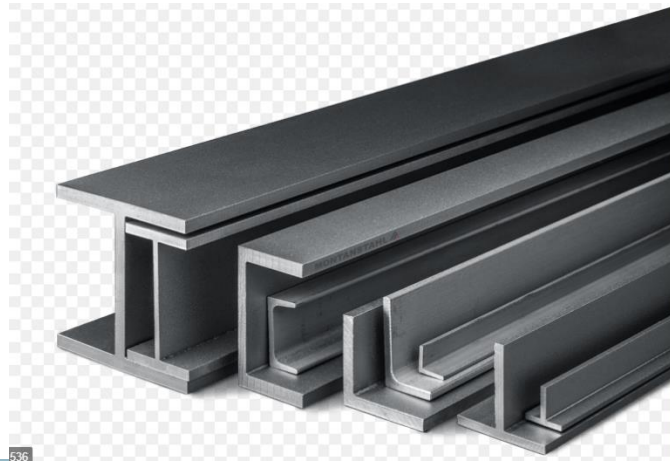


Estática



Geometría de las Superficies



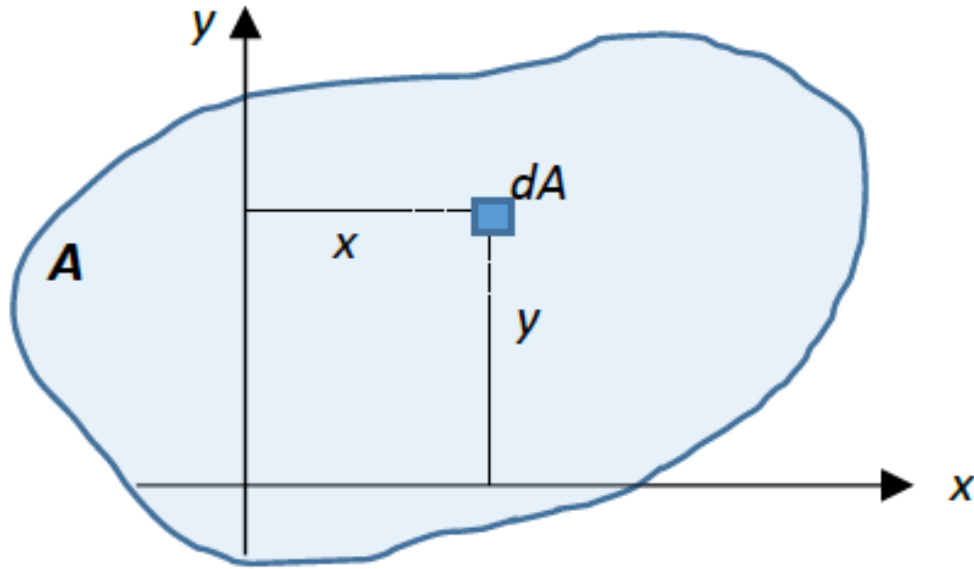
Características Geométricas de Secciones Transversales

¿Para qué sirven?

- Área
Dimensionamiento/Verificación a Esfuerzo Normal
- Momento Estático ó de Primer Orden
Dimensionamiento/Verificación a Esfuerzo de Corte
- Momentos de *Segundo Orden*
Momento de Inercia
Momento Polar
Dimensionamiento/Verificación a Esfuerzo de Flexión
Dimensionamiento/Verificación a Esfuerzo de Torsión
- Radio de giro
Dimensionamiento/Verificación a Esfuerzo de Compresión



➤ MOMENTO ESTÁTICO:



$$S_x = \int y \, dA$$

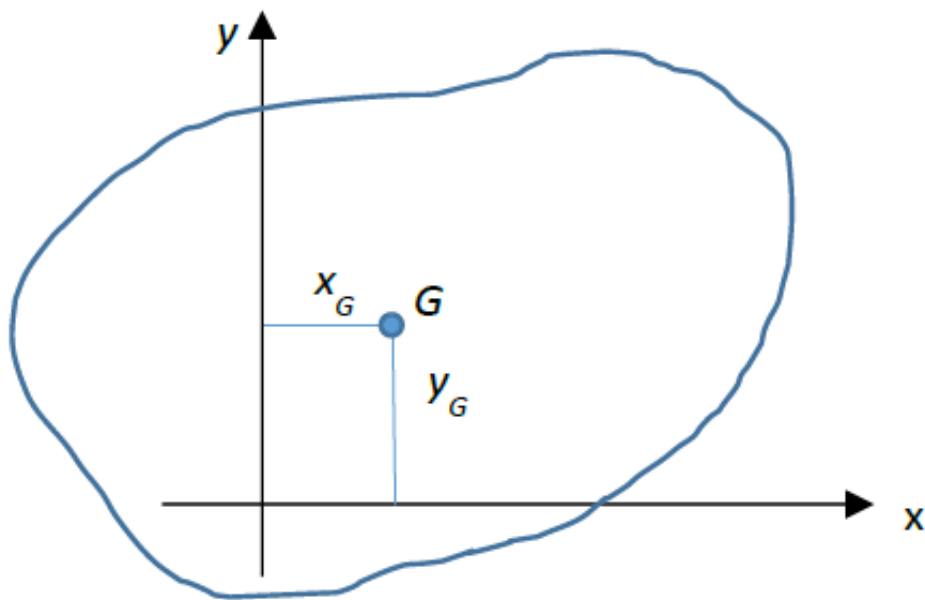
$$S_y = \int x \, dA$$

Unidades:

$$[S] = m^2 \cdot m = m^3$$

➤ BARICENTRO:

- Es el punto donde el momento estático vale 0.
- Es independiente del sistema coordenado.
- Puede ubicarse dentro o fuera del contorno de la superficie.
- Si hay un eje de simetría, el mismo será baricéntrico.
- Si hay dos ejes de simetría, el baricentro estará en la intersección de los mismos.



$$S_x = A \cdot y_G$$

$$S_y = A \cdot x_G$$

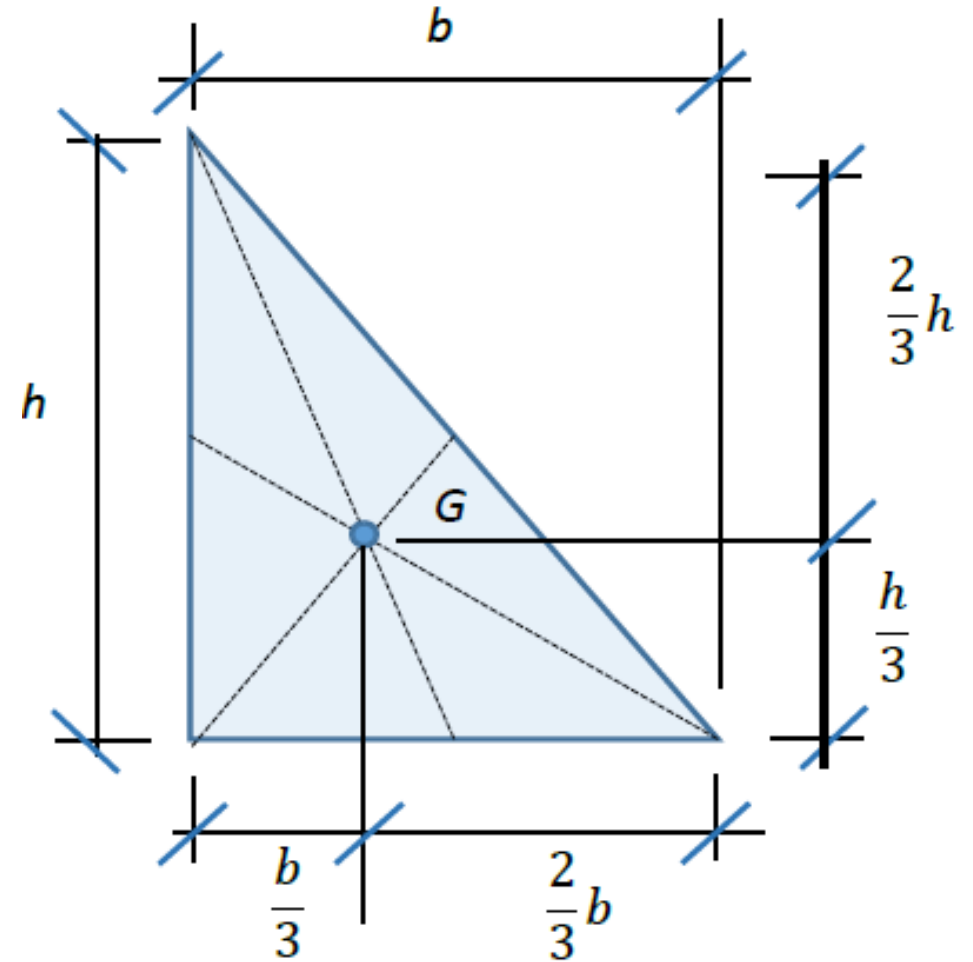
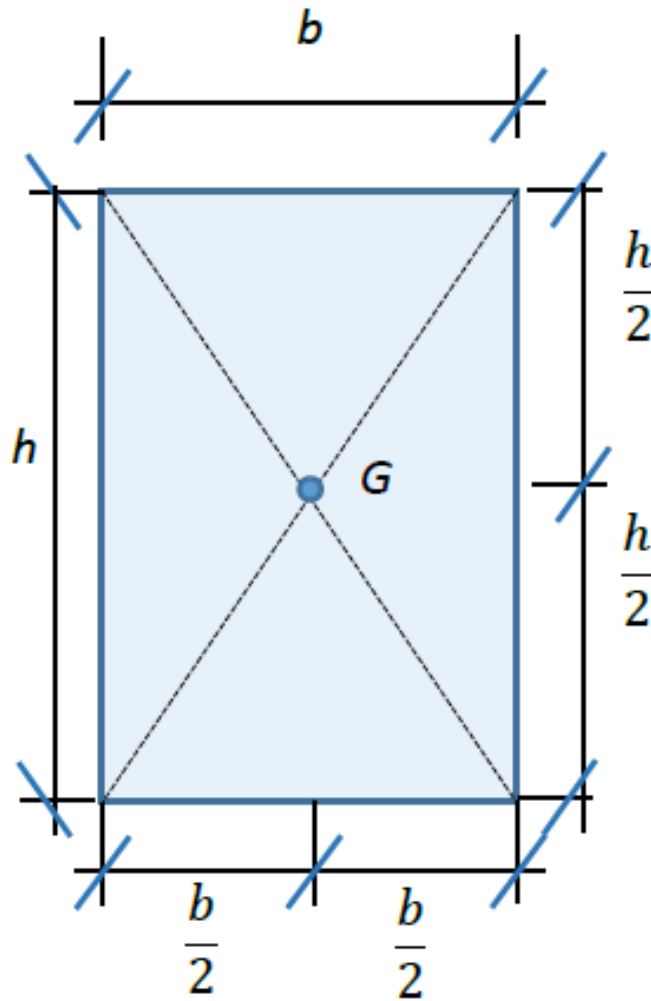
$$y_G = \frac{\int y dA}{A} = \frac{S_x}{A}$$

