

TEMA 4: Funciones de varias variables

Cálculo para los Grados en Ingeniería

EPIG - UNIOVI

Definiciones

► El espacio $\mathbb{R}^n$

Sabemos que un punto en la recta real viene representado por un número real x , que un punto en el plano lo representamos por un par ordenado de números reales (x_1, x_2) y que un punto en el espacio tridimensional es una terna ordenada de números reales (x_1, x_2, x_3) . De la misma forma definiremos un punto en $\mathbb{R}^n$ como:

► Punto

Llamaremos punto n -dimensional a un conjunto ordenado de n números reales $x_1, x_2, \dots, x_n$ que denotaremos por

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Al conjunto de todos los puntos n -dimensionales se le denominará *espacio n -dimensional* y se denotará por $\mathbb{R}^n$.

Definiciones

► Norma

Llamaremos *norma* en $\mathbb{R}^n$ a toda aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ que denotamos por

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \|x\|\end{aligned}$$

verificando, con $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}$:

$$a) \|x\| \geq 0; \quad b) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$c) \|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|; \quad d) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

En la mayoría de los casos y si no se expresa lo contrario, supondremos que trabajamos con la *norma euclídea*

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = x \cdot x$$

Definiciones

► Distancia

Para cada par de puntos x, y de $\mathbb{R}^n$ se define como distancia entre ellos, al número real

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Fácilmente se pueden comprobar las siguientes propiedades con $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

- a) $d(x, y) \geq 0$; b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
c) $d(x, y) = d(y, x)$; d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definiciones

► Bola

Dado un punto a perteneciente a $\mathbb{R}^n$ y un número real positivo r se denomina bola abierta de centro a y radio r , y se denota por $B(a, r)$ al conjunto

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| < r\}$$

Se denomina bola cerrada de centro a y radio r , y se denota por $\overline{B}(a, r)$ al conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| \leq r\}$$

Así, en $\mathbb{R}$, $B(a, r)$ será el intervalo de centro a y radio r ($a - r, a + r$).

$$\begin{aligned} B(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n / |x - a| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / a - r < x < a + r\} \end{aligned}$$

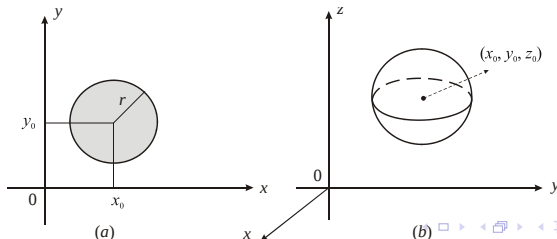
Definiciones

En $\mathbb{R}^2$, $B(a, r)$ será el círculo de centro (a_1, a_2) y radio r .

$$\begin{aligned} B(a, r) &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < r \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2 \right\} \end{aligned}$$

En $\mathbb{R}^3$, $B(a, r)$ será la esfera de centro (a_1, a_2, a_3) y radio r .

$$\begin{aligned} B(a, r) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \|(x, y, z) - (a_1, a_2, a_3)\| < r \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 < r^2 \right\} \end{aligned}$$



Definiciones

► Entorno

Entorno esférico de un punto $x \in \mathbb{R}^n$, es cualquier bola abierta $B(x, r)$ de centro x .

A los entornos esféricos los denominaremos simplemente entornos y al entorno de x , lo designaremos por $U(x)$ sin hacer referencia al radio de la bola, si no es necesario por algún motivo.

► Entorno reducido

Sea r un número real cualquiera. Se denomina entorno reducido de x al conjunto

$$U^*(x) = B(x, r) - \{x\}$$

Definiciones

► Conjunto abierto

Un conjunto A es abierto si y sólo si para todo x perteneciente a A , existe un entorno $U(x)$ contenido en A .

No sería abierto si existiese en él algún x para el cual no existe $U(x)$ tal que $U(x) \subset A$.

► Conjunto cerrado

Se dice que un subconjunto A es cerrado cuando su complementario $\mathbb{R}^n - A$ es abierto.

Nota: Hay conjuntos que no son abiertos ni cerrados.

► Conjunto acotado

Se dice que un subconjunto A es acotado cuando está contenido en una bola de radio finito.

