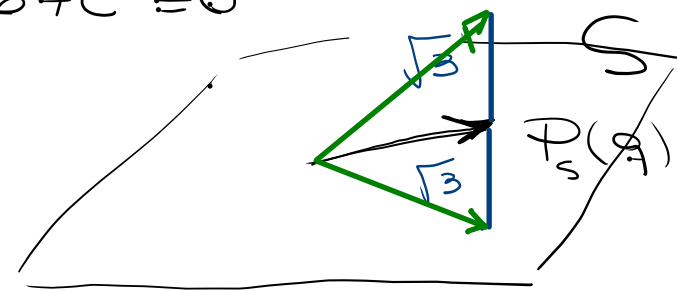
$$S = \text{gen}\{1-x^2, x-x^2\}$$

$$S^\perp = \text{gen}\{x(x-1)\}$$

$$a + bx + cx^2 = \phi(x) \quad \phi(1) = 0 = a + b + c = 0$$

$$a + bx + (-a-b)x^2 = \phi(x) \in S$$

$$h(x) \perp (1-x^2) \quad h(x) \perp (x-x^2)$$



$$h(x) = a + bx + cx^2 \perp (1-x^2) \quad 0 = \langle h(x); 1-x^2 \rangle = a + b \cdot 0 + c(-1)$$

$$h(x) \perp (x-x^2)$$

$$\langle h(x) (x-x^2) \rangle = a \cdot 0 + b \cdot 1 + c(-1) = 0$$

$$a = c$$

$$b = c$$

$$S^\perp = \text{gen} \{ 1+x+x^2 \}$$

$$\Rightarrow g = \underbrace{x-x^2}_{\text{Proj}_{(S)}(g)} + \underbrace{\alpha(1+x+x^2)}_{\text{Proj}_{S^\perp} g}$$

$$d(g, S) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \|P_{S^\perp} g\| = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \langle \alpha(1+x+x^2); \alpha(1+x+x^2) \rangle = 3 = |\alpha|^2 \cdot 3 \Rightarrow$$

$$|\alpha| = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

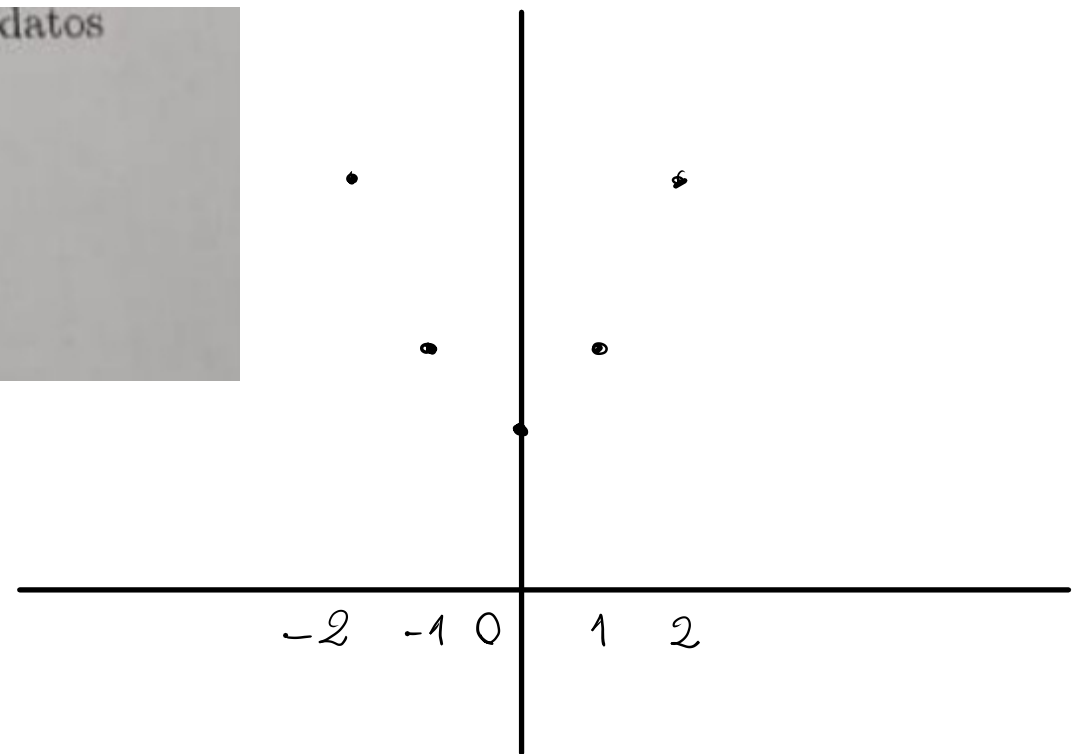
$$g_1 = x - x^2 + (1+x+x^2) = 1+2x$$

$$g_2 = x - x^2 - 1 - x - x^2 = -1 - 2x^2$$

5. Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

x	-2	-1	0	1	2
y	5	3	2	3	5

mediante una parábola $y = ax^2 + bx + c$.



