Cálculo empuje activo con el método de Coulomb

Se tiene la siguiente estructura de retención compuesta de un muro de gravedad de 6 m de altura. El suelo a sostener tiene un peso saturado $\gamma_{sat} := 20\ \frac{kN}{m^3}$. Los parámetros de resitencia son $c := 0$, ángulo de fricción interno efectivo φ':38° y coeficiente de fricción suelo-muro $\delta := 15 \cdot °$.

Calcular:

a) Empujes activo sobre el muro considerando nivel freático en coincidencia con el nivel de terreno natural, aguas arriba del muro.

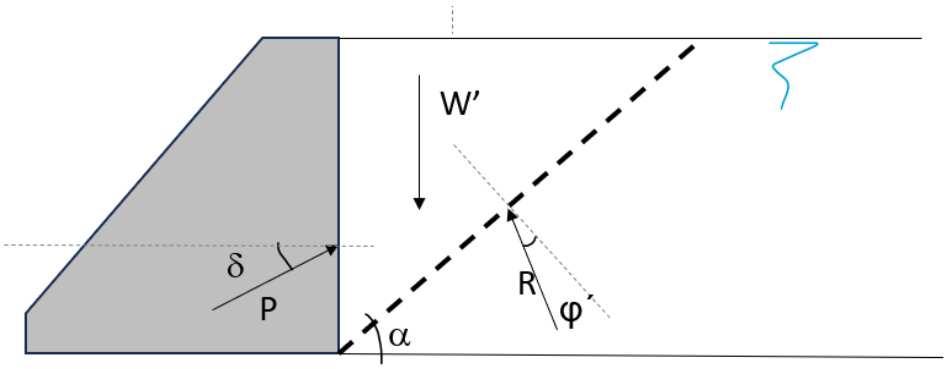
b) Empuje activo sobre el muro considerando que no hay presencia de nivel freático luego de instalar un dren en la base del muro aguas arriba.

Coulomb propuso que existe una condición de equilibrio límite para una cuña de suelo detrás de una estructura de retención que desliza sobre un plano inclinado un ángulo α respecto a la horizontal. Determinó que el ángulo de dicho plano es aquel que genere el máximo empuje P sobre el muro.

Los pasos claves consisten en (1) seleccionar un mecanismo de falla posible (2)determinar las fuerzas que actúan sobre la cuña y (3) considerando la cuña en equilibrio, resolver el equilibrio para obtener el empuje.

(1) En este ejercicio asumiremos que el suelo falla en un plano inclinado un ángulo α respecto a la horizontal.

(2) Planteo de fuerzas que actúan sobre la cuña



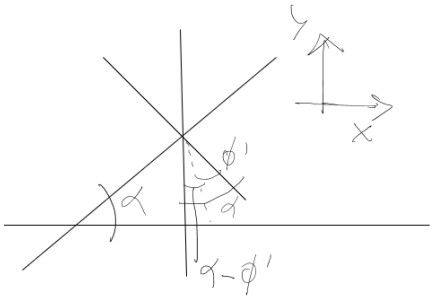
Planteo de esquema de cuña en equilibrio. Falla por plano con ángulo α.

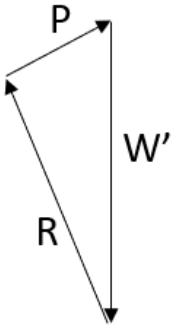
P: empuje activo

W': peso sumergido de la cuña

R: reacción en el plano de falla (resultante de τ y σ integrados en el plano de falla)

Relación de ángulos que permite descomponer vectores para plantear equilibrio de fuerzas verticales y horizontales.





$H := 6\ \mathrm{m} \qquad \gamma_{sat} := 20\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^3} \qquad \gamma_w := 10\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^3}$

$W' := H^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\tan(\alpha)}\right) \cdot \left(\gamma_{sat} - \gamma_w\right)$ Peso sumergido de la cuña

$W' = \frac{180}{\tan(\alpha)}\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$ el peso de la cuña depende del ángulo α