Definiciones

► Conjunto compacto

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

► Punto de acumulación

Se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es punto de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ cuando todo entorno reducido, $U^(x)$ contiene puntos de A , es decir, se verifica que $U^*(x) \cap A \neq \emptyset$.*

► Teorema de Bolzano-Weierstrass

Todo conjunto infinito y acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene al menos un punto de acumulación.

Definiciones

Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{ccc} X \subseteq \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) & \rightarrow & y = f(x) \end{array}$$

A estas funciones se las conoce como funciones reales de n variables o *campos escalares*.

- Haremos especial énfasis en las funciones

$$\begin{array}{l} f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } X \subseteq \mathbb{R}^2 \\ z = f(x, y) \end{array}$$

Definiciones

Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Esta función vectorial f , equivale a m funciones reales de n variables también reales.

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

► Dominio natural de definición

Sea una función $y = f(x)$, con $x \in \mathbb{R}^n$, e $y \in \mathbb{R}$. El conjunto de los puntos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ para los cuales está definida la función $y = f(x)$ se llama dominio natural de definición de la función y se suele representar por X .

Definiciones

► Gráfica de una función

Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Definamos la gráfica de f como el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ que consta de los puntos $(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$ con $(x_1, \dots, x_n)$ en X . Simbólicamente

$$\text{gráfica de } f = \left\{ (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} / (x_1, \dots, x_n) \in X \right\}$$

Para el caso $n = 1$, la gráfica es una curva, mientras que para $n = 2$ es una superficie. Para acercarnos a la forma de esta gráfica introducimos la idea de *conjunto de nivel*.

► Conjunto de nivel

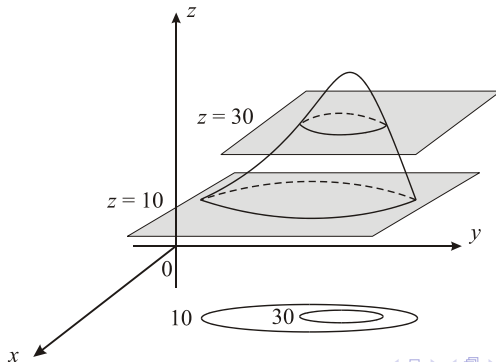
Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, con $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. El conjunto de nivel de valor c está definido como aquellos puntos $x \in X$ para los que $f(x) = c$. Simbólicamente

$$\{x \in X / f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n$$

Gráficas

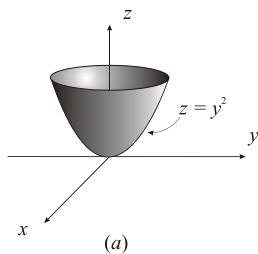
Si $n = 2$ nos referimos a una *curva de nivel* (de valor c) y si $n = 3$ nos referimos a una *superficie de nivel*.

En el caso particular de una función $z = f(x, y)$, podemos intuir el aspecto de la gráfica elevando mentalmente cada curva de nivel a la altura c , de la misma forma que lo hacemos ante un mapa topográfico para intuir el relieve de un paisaje.

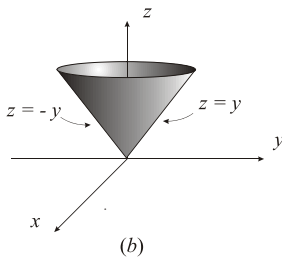


Gráficas

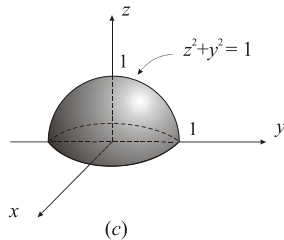
Veamos a continuación las gráficas de algunas funciones usuales $z = f(x, y)$ y que pueden deducirse fácilmente con el método de las curvas de nivel, completando el estudio con algún corte con planos verticales.