$$x_G = \frac{\int x dA}{A} = \frac{S_y}{A}$$

Unidades: $[x_G] = \frac{[S_y]}{[A]} = \frac{m^3}{m^2} = m$

➤ BARICENTRO:

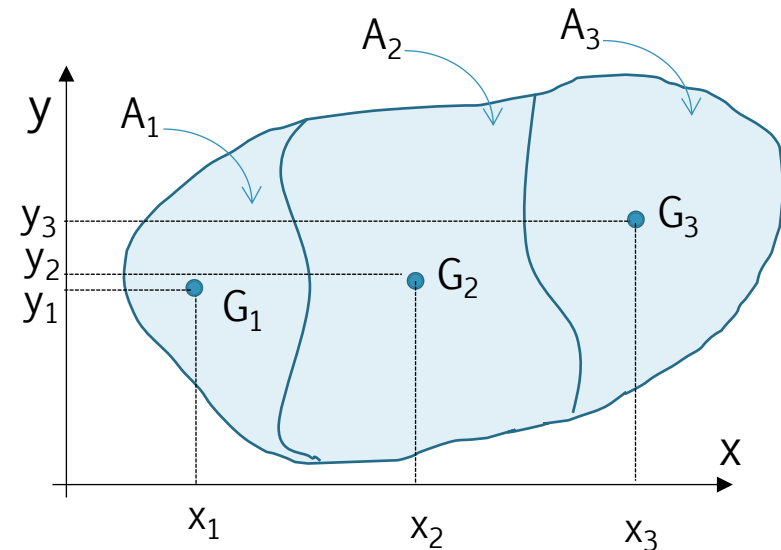
Método gráfico:



➤ BARICENTRO FIGURAS COMPUESTAS:

Se la subdivide en superficies menores.

El momento estático de la figura total se puede calcular como la suma de los momentos estáticos de cada área más pequeña:



$$S_x = \int y \, dA = \sum \int y \, dA_i = \sum S_{xi}$$

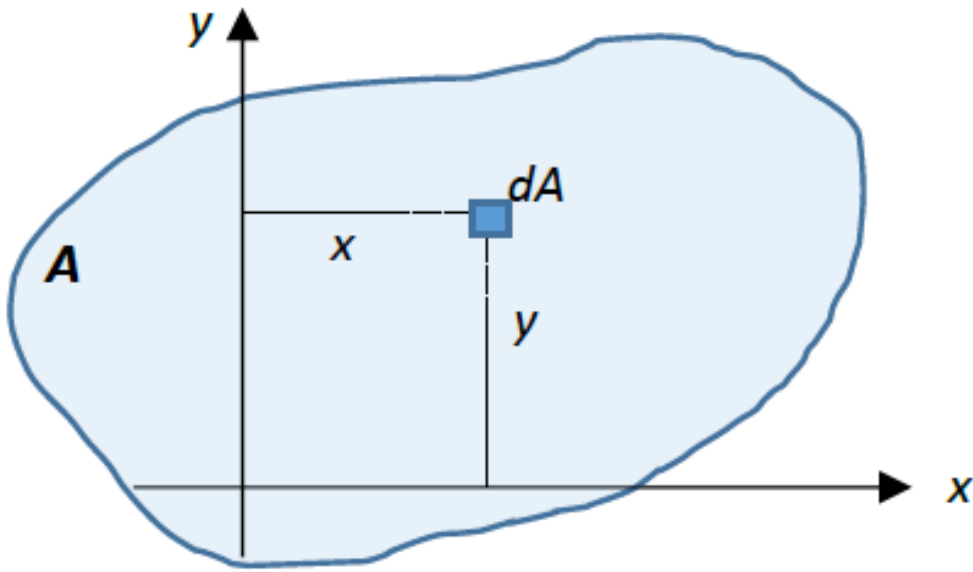
$$S_y = \int x \, dA = \sum \int x \, dA_i = \sum S_{yi}$$

$$y_G = \frac{\sum y_{Gi} \cdot A_i}{\sum A_i}$$
$$x_G = \frac{\sum x_{Gi} \cdot A_i}{\sum A_i}$$

Si la superficie tiene huecos o entrantes la superficie se considera negativa.

➤ MOMENTO DE INERCIA:

El momento de inercia representa la resistencia al giro que tiene la superficie respecto de un eje.



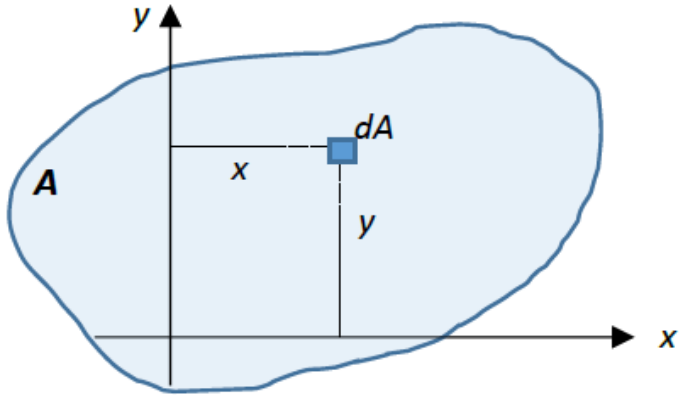
$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

Unidades:

$$[I] = m^2 \cdot m^2 = m^4$$

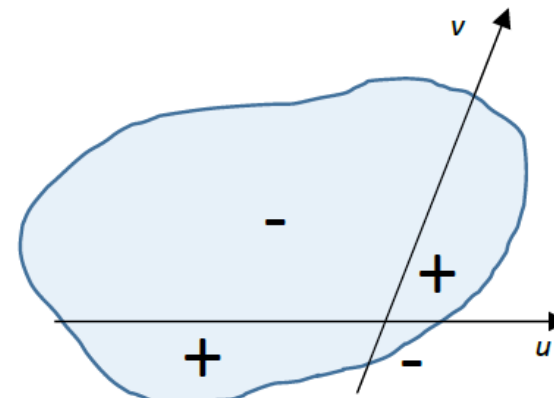
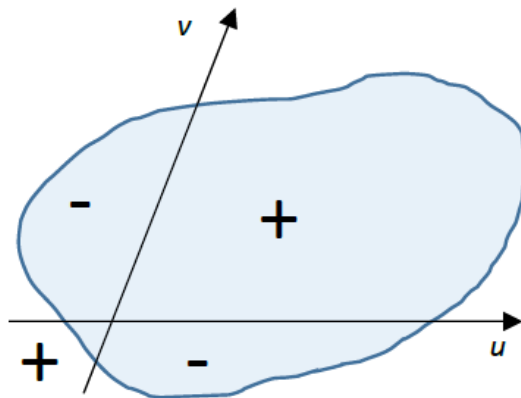
➤ MOMENTO CENTRÍFUGO:



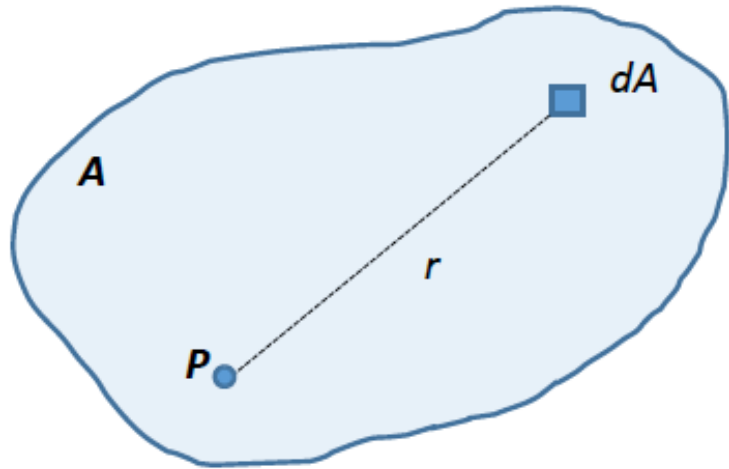
$$I_{xy} = \int x y dA$$

Unidades: $[I] = m^2 \cdot m^2 = m^4$

El signo del momento depende del cuadrante donde exista mayor área.



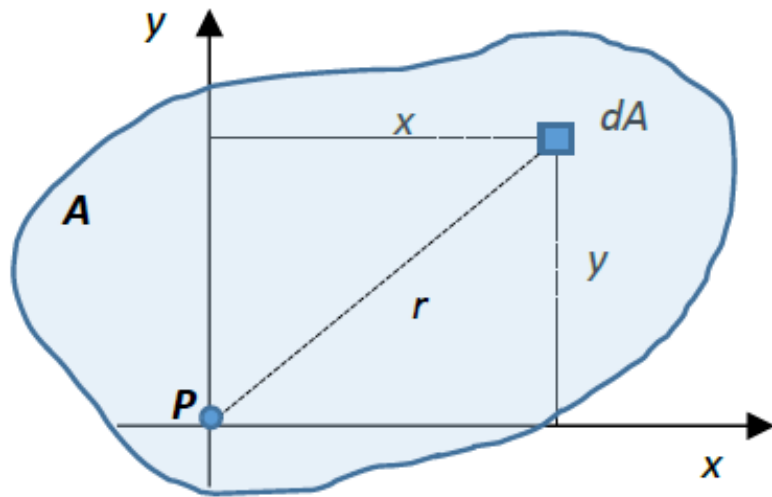
➤ MOMENTO POLAR:



$$I_P = \int r^2 dA$$

Unidades: $[I] = m^2 \cdot m^2 = m^4$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

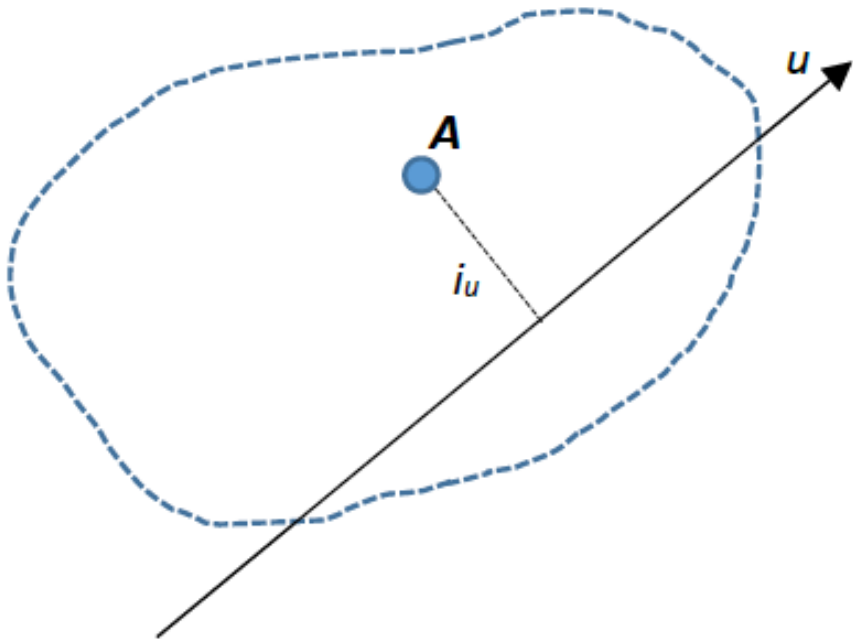


$$I_P = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_x + I_y$$

Para todo par de ejes ortogonales que pasen por el polo P, el valor del momento Polar es invariante.

➤ RADIO DE GIRO:

Es la distancia a una recta, tal que si toda el área estuviera concentrada en dicho punto, obtendríamos el mismo momento de inercia de la figura respecto del eje.



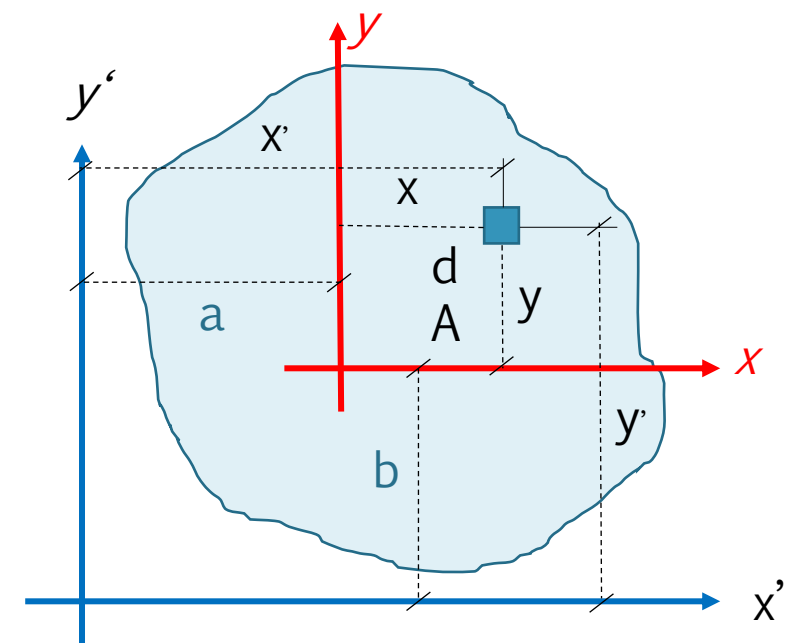
$$I_u = i_u^2 \cdot A \quad \text{Entonces:} \quad i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Nos da una idea de la efectividad en la distribución del área en una sección.

➤ TRASLACIÓN DE EJES



$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

$$I_{x'} = \iint y'^2 dA = \iint (y + b)^2 dA = \iint y^2 dA + 2 \cdot b \iint y dA + b^2 \iint dA$$

$$I_{x'} = I_x + 2 \cdot b \cdot S_x + b^2 \cdot A$$

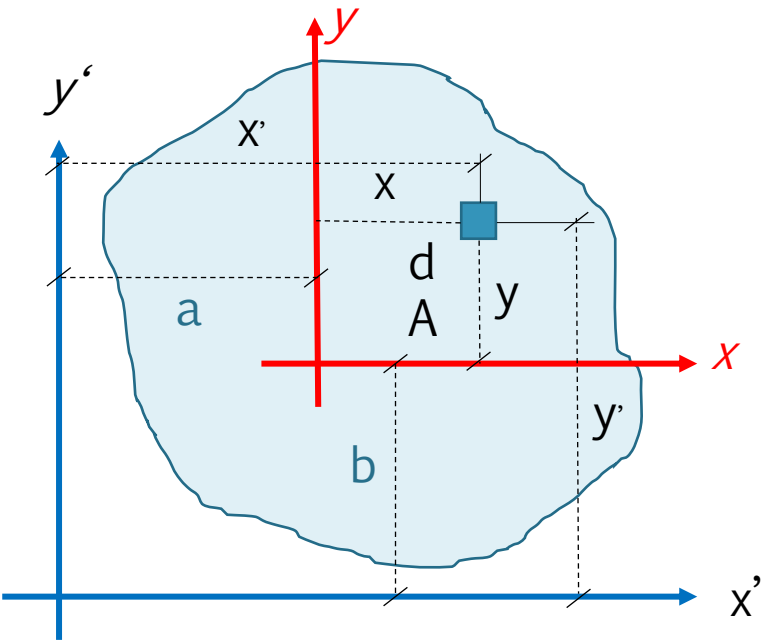
$$I_{y'} = \iint x'^2 dA = \iint (x + a)^2 dA = \iint x^2 dA + 2 \cdot a \iint x dA + a^2 \iint dA$$

$$I_{y'} = I_y + 2 \cdot a \cdot S_y + a^2 \cdot A$$

$$I_{x'y'} = \iint x' \cdot y' dA = \iint (x + a) \cdot (y + b) dA = \iint x \cdot y dA + b \iint x dA + a \iint y dA + ab \iint dA$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + b \cdot S_y + a \cdot S_x + a \cdot b \cdot A$$