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$5 = a(-2)^2 + b(-2) + c$$

$$3 = a(-1)^2 + b(-1) + c$$

$$2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

$$5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$

$$A^T A x = A^T b$$

$$34a + 10c = 46$$

$$10a + 5c = 18$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$A \quad x = b$

Es incompatible

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} \quad b = 0$$

$$\begin{array}{l} 34a + 10c = 46 \\ 10a + 5c = 18 \end{array}$$

$$34F_2 - 10F_1$$

$$34a + 10c = 46$$

$$70c = 152$$

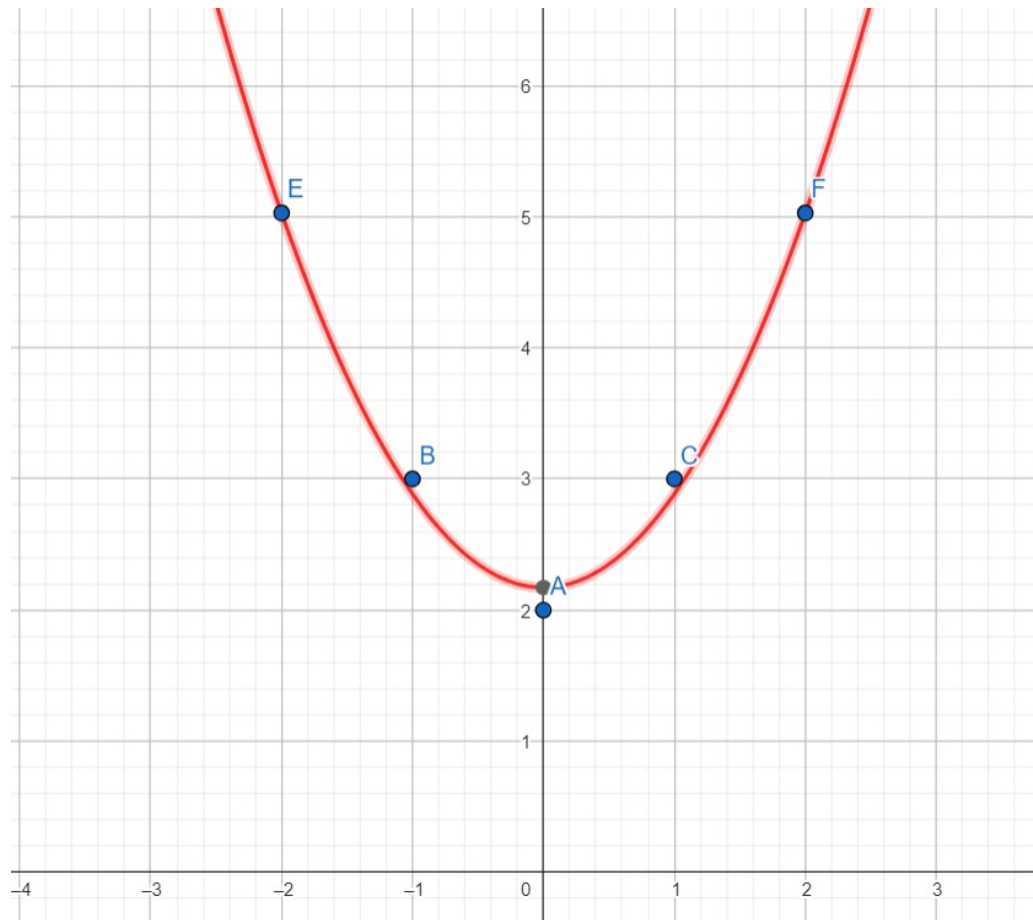
$$c = \frac{152}{70} \approx 2,17$$

$$a \approx 0,71$$

$$34a = 46 - 10 \cdot \frac{152}{70} = 46 - \frac{152}{7}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{34} \left(\frac{322 - 152}{7} \right) = \frac{170}{34 \cdot 7}$$

$$= \frac{170}{17 \cdot 14} = \frac{5}{7}$$



$$y = \frac{5}{7}x^2 + \frac{152}{70}$$

1. Se considera la matriz $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hallar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga una base del espacio filas de A y una base del espacio columnas de A .