(a) Paraboloide:
 $z = x^2 + y^2$



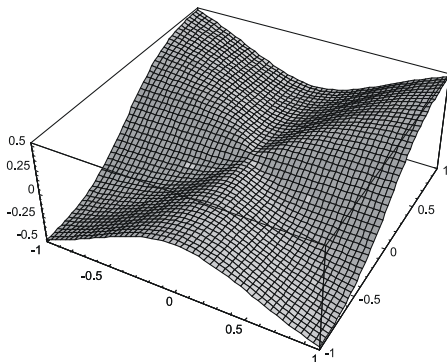
(b) Cono:
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



(c) Semiesfera:
 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Gráficas

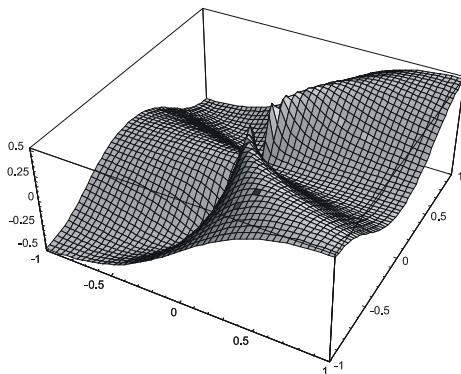
Veamos a continuación las gráficas de algunas funciones $z = f(x, y)$ que utilizaremos en los ejemplos.



Gráfica de $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Gráficas

Veamos a continuación las gráficas de algunas funciones $z = f(x, y)$ que utilizaremos en los ejemplos.



Gráfica de $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$.

Límite de una función en un punto

► Límite

Sea una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, con $X \subseteq \mathbb{R}^n$, y a un punto de acumulación de X . Se dice que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de la función en el punto a , y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$\text{para cada } x \in (B(a, \delta) - \{a\}) \cap X \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

► Proposición

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, a punto de acumulación de X y $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ una función de X en $\mathbb{R}^m$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l = (l_1, l_2, \dots, l_m) \iff \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = l_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Límite de una función en un punto

► Proposición

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, a punto de acumulación de X y f y g funciones de X en $\mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2 \quad \text{y} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

se verifican las siguientes propiedades

- a) $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f)(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{l_1}{l_2} \quad (\text{si } l_2 \neq 0)$
- d) $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = l_1 l_2$

Límite de una función en un punto

► Límites relativos a un conjunto (según una trayectoria)

Dados una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, un subconjunto $S \subseteq X$, y a punto de acumulación de S , se dice que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de f relativo al conjunto S (o sobre S) en el punto a y se escribe

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in S}} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$\text{para cada } x \in (X \cap S) \wedge (0 < \|x - a\| < \delta) \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$$

► Proposición

Si existe el límite de $f(x)$ en el punto a y es l entonces también existe el límite de f relativo a cualquier subconjunto S de X en el punto a y coincide con l .

Límite de una función en un punto

Este resultado permite probar en algunos casos la no existencia del límite. Si para dos subconjuntos B , C de X se verifica

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in B}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in C}} f(x)$$

o bien no existe alguno de estos límites, entonces puede asegurarse que no existe

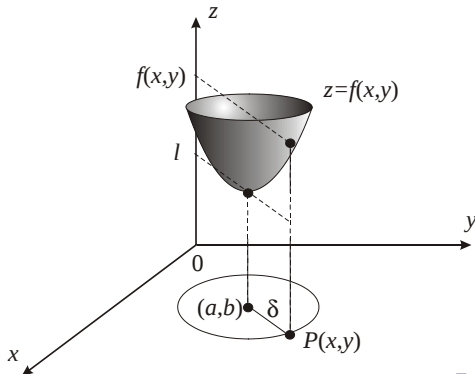
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Límite de una función en un punto ($z=f(x,y)$)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$$

tal que para cada (x,y) que verifique

$$0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2 \implies |f(x,y) - l| < \varepsilon$$



Límite de una función en un punto ($z=f(x,y)$)

Supongamos que existe el límite doble

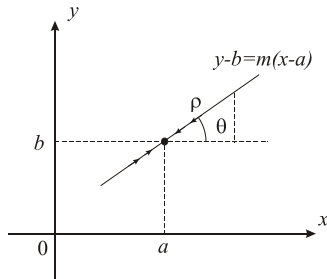
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$$

éste debe coincidir con el límite obtenido al imponer a los puntos (x,y) que pertenezcan a una determinada trayectoria que finalice en el punto (a,b) , como vimos anteriormente. El recíproco no es cierto. Es decir, el que exista el límite según una determinada trayectoria, no significa que exista el límite doble.