(3) Descomposición fuerzas y planteo de equilibrio en ejes x e y

$P \cdot \cos(\delta) - R \cdot \sin(\alpha - \varphi') = 0$ Sumatoria Fx

$P \cdot \sin(\delta) + R \cdot \cos(\alpha - \varphi') = W'$ Sumatoria Fy

Despeje de P y R en función de α

$$A := \begin{bmatrix} \cos(\delta) & (-1) \cdot \sin(\alpha - \varphi') \\ \sin(\delta) & \cos(\alpha - \varphi') \end{bmatrix} \qquad C := \begin{bmatrix} 0 \\ 180 \cdot \left(\frac{1}{\tan(\alpha)}\right) \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot C = \begin{bmatrix} \frac{180 \cdot \sin(\alpha - \varphi')}{\left(\sin(\alpha - \varphi') \cdot \sin(15 \cdot °) + \cos(15 \cdot °) \cdot \cos(\alpha - \varphi')\right) \cdot \tan(\alpha)} \\ \frac{180 \cdot \cos(15 \cdot °)}{\left(\sin(\alpha - \varphi') \cdot \sin(15 \cdot °) + \cos(15 \cdot °) \cdot \cos(\alpha - \varphi')\right) \cdot \tan(\alpha)} \end{bmatrix}$$

$$R(\alpha) := \frac{180 \cdot \sin(\alpha - \varphi')}{\left(\sin(\alpha - \varphi') \cdot \sin(\delta) + \cos(\delta) \cdot \cos(\alpha - \varphi')\right) \cdot \tan(\alpha)}$$

$$P(\alpha) := \frac{180 \cdot \cos(\delta)}{\left(\sin(\alpha - \varphi') \cdot \sin(\delta) + \cos(\delta) \cdot \cos(\alpha - \varphi')\right) \cdot \tan(\alpha)}$$

Gráfico de $P(\alpha)$ incluyendo los parámetros de suelo y fricción suelo-muro. Se obtiene un valor máximo de P para un determinado ángulo.

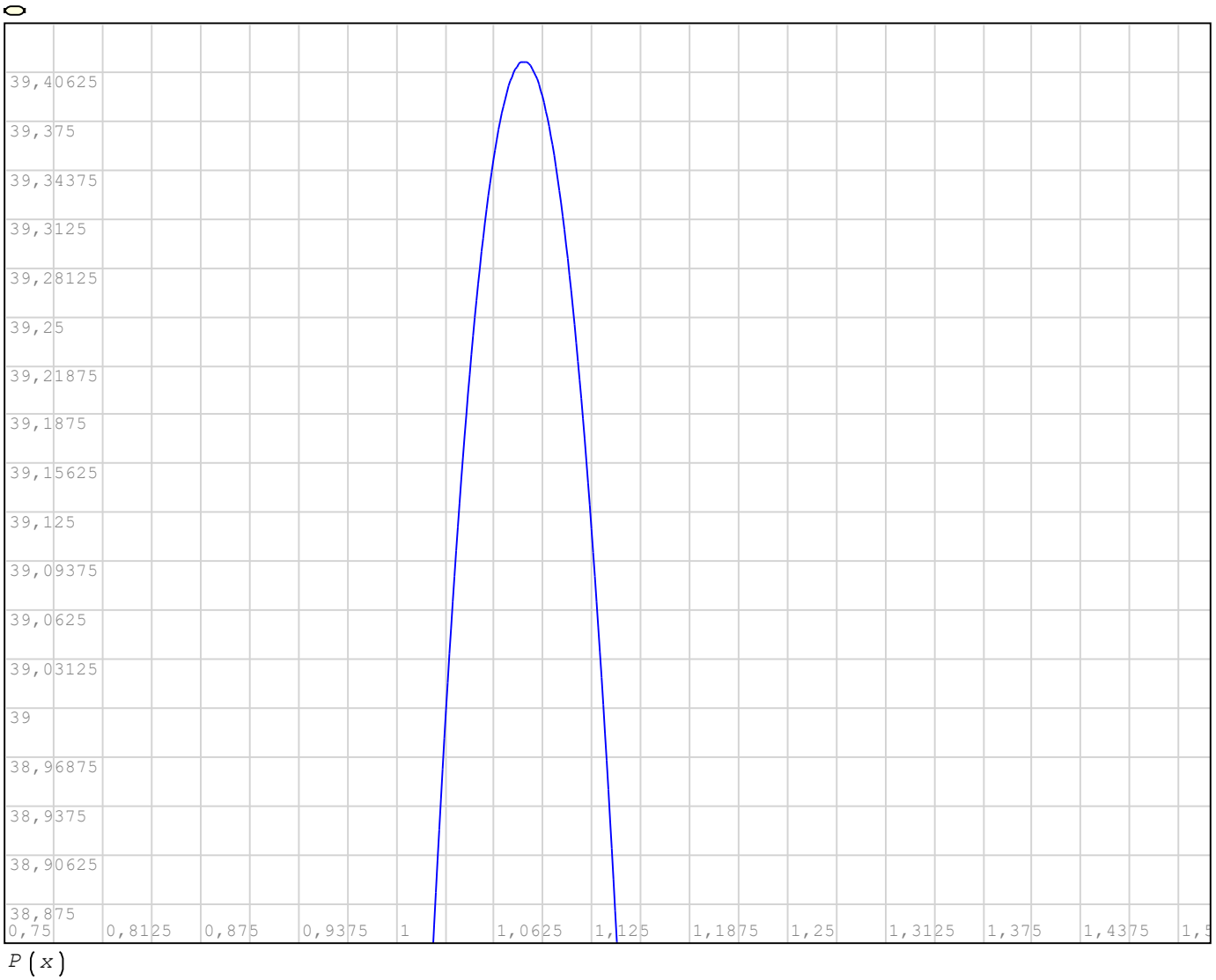
$\delta := 15°$ $\varphi' := 38°$ $\alpha := [(1)..(1,25)]$