➤ TRASLACIÓN DE EJES BARICÉNTRICOS: TEOREMA DE STEINER



$$I_{x'} = I_{xG} + 2 \cdot b \cdot S_{xG} + b^2 \cdot A$$

$$I_{x'} = I_{xG} + b^2 \cdot A$$

$$I_{y'} = I_{yG} + 2 \cdot a \cdot S_{yG} + a^2 \cdot A$$

$$I_{y'} = I_{yG} + a^2 \cdot A$$

$$I_{x'y'} = I_{xGyG} + b \cdot S_{yG} + a \cdot S_{xG} + a \cdot b \cdot A$$

$$I_{x'y'} = I_{xGyG} + a \cdot b \cdot A$$

Conclusión:

Los momentos de inercia baricéntricos son siempre menores que los momentos de inercia respecto a cualquier otro par de ejes paralelos.

➤ ROTACIÓN DE EJES ORTOGONALES

Características geométricas respecto de x, y conocidas.
Se desea conocer respecto de x', y' , girados a respecto de x, y .

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha) \\ y' = y \cdot \cos(\alpha) - x \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$$

$$2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$$

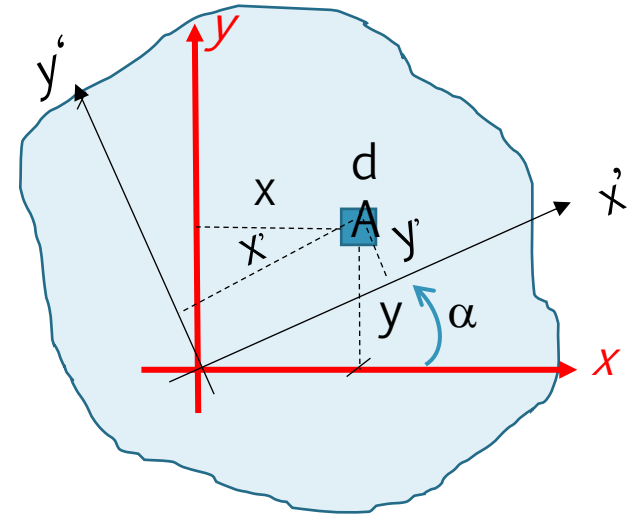
$$\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 = \cos(2\alpha)$$

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \iint y'^2 dA = \iint (y \cdot \cos(\alpha) - x \cdot \sin(\alpha))^2 dA = \\ &= -\sin(2\alpha) \iint x \cdot y dA + \sin(\alpha)^2 \iint x^2 dA + \cos(\alpha)^2 \iint y^2 dA \end{aligned}$$

$$I_{x'} = \sin(\alpha)^2 \cdot I_y + \cos(\alpha)^2 \cdot I_x - \sin(2\alpha) I_{xy}$$

$$\begin{aligned} I_{y'} &= \iint x'^2 dA = \iint (x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha))^2 dA = \\ &= \sin(2\alpha) \iint x \cdot y dA + \cos(\alpha)^2 \iint x^2 dA + \sin(\alpha)^2 \iint y^2 dA \end{aligned}$$

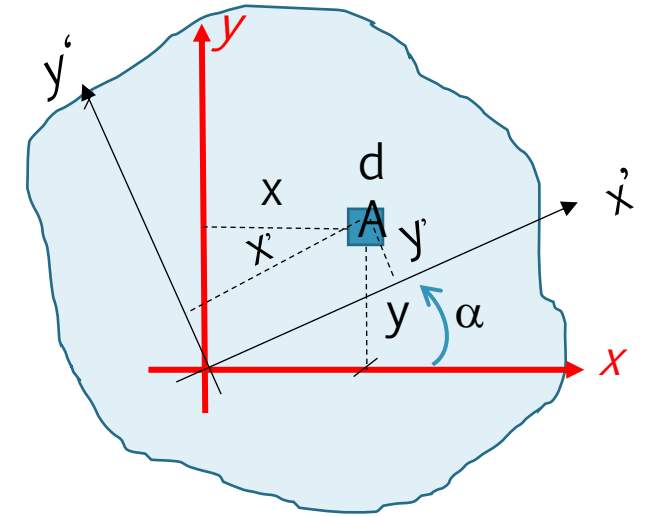
$$I_{y'} = \cos(\alpha)^2 \cdot I_y + \sin(\alpha)^2 \cdot I_x + \sin(2\alpha) I_{xy}$$



➤ ROTACIÓN DE EJES ORTOGONALES

Características geométricas respecto de x, y conocidas.
Se desea conocer respecto de x', y' , girados a respecto de x, y .

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha) \\ y' = y \cdot \cos(\alpha) - x \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$$



$$2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$$

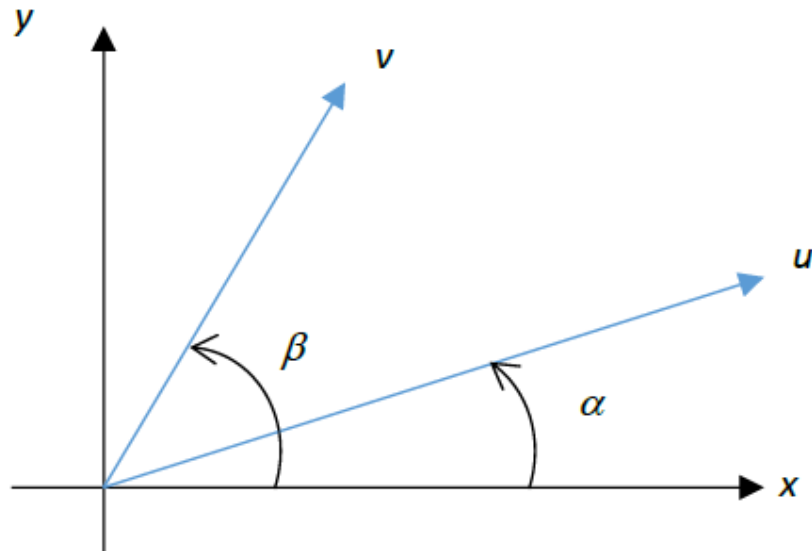
$$\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 = \cos(2\alpha)$$

$$I_{x'y'} = \iint x' \cdot y' dA = \iint (x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha)) \cdot (y \cdot \cos(\alpha) - x \cdot \sin(\alpha)) dA =$$

$$= \cos(2\alpha) \iint x \cdot y dA - \frac{\sin(2\alpha)}{2} \iint x^2 dA + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \iint y^2 dA = \boxed{I_{x'y'} = \cos(2\alpha) I_{xy} - \frac{\sin(2\alpha)}{2} (I_y - I_x)}$$

➤ EJES CONJUGADOS DE INERCIA:

Es un par de ejes cuyo momento centrífugo es nulo.



Teniendo el eje u que forma un ángulo α con x , calculamos el eje v conjugado de inercia:

$$\tan(\beta) = \frac{I_x - I_{xy} \cdot \tan(\alpha)}{I_{xy} - I_y \cdot \tan(\alpha)}$$

- Si además de ser Conjugados, el par de ejes son ortogonales entre sí, se los denomina Ejes Principales de Inercia.
- Si uno de los ejes es de simetría, cualquiera sea el otro eje, el Momento Centrífugo será nulo.