De todas las trayectorias, las más sencillas son las rectas, que admiten dos tratamientos:

Límite de una función en un punto ($z=f(x,y)$)

Límites radiales.



Siendo $X_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = b + m(x - a)\}$, los límites radiales son los límites de $f(x, y)$ relativos al subconjunto X_m

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in X_m}} = \lim_{x \rightarrow a} f[x, b + m(x - a)]$$

Límite de una función en un punto ($z=f(x,y)$)

Límites direccionales.

Los límites direccionales, son los radiales utilizando coordenadas polares

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in X_m}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta)$$

Se ve fácilmente que si los límites radiales dependen de la pendiente m o los límites direccionales dependen del ángulo θ , entonces el límite doble no existe.

Límite de una función en un punto ($z=f(x,y)$)

Para evitarnos el cálculo del límite mediante la definición, también utilizaremos el siguiente concepto.

► Límites reiterados

Sea la función $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y (a, b) un punto interior de X .
Llamaremos

$$f_1(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y); \quad f_2(y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$$

Se llaman *límites reiterados* a los límites

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right] \\ \lim_{y \rightarrow b} f_2(y) &= \lim_{y \rightarrow b} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right] \end{aligned} \right\}$$

Límite de una función en un punto ($z=f(x,y)$)

- ▶ **Relación entre los límites reiterados y el límite de la función**
 - *Si existen los límites reiterados, pero son distintos, entonces no existe el límite doble.*
 - *Puede existir el límite doble y no existir alguno (o ninguno) de los límites reiterados.*
 - *Si existe uno de los límites reiterados, el límite doble, en caso de existir, coincidirá con él.*

Límite de una función en un punto ($z=f(x,y)$)

Lo expuesto hasta ahora sólo nos sirve para afirmar que, o bien no existe el límite doble, o bien, si existe, su valor debe de ser l . Por eso enunciaremos un criterio que nos permita asegurar, si el candidato al límite sugerido por los métodos anteriores es realmente el límite doble.

► Criterio de la función mayorante

Dada una función $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una condición necesaria y suficiente para que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = l$$

es que exista una función $F(\rho)$, en todo el campo de variación de θ que recorra X , tal que

$$|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - l| \leq F(\rho) \quad \text{y} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho) = 0$$

Continuidad

► Definición

Sea una función $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $a \in X$ punto de acumulación de X . Se dice que f es continua en a , si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

En el caso concreto de una función de dos variables $z = f(x, y)$, se dice continua en un punto (a, b) si y solo si

- 1) $\exists f(a, b)$
- 2) $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$
- 3) $f(a, b) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$

Continuidad

► Proposición

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ y a un punto de X . Una condición necesaria y suficiente para que f sea continua en a es que cada una de las funciones componentes f_i sea continua en a .

► Proposición

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in X$ y f, g dos funciones de X en $\mathbb{R}$, continuas en a . Se verifican las siguientes propiedades:

- a) $\alpha f + \beta g$ es continua en a ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).*
- b) $f \cdot g$ es continua en a .*
- c) si $g(a) \neq 0$, entonces f/g es continua en a .*

Continuidad en un conjunto

Se dice que una función $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, es continua en X , cuando es continua en cada punto $x \in X$. Se verifica la siguiente propiedad.

► **Teorema de Weierstrass**

Sean X un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f alcanza un mínimo y un máximo en X , es decir existen $x_0, x_1 \in X$ tales que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo x de X .

Derivadas parciales de $z=f(x,y)$

► Definición

Sean f una función definida en un abierto A de $\mathbb{R}^2$ que toma valores en $\mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y (x_0, y_0) un punto de A . Diremos que f es derivable respecto a x en el punto (x_0, y_0) si existe el límite siguiente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Este límite se llama *derivada parcial respecto a x de f en (x_0, y_0)* .