2. Sea $V = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A^T = A\}$ el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de las matrices simétricas de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ y sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow V$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{E}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}$ es la base de V definida por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Determinar la imagen por T del triángulo de vértices $v_1 = [0 \ 0 \ 0]^T$, $v_2 = [1 \ 1 \ 1]^T$ y $v_3 = [1 \ -2 \ 1]^T$.

3. Sea Π la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$ en la dirección de la recta generada por $[1 \ -1 \ 2]^T$. Hallar la preimagen por Π del subespacio $S = \text{gen} \{[2 \ 0 \ -1]^T\}$.

4. Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Calcular el área del triángulo de vértices $p_1 = 6$, $p_2 = 2x(x+1) + 6$, $p_3 = 3x(x-1) + 6$.

5. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera el subespacio

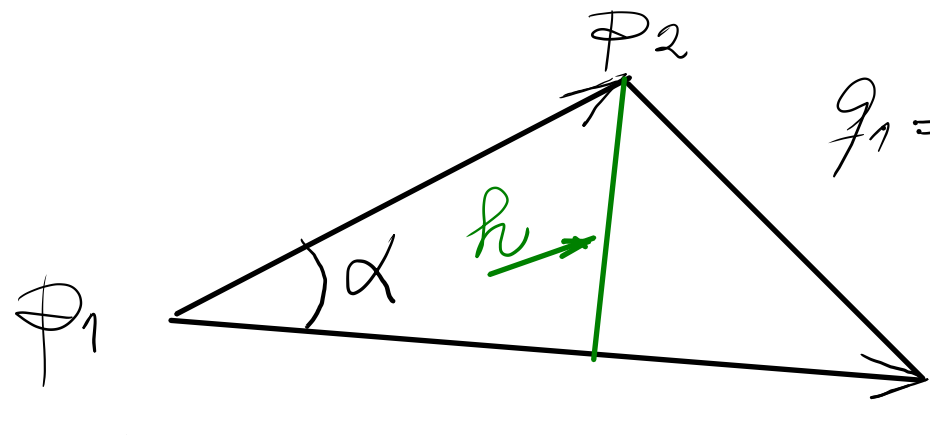
$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Sea $P_S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre S . Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $P_S(x) = [2 \ -1 \ 2]^T$ cuya distancia al origen sea igual a 5.

4. Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Calcular el área del triángulo de vértices $p_1 = 6$, $p_2 = 2x(x+1) + 6$, $p_3 = 3x(x-1) + 6$.



$$g_1 = \overrightarrow{p_1 p_2} = p_2 - p_1 = 2x(x+1)$$

$$g_2 = \overrightarrow{p_1 p_3} = 3x(x-1)$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{p_1 p_2}\| \|\overrightarrow{p_1 p_3}\| \sin \alpha$$

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \|g_1\| \|g_2\| \cos \alpha \rightarrow \text{desp. } \cos \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \cancel{g_1(-1)} g_2(-1) + \cancel{g_1(0)} g_2(0) + \cancel{g_1(1)} g_2(1) = 0 \quad \alpha = \pi/2$$

Triángulo
Rectángulo

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \|g_1\| \|g_2\| = \frac{1}{2} 2 \cdot 6 = 6 \quad \checkmark$$

5. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera el subespacio

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 - 2x_1 - 2x_3 = 0\}.$$

$$\Rightarrow S^\perp = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Sea $P_S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre S . Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $P_S(x) = [2 \ -1 \ 2]^T$ cuya distancia al origen sea igual a 5.

$$S = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \forall v \in \mathbb{R}^3 \quad v = \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in S} + \underbrace{\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\in S^\perp}$$

$$x = x_S + x_{S^\perp} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\in S} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \|x\|^2 = \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2}_{\text{Pitagoras}} + |\gamma|^2 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$d(x, 0) = \|x\| \Rightarrow d^2(x, 0) = \|x\|^2 = 25 \quad \underline{25 = 9 + |\gamma|^2 \cdot 9}$$

$$x = \begin{pmatrix} 2+\gamma \\ -1-2\gamma \\ 2-2\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \|x\|^2 = (2+\gamma)^2 + (-1-2\gamma)^2 + (2-2\gamma)^2 =$$

$$= \cancel{\gamma^2} + \cancel{4\gamma} + 4 + 1 + \cancel{4\gamma} + 4\gamma^2 + 4 - \cancel{8\gamma} + 4\gamma^2 = 25$$

$$\underline{9\gamma^2 + 9 = 25}$$

$$9\gamma^2 = 16$$

$$\gamma = \pm 4/3$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \pm \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$