➤ EJES PRINCIPALES DE INERCIA:

Es el par de ejes para los cuales los momentos de inercia son máximos y mínimos. Para hallar el eje, derivamos la expresión de rotación respecto del ángulo.

$$I_{x'} = \sin(\alpha)^2 \cdot I_y + \cos(\alpha)^2 \cdot I_x - \sin(2\alpha) I_{xy}$$

$$\frac{dI_{x'}}{d\alpha} = 0 = \frac{d \sin(\alpha)^2}{d\alpha} \cdot I_y + \frac{d \cos(\alpha)^2}{d\alpha} \cdot I_x - \frac{d \sin(2\alpha)}{d\alpha} \cdot I_{xy}$$

$$0 = \sin(2\alpha_0) \cdot I_y - \sin(2\alpha_0) \cdot I_x - 2 \cdot \cos(2\alpha_0) \cdot I_{xy}$$

$$2 \cdot \cos(2\alpha_0) \cdot I_{xy} = \sin(2\alpha_0) \cdot (I_y - I_x)$$

$$\frac{2 \cdot I_{xy}}{(I_y - I_x)} = \frac{\sin(2\alpha_0)}{\cos(2\alpha_0)} = \tan(2\alpha_0)$$

$$\tan(2\alpha_0) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{(I_y - I_x)}$$



➤ EJES PRINCIPALES DE INERCIA:

Es el par de ejes para los cuales los momentos de inercia son máximos y mínimos. Para hallar el eje, derivamos la expresión de rotación respecto del ángulo.

$$\tan(2\alpha_0) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{(I_y - I_x)}$$

- Los Ejes Principales de Inercia son Ortogonales y Conjugados
- El producto de inercia $I_{x'y'}$ es nulo para los ejes principales de inercia.
- Todo eje de simetría es principal de inercia



➤ MOMENTOS DE INERCIA PRINCIPALES:

Reemplazando el α que maximiza el valor del Momento de Inercia en la ecuación de rotación de ejes, se obtienen los momentos de inercia máximos y mínimos o Momentos Principales de Inercia

$$\cos(\alpha)^2 = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin(\alpha)^2 = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

$$I_{x'} = \sin(\alpha)^2 \cdot I_y + \cos(\alpha)^2 \cdot I_x - \sin(2\alpha) I_{xy} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \cdot I_y + \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \cdot I_x - \sin(2\alpha) I_{xy} =$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{\cos(2\alpha)}{2} \cdot (I_x - I_y) - \sin(2\alpha) I_{xy} =$$

Reemplazando el α por α_0 : $\tan(2\alpha_0) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}$

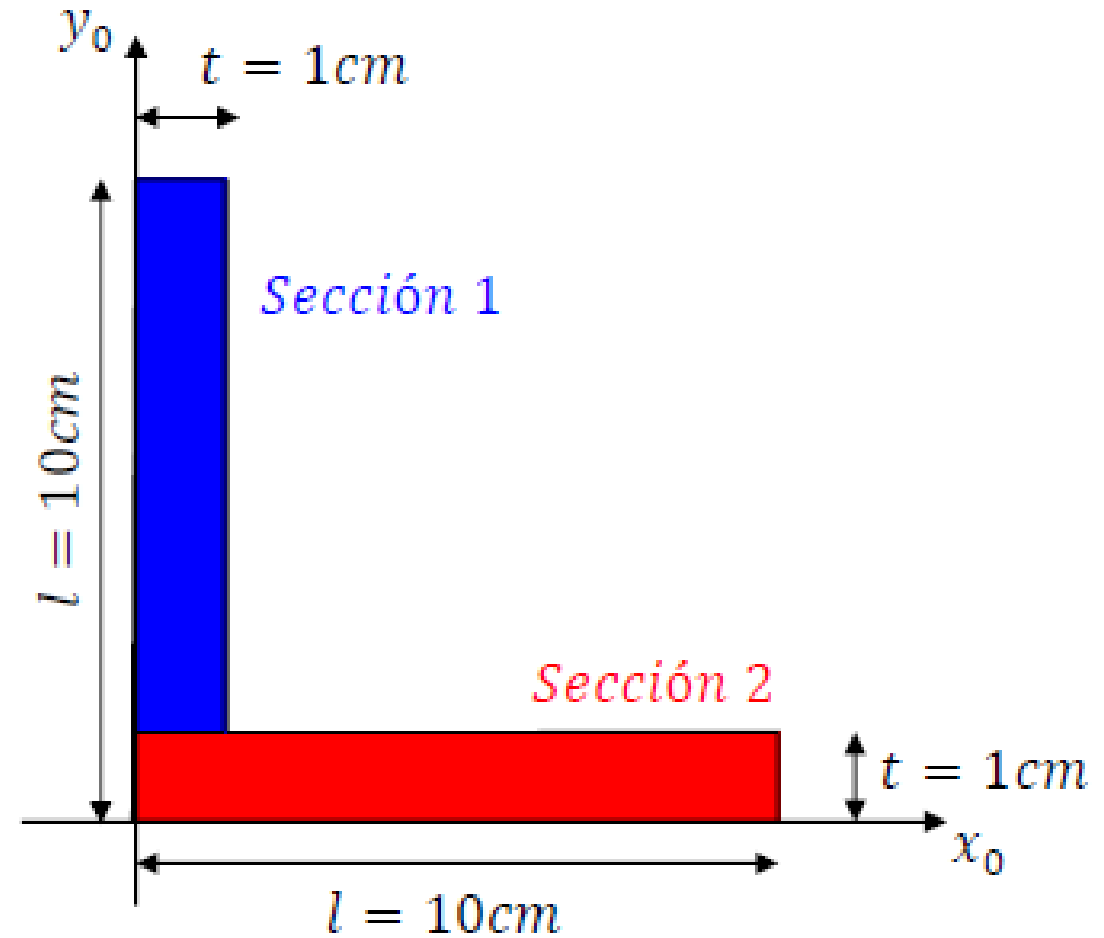
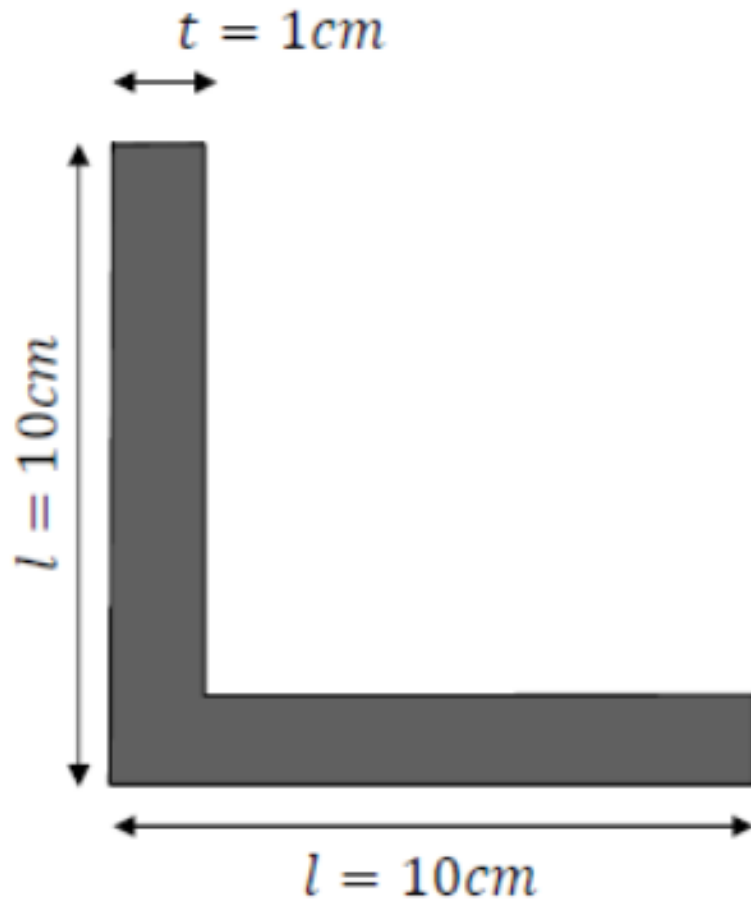
$$I_{I,II} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

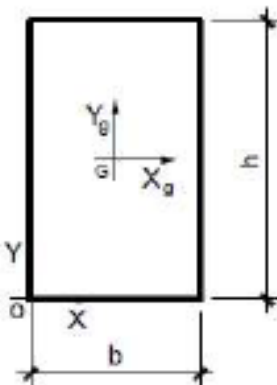
$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