La representaremos en cualquiera de las formas siguientes:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \quad f'_x(x_0, y_0); \quad D_1 f(x_0, y_0)$$

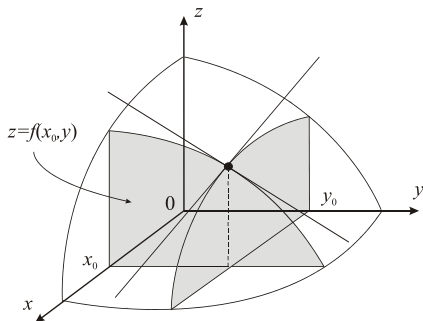
► Definición

De forma analógica se define la derivada parcial de f respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Derivadas parciales de $z=f(x,y)$

La representación gráfica de una función $z = f(x, y)$ es una superficie del espacio tridimensional. Si asignamos a y un valor fijo, $y = y_0$, la función de la variable x , $z = f(x, y_0)$, vendrá representada por la intersección del plano $y = y_0$ con dicha superficie. La derivada de esta función en el punto $x = x_0$ será precisamente $f'_x(x_0, y_0)$, y representará la pendiente de la tangente a la curva $z = f(x, y_0)$ en el punto $x = x_0$. El mismo razonamiento nos servirá para interpretar $f'_y(x_0, y_0)$.



Derivadas parciales

Podemos generalizar el concepto de derivada parcial a funciones de n variables.

► **Definición**

Sea f una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$; se dice que f es derivable respecto x_i en el punto $(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)$ si existe el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h}$$

Este límite lo denotaremos en las formas siguientes

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \dots, a_n); \quad f'_{x_i}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Diferencial de $z=f(x,y)$

Al formar las derivadas parciales anteriores f'_x y f'_y los incrementos en las variables x e y se consideraron separadamente; vamos a considerar ahora el efecto de incrementar x e y simultáneamente

$$\Delta z = f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

► Diferenciabilidad

Sea f una función definida en un abierto A de $\mathbb{R}^2$ que toma valores en $\mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y (a_1, a_2) y $(a_1 + h, a_2 + k)$ dos puntos de A . Se dice que f es diferenciable en el punto (a_1, a_2) cuando el incremento de f se puede expresar como (con a y b números reales)

$$\Delta z = ah + bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

La función lineal $ah + bk$ se denomina *diferencial* de f en (a_1, a_2) y se representa por

$$df(a_1, a_2)(h, k) = ah + bk$$

Diferencial de $z=f(x,y)$

► Condición necesaria de diferenciabilidad

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y (a_1, a_2) un punto de A . Si la función f es diferenciable en (a_1, a_2) , entonces es continua en este punto.

► Condición necesaria de diferenciabilidad

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $(a_1, a_2) \in A$ y $df = ah + bk$, entonces existen las derivadas parciales de f en el punto (a_1, a_2) y

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2); \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$$

Diferencial de $z=f(x,y)$

► Condición suficiente de diferenciabilidad

Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $(a_1, a_2) \in A$. Si existen las derivadas parciales de $f(x, y)$ en el punto (a_1, a_2) y al menos una de ellas es continua en dicho punto, $f(x, y)$ es diferenciable en (a_1, a_2) .

► Condición necesaria y suficiente de diferenciabilidad

Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y (a_1, a_2) un punto de A . La función f es diferenciable en (a_1, a_2) si y sólo si

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2) - f'_x(a_1, a_2)h - f'_y(a_1, a_2)k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Diferencial de $z=f(x,y)$ como aplicación lineal

► Diferenciabilidad

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y (a_1, a_2) un punto de A . Se dice que f es diferenciable en (a_1, a_2) si existe una aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ verificando

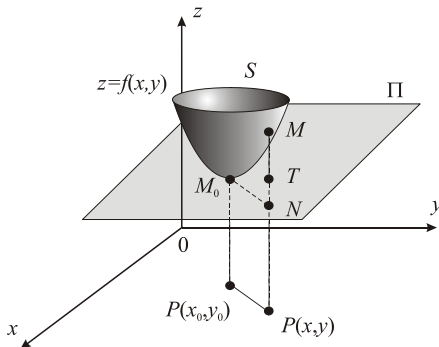
$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2) - \lambda(h, k)|}{\|(h, k)\|} = 0$$

Se cumple que esta aplicación lineal es única y que por lo tanto, es la diferencial de f definida anteriormente

$$df(a_1, a_2) = \lambda(h, k) = \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x} h + \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial y} k$$

Nota: Análogamente se definiría la diferencial en un punto para *campos escalares*.