$$P(\alpha) := \frac{180 \cdot \sin(\alpha - \varphi')}{(\sin(\alpha - \varphi') \cdot \sin(\delta) + \cos(\delta) \cdot \cos(\alpha - \varphi')) \cdot \tan(\alpha)}$$

$P(61°) = 39,37$

$P(62°) = 39,41$ El empuje activo máximo se obtiene para α = 62°. Resultados en kN/m

$P(63°) = 39,36$

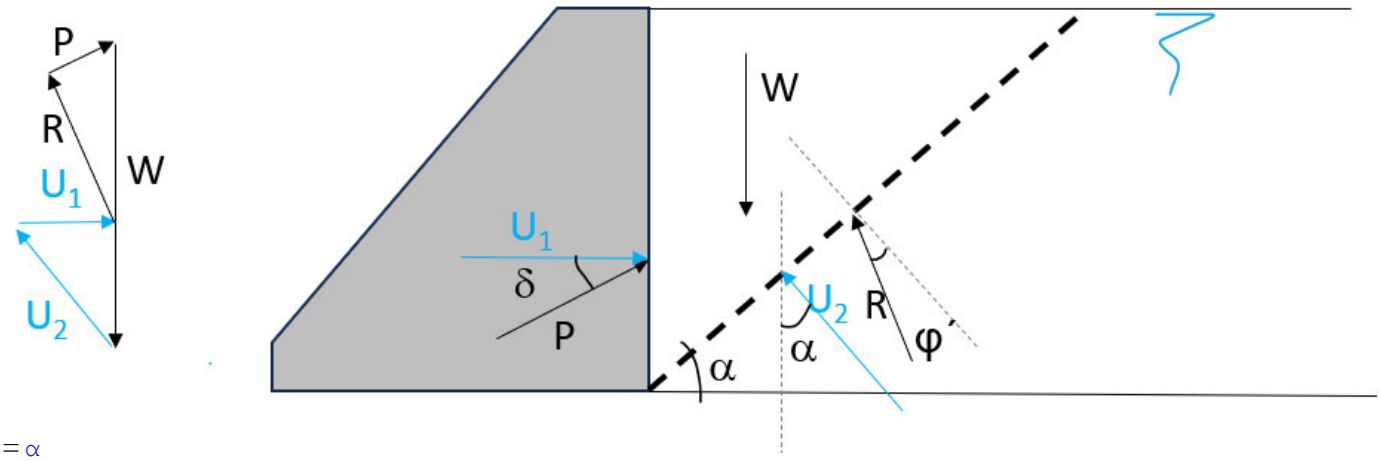


Componente lateral del empuje activo

$E_{Ax} := P(62\ °)\cdot\cos(\delta)\cdot 1\ \frac{kN}{m}$ $\boxed{E_{Ax} = 38{,}07\ \frac{kN}{m}}$

Punto de aplicación: $d_A := \frac{1}{3}\cdot H$ distancia desde la base del muro $d_A = 2\ m$

El planteo de fuerzas se puede realizar alternativamente considerando el peso total (no sumergido) de la cuña e incluyendo el empuje del agua como se muestra a continuación:



$\alpha := \alpha$

$W := H^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\tan(\alpha)}\right)\cdot(\gamma_{sat})$ $W = \frac{360}{\tan(\alpha)}\ \frac{kN}{m}$ Peso total de la cuña

$U_1 := \frac{1}{2}\cdot H^2\cdot\gamma_w$ $U_1 = 180\ \frac{kN}{m}$ Empuje hidrostático entre el muro y el suelo

$U_2 := \frac{1}{2}\cdot H^2\cdot\gamma_w\cdot\frac{1}{\sin(\alpha)}$ $U_2 = \frac{180}{\sin(\alpha)}\ \frac{kN}{m}$ Empuje hidrostático en el plano de falla de la cuña

(3) Descomposición fuerzas y planteo de equilibrio en ejes x e y

$P\cdot\cos(\delta) - R\cdot\sin(\alpha-\varphi') = U_2\cdot\sin(\alpha) - U_1$ Sumatoria Fx

$P\cdot\sin(\delta) + R\cdot\cos(\alpha-\varphi') = W - U_2\cdot\cos(\alpha)$ Sumatoria Fy

Los términos constantes que acompañan a las incógnitas P y R son idénticos al planteo anterior. A continuación, se simplifican los términos del vector resultado.