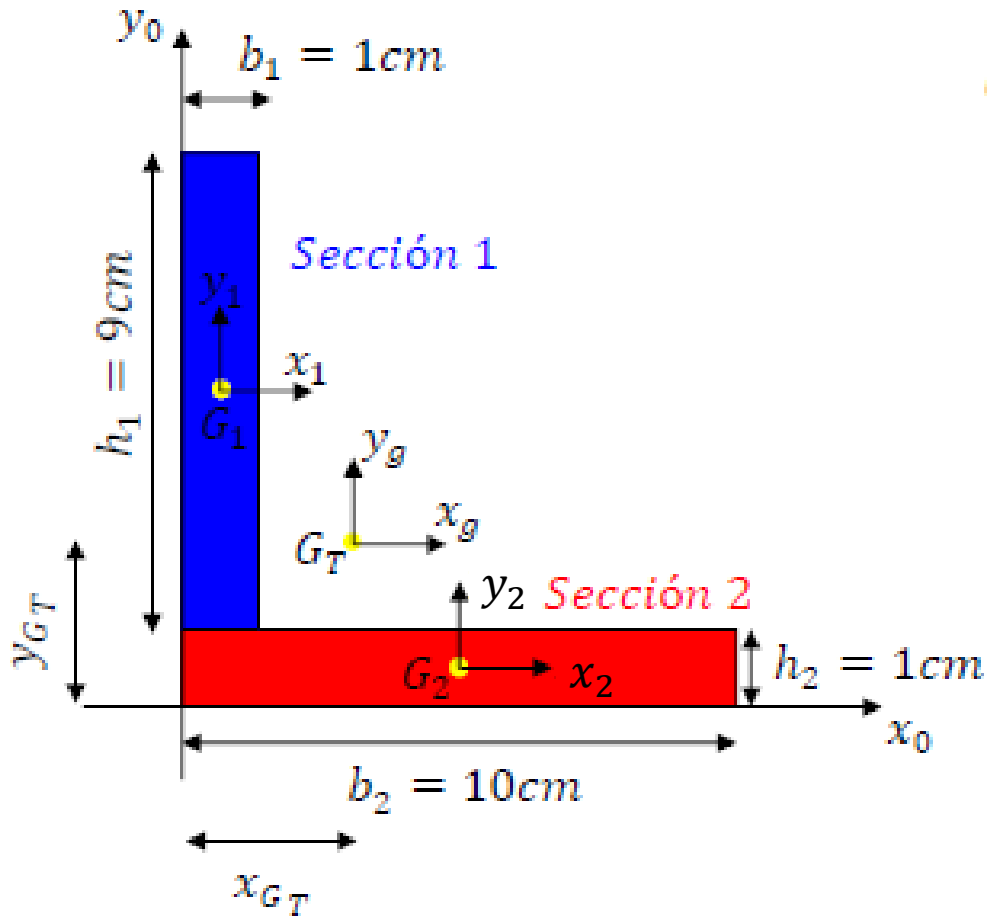
$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$



Calcular la posición de baricentro y los ejes y momentos de inercia principales baricéntricos.



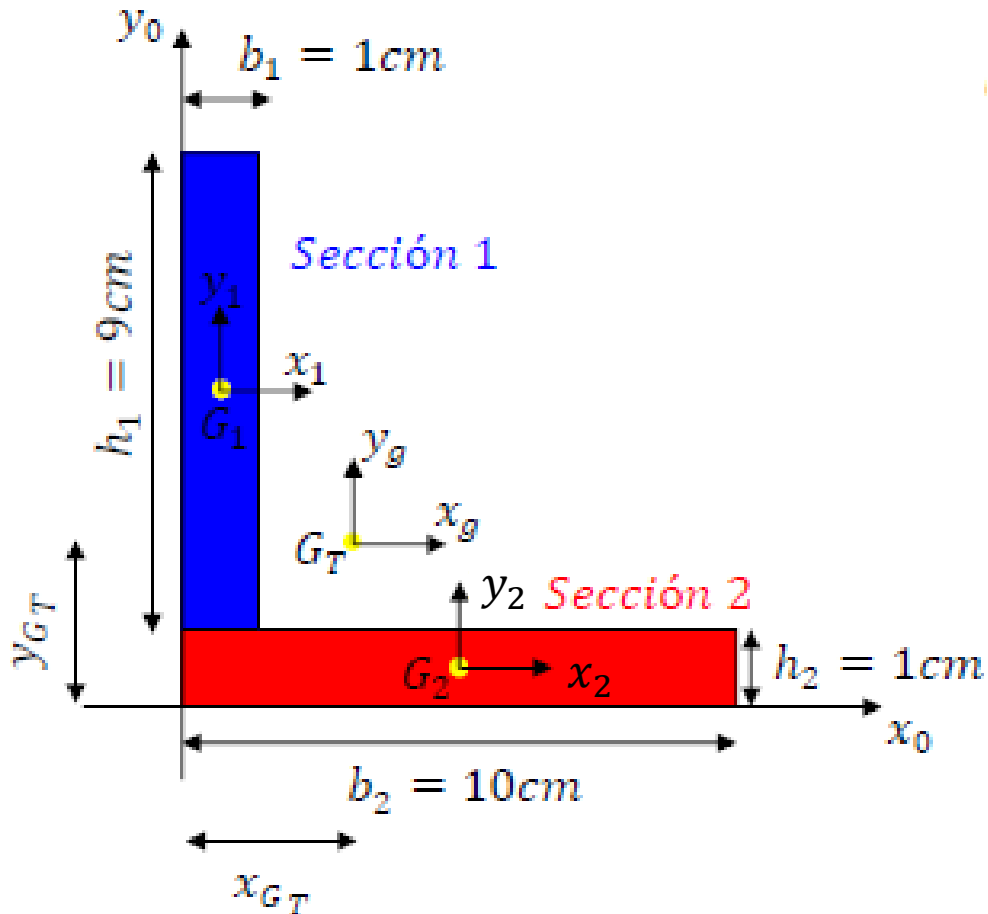
SECCIÓN	BARICENTRO / ÁREA	MOMENTOS DE INERCIA Y MOMENTOS CENTRIFUGOS	
	$x_g = \frac{b}{2}$	$J_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$	$J_{xg} = \frac{b \cdot h^3}{12}$
	$y_g = \frac{h}{2}$	$J_y = \frac{b^3 \cdot h}{3}$	$J_{yg} = \frac{b^3 \cdot h}{12}$
	$F = b \cdot h$	$J_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$	$J_{xyg} = 0$



Calculo el Baricentro de cada Sección:

$$G_1 = (0,5\text{cm}, 5,5\text{cm}) \quad A_1 = 1\text{cm} * 9\text{cm} = 9\text{cm}^2$$

$$G_2 = (5\text{cm}, 0,5\text{cm}) \quad A_2 = 10\text{cm} * 1\text{cm} = 10\text{cm}^2$$



Calculo el Baricentro de la Sección Compuesta:

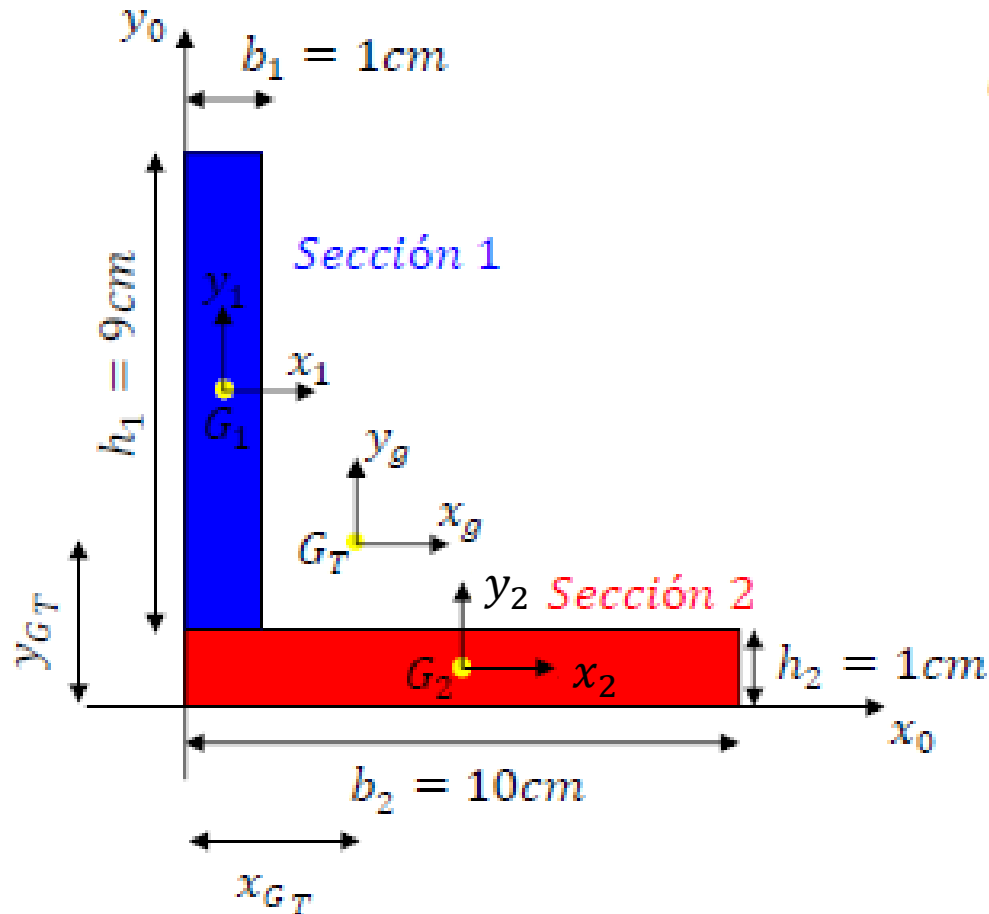
$$x_{G_T} = \frac{\sum x_{G_i} A_i}{\sum A_i} \quad y_{G_T} = \frac{\sum y_{G_i} A_i}{\sum A_i}$$