Interpretación geométrica de la diferencial de $z=f(x,y)$



El valor de la diferencial de una función en un punto (x_0, y_0) es numéricamente igual al incremento de la coordenada z del plano tangente en dicho punto: $|NT|$.

Aplicación de la diferencial a cálculos aproximados

Del incremento de la función obtenemos

$$\Delta z = f(x + h, y + k) - f(x, y) \implies f(x + h, y + k) = f(x, y) + \Delta z$$

Aproximando el incremento de la función por su diferencial

$$|MN| = \Delta z \simeq |NT| = dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k$$

podemos escribir la fórmula aproximada

$$f(x + h, y + k) \simeq f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k$$

en la que el error cometido es un infinitésimo de orden superior a $\sqrt{h^2 + k^2}$.

Derivada direccional

► Definición

Sean una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con A abierto de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un punto de A y $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ un vector no nulo de $\mathbb{R}^n$. El límite

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + hv_1, a_2 + hv_2, \dots, a_n + hv_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h} \end{aligned}$$

si existe, se denomina derivada de la función f en el punto a según la dirección v y se denota por $D_v f(a)$.

Si $\|v\| = 1$ entonces $D_v f(a)$ se llama derivada direccional, según el vector, de la función f en el punto a .

Nota: Como caso particular, si tomamos vectores de la base canónica, podemos dar de nuevo, la definición de derivada parcial.

Derivada direccional de $z=f(x,y)$

Si tenemos una función de dos variables $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$, entonces

$$D_v f(a_1, a_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + hv_1, a_2 + hv_2) - f(a_1, a_2)}{h}$$

es la derivada de f en el punto (a_1, a_2) en la dirección del vector $v = (v_1, v_2)$. Si

$$v_1^2 + v_2^2 = 1$$

entonces se llama derivada direccional.

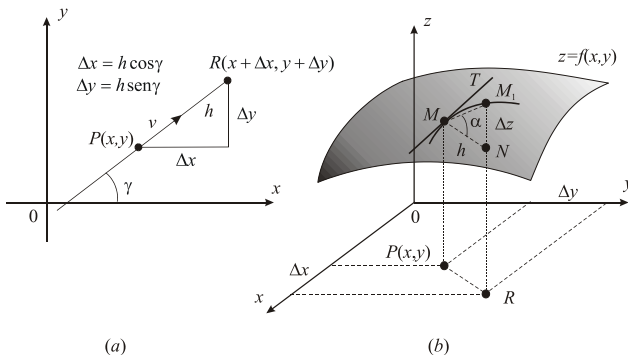
► Proposición

Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y (x, y) punto de A . Sea $v = \cos \gamma i + \sin \gamma j$. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en (x, y) , entonces existe la derivada direccional en cualquier dirección γ y se cumple

$$D_\gamma f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \sin \gamma$$

Interpretación geométrica de la derivada direccional de $z=f(x,y)$

$$v = \cos \gamma i + \sin \gamma j$$



$$D_v(x, y) = \operatorname{tg} \alpha$$

Gradiente de $z=f(x,y)$

► Definición

Llamaremos *gradiente* de la función $z = f(x,y)$ en el punto (x,y) al vector $f'_x(x,y)i + f'_y(x,y)j$ asociado al punto (x,y) . Se representa

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \nabla f(x,y) = f'_x(x,y)i + f'_y(x,y)j$$

► Proposición

Dada una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en un punto (x,y) de A , la derivada direccional de f en el punto (x,y) en la dirección γ es igual al producto escalar del gradiente por el vector unitario v correspondiente a esta dirección $e_\gamma = \cos \gamma i + \sin \gamma j$

$$D_\gamma f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot e_\gamma$$

Propiedades del gradiente de $z=f(x,y)$

► Proposición

En cada punto (x, y) el gradiente de la función $f(x, y)$ indica la dirección según la cual la derivada direccional es máxima.