$U_2\cdot\sin(\alpha) - U_1 = 0$ Puede verse que esta resta se hace nula ya que ambos términos son iguales. Fisicamente, el empuje hidrostático lateral se cancela.

$$W - U_2 \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot \left(\frac{1}{\tan(\alpha)} \right) \cdot \gamma_{sat} - \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot \gamma_w \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Operando se convierte en:

$$W - U_2 \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot \left(\frac{1}{\tan(\alpha)} \right) \cdot \left(\gamma_{sat} - \gamma_w \right)$$ Se obtiene el peso sumergido de la cuña.

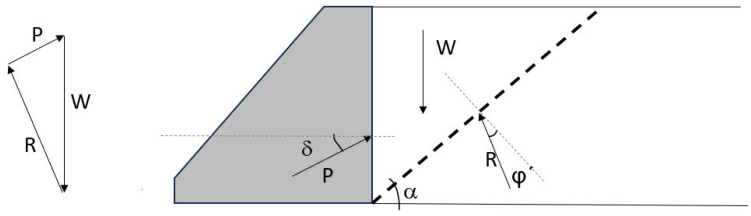
De esta manera, la matriz de descomposición de fuerzas queda idéntica a la del primer planteo:

$$P \cdot \cos(\delta) - R \cdot \sin(\alpha - \varphi') = 0$$

$$P \cdot \sin(\delta) + R \cdot \cos(\alpha - \varphi') = W'$$

b) Cálculo empuje activo considerando abatimiento total del nivel freático.

(2) Planteo de fuerzas que actúan sobre la cuña



$H := 6\ \text{m}$ $\gamma_{sat} := 20\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$ $\gamma_w := 10\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$ $\varphi' :=$ ▮ $\delta :=$ ▮

$$W := H^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\tan(\alpha)} \right) \cdot \left(\gamma_{sat} \right)$$ Peso de la cuña (caso sin agua)

$$W = \frac{360}{\tan(\alpha)}\ \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$ el peso de la cuña depende del ángulo α

(3) Descomposición fuerzas y planteo de equilibrio en ejes x e y

$$P \cdot \cos(\delta) - R \cdot \sin(\alpha - \varphi') = 0$$ Sumatoria Fx

$$P \cdot \sin(\delta) + R \cdot \cos(\alpha - \varphi') = W$$ Sumatoria Fy

Despeje de P y R en función de α

$$A := \begin{bmatrix} \cos(\delta) & (-1) \cdot \sin(\alpha - \varphi') \\ \sin(\delta) & \cos(\alpha - \varphi') \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} 0 \\ 360 \cdot \left(\frac{1}{\tan(\alpha)} \right) \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot C = \begin{bmatrix} \frac{360 \cdot \sin(\alpha - \varphi')}{(\sin(\alpha - \varphi') \cdot \sin(\delta) + \cos(\delta) \cdot \cos(\alpha - \varphi')) \cdot \tan(\alpha)} \\ \frac{360 \cdot \cos(\delta)}{(\sin(\alpha - \varphi') \cdot \sin(\delta) + \cos(\delta) \cdot \cos(\alpha - \varphi')) \cdot \tan(\alpha)} \end{bmatrix}$$

$\delta := 15°$ $\varphi' := 38°$ $\alpha := [(1)..(1,25)]$

$$P(\alpha) := \frac{360 \frac{kN}{m} \cdot \sin(\alpha - \varphi')}{(\sin(\alpha - \varphi') \cdot \sin(\delta) + \cos(\delta) \cdot \cos(\alpha - \varphi')) \cdot \tan(\alpha)}$$

$P(61°) = 78,74 \frac{kN}{m}$

$P(62°) = 78,83 \frac{kN}{m}$

El empuje activo máximo se obtiene para α = 62°.

$P(63°) = 78,72 \frac{kN}{m}$

Componente lateral del empuje activo

$E_{Ax} := P(62°) \cdot \cos(\delta)$ $E_{Ax} = 76,14 \frac{kN}{m}$

Punto de aplicación: $d_A := \frac{1}{3} \cdot H$ distancia desde la base del muro $d_A = 2\ m$