$$x_{G_T} = \frac{0,5\text{cm} * 9\text{cm}^2 + 5\text{cm} * 10\text{cm}^2}{9\text{cm}^2 + 10\text{cm}^2} = 2,868\text{cm}$$

$$y_{G_T} = \frac{5,5\text{cm} * 9\text{cm}^2 + 0,5\text{cm} * 10\text{cm}^2}{9\text{cm}^2 + 10\text{cm}^2} = 2,868\text{cm}$$

$$G_T = (2,868\text{cm}; 2,868\text{cm})$$

Calculo los Momentos de Inercia de cada Sección:



$$I_x = \frac{b * h^3}{12}$$

$$I_y = \frac{h * b^3}{12}$$

$$I_{x_1} = \frac{1\text{cm} * (9\text{cm})^3}{12} = 60,75\text{cm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{9\text{cm} * (1\text{cm})^3}{12} = 0,75\text{cm}^4$$

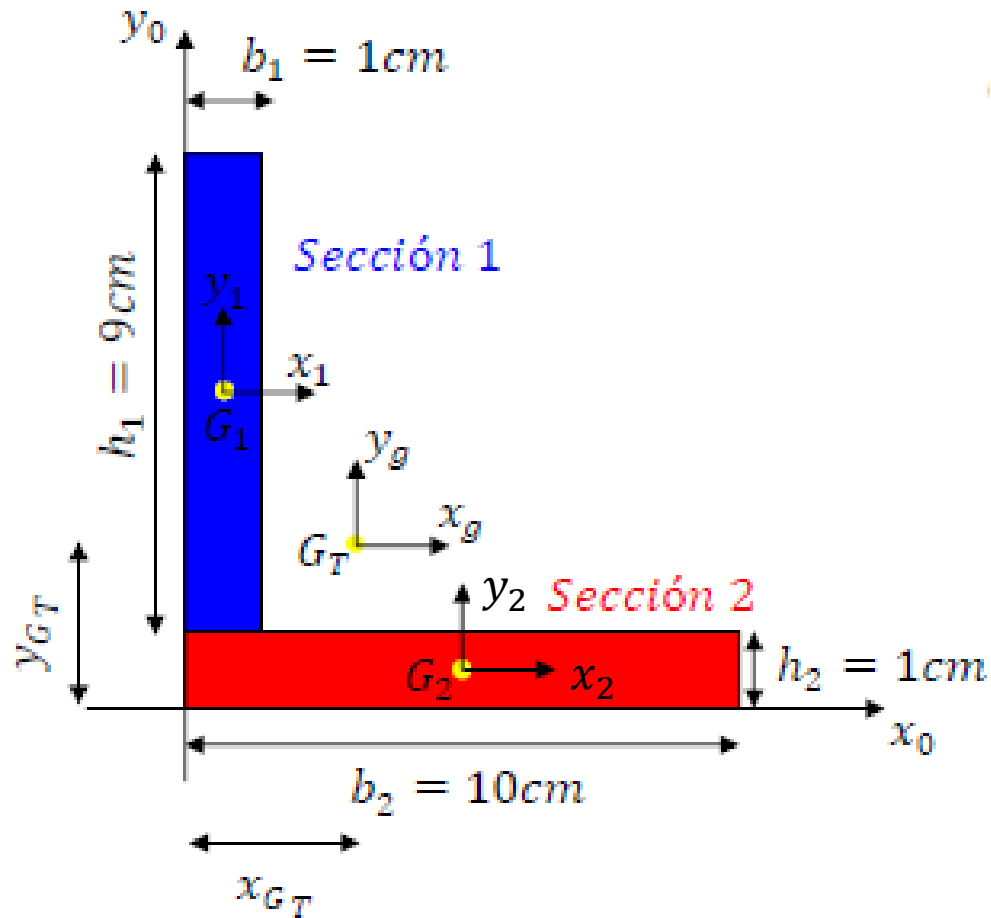
$$I_{x_2} = \frac{10\text{cm} * (1\text{cm})^3}{12} = 0,833\text{cm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{1\text{cm} * (10\text{cm})^3}{12} = 83,333\text{cm}^4$$

$$I_{x_1 y_1} = 0$$

$$I_{x_2 y_2} = 0$$

Uso el Teorema de Steiner para calcular el Momento de Inercia en X de la Sección Compuesta:



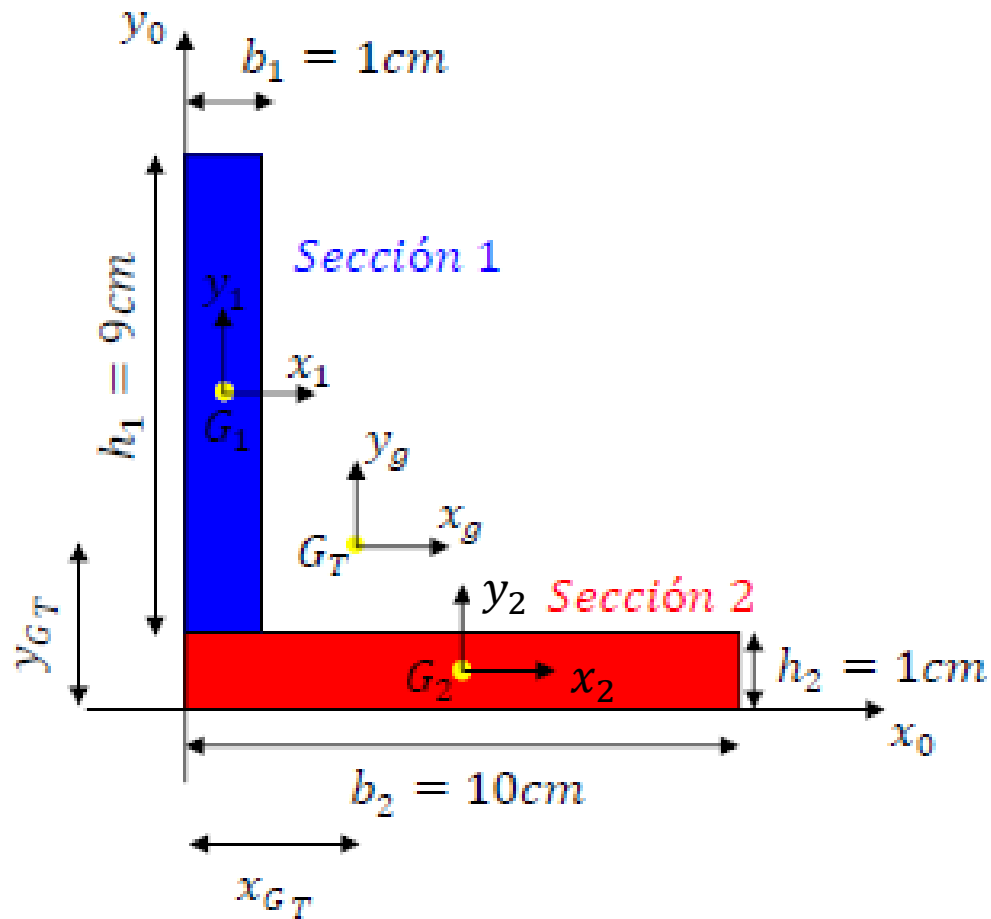
$$I_{x_g} = I_{x_1} + a_1^2 A_1 + I_{x_2} + a_2^2 A_2$$

$$a_1 = y_{G_T} - y_{G_1} = 2,868\text{cm} - 5,5\text{cm} = -2,632\text{cm}$$

$$a_2 = y_{G_T} - y_{G_2} = 2,868\text{cm} - 0,5\text{cm} = 2,368\text{cm}$$

$$I_{x_g} = 60,75\text{cm}^4 + (-2,632)^2 * 9\text{cm}^2 + 0,833\text{cm}^4 + (2,368)^2 * 10\text{cm}^2 = 180\text{cm}^4$$

Uso el Teorema de Steiner para calcular el Momento de Inercia en Y de la Sección Compuesta :



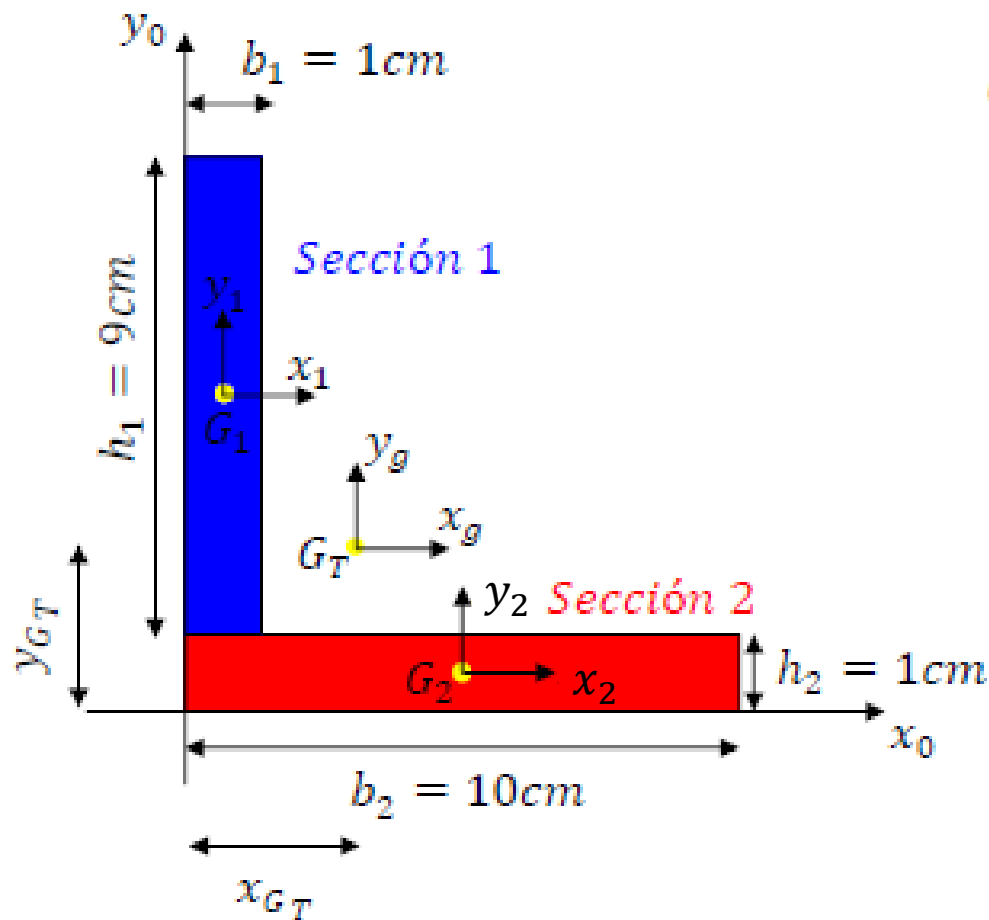
$$I_{y_g} = I_{y_1} + b_1^2 A_1 + I_{y_2} + b_2^2 A_2$$

$$b_1 = x_{G_T} - x_{G_1} = 2,868\text{ cm} - 0,5\text{ cm} = 2,368\text{ cm}$$

$$b_2 = x_{G_T} - x_{G_2} = 2,868\text{ cm} - 5\text{ cm} = -2,132\text{ cm}$$

$$I_{y_g} = 0,75\text{ cm}^4 + (2,368)^2 * 9\text{ cm}^2 + 83,333\text{ cm}^4 + (-2,132)^2 * 10\text{ cm}^2 = 180\text{ cm}^4$$

Uso el Teorema de Steiner para calcular el Momento Centrífugo de la Sección Compuesta:



$$I_{x_g y_g} = I_{x_1 y_1} + a_1 b_1 A_1 + I_{x_2 y_2} + a_2 b_2 A_2$$

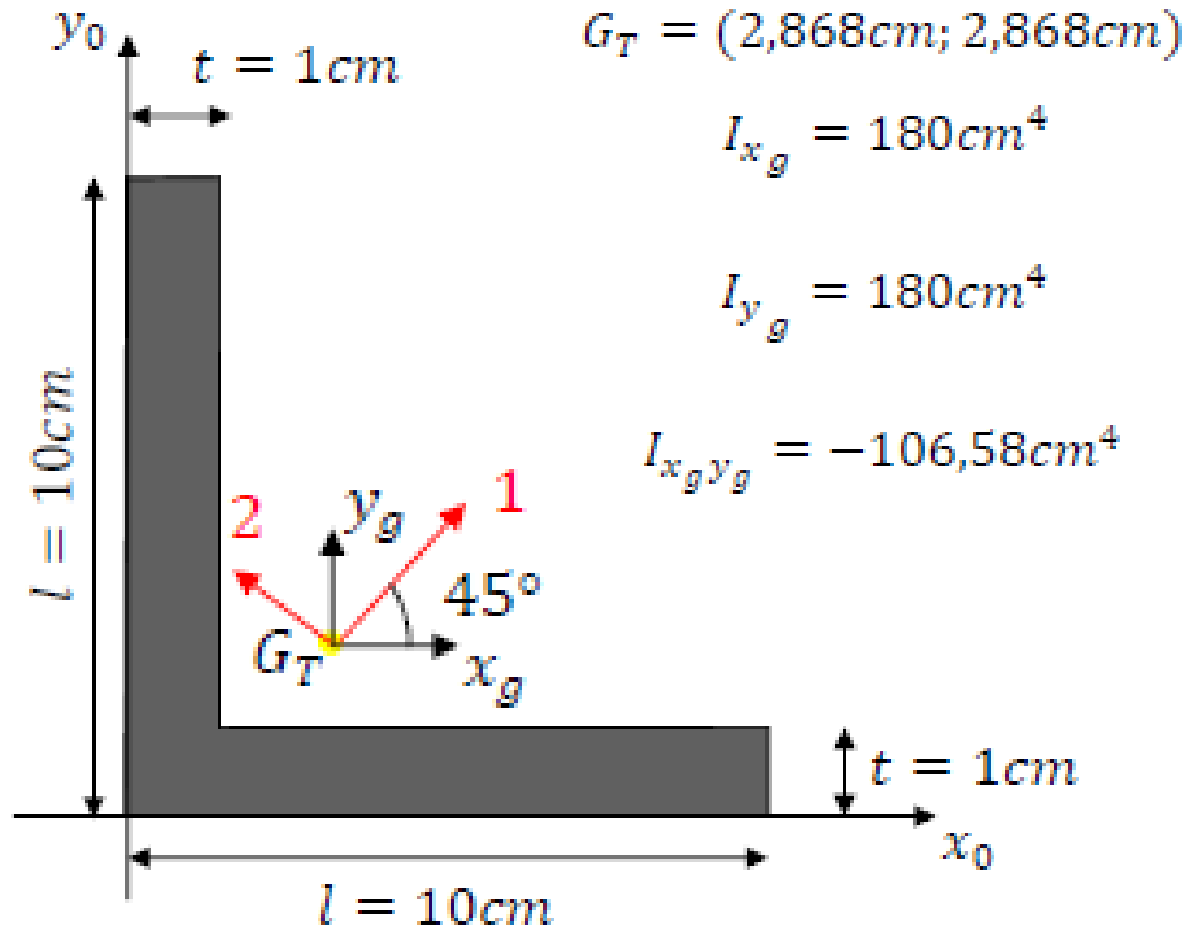
$$a_1 = y_{G_T} - y_{G_1} = 2,868\text{cm} - 5,5\text{cm} = -2,632\text{cm}$$

$$a_2 = y_{G_T} - y_{G_2} = 2,868\text{cm} - 0,5\text{cm} = 2,368\text{cm}$$

$$b_1 = x_{G_T} - x_{G_1} = 2,868\text{cm} - 0,5\text{cm} = 2,368\text{cm}$$

$$b_2 = x_{G_T} - x_{G_2} = 2,868\text{cm} - 5\text{cm} = -2,132\text{cm}$$

$$I_{x_g y_g} = 0\text{cm}^4 + (-2,632\text{cm})(2,368\text{cm}) * 9\text{cm}^2 + 0\text{cm}^4 + (2,368\text{cm})(-2,132\text{cm}) * 10\text{cm}^2 = -106,58\text{cm}^4$$



Momentos de Inercia Principales:

$$I_{max-min} = \frac{I_{x_g} + I_{y_g}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_g} - I_{y_g}}{2}\right)^2 + I_{x_g y_g}^2}$$

$$I_{max} = 286,58\text{cm}^4$$

$$I_{min} = 73,43\text{cm}^4$$

Ejes de Inercia Principales:

$$\tan(2\theta) = \frac{-2I_{x_g y_g}}{I_{x_g} - I_{y_g}}$$

$$2\theta = 90^\circ$$

$$\theta = 45^\circ$$



George Washington Bridge, New Jersey, EEUU

GRACIAS POR SU ATENCIÓN!