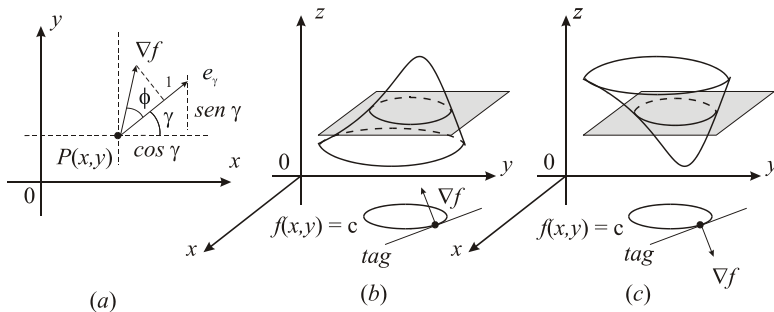
► Proposición

En cada punto (x, y) el vector $\text{grad}f(x, y)$ va dirigido según la normal en ese punto a la curva de nivel de la superficie $z = f(x, y)$.

► Proposición

La derivada de la función $z = f(x, y)$ según la dirección de la tangente a la línea de nivel es cero.

Propiedades del gradiente de $z=f(x,y)$



Gradiente de $z=f(x,y)$

Podemos generalizar el concepto de gradiente a funciones de n variables.

► Definición

Sea f una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Llamaremos gradiente de la función f en el punto $a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ al vector

$$\operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a) = (f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_i}(a), \dots, f'_{x_n}(a))$$

Diferencial de una función vectorial de variable vectorial

► Proposición

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $a \in A$. Una función $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ de A en $\mathbb{R}^m$ es diferenciable en a si y sólo si sus funciones componentes $f_1, f_2, \dots, f_m$, como funciones de A en $\mathbb{R}$, son diferenciables en a , y en este caso $df(a)$ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ que tiene por componentes

$$df(a) = (df_1(a), df_2(a), \dots, df_m(a))$$

Podemos pues escribir

$$\begin{array}{llll} \lambda : & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ & h & \rightarrow & \lambda(h) \\ & (h_1, h_2, \dots, h_n) & \rightarrow & (df_1(a), df_2(a), \dots, df_m(a))(h) \end{array}$$

Diferencial de una función vectorial de variable vectorial

► Matriz Jacobiana

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$ y $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ una función de A en $\mathbb{R}^m$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales respecto de cada variable en el punto a . La matriz $(m \times n)$

$$Jf(a) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_n f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_n f_2(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \dots & D_n f_m(a) \end{pmatrix}$$

se llama matriz jacobiana de f en el punto a .

► Proposición

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$ y $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ una función de A en $\mathbb{R}^m$ diferenciable en a . Entonces la matriz de la aplicación lineal $df(a)$ es $Jf(a)$:

$$\lambda(h) = df(a)(h) = Jf(a) \cdot h$$

Derivada de la función compuesta

Sea

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & & (x, y, z) & & w(u, v) = (g \circ f)(u, v) \end{array}$$

Se cumple

$$dw(u, v) = d(g \circ f)(u, v) = dg(x, y, z) \circ df(u, v)$$

Por tanto se cumple que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \cdot Jf(a)$$

Derivada de la función compuesta

Regla de la cadena

Sean las funciones

$$\begin{cases} x = \phi_1(u, v) \\ y = \phi_2(u, v) \\ z = \phi_3(u, v) \end{cases}$$

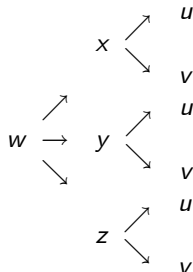
diferenciables en (u, v) y sea g la función

$$w = g(x, y, z)$$

diferenciable en el punto (x, y, z) correspondiente a (u, v) . Entonces se verifica

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$$



Derivadas de orden superior

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y f una función de A en $\mathbb{R}$. Sea $\phi(x, y) : A \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $\phi(x, y) = f'_x(x, y)$. Si para un $(a_1, a_2) \in A$ existe $\phi'_y(a_1, a_2)$, esta derivada parcial de ϕ se llama *derivada parcial segunda* respecto de las variables x e y de la función f en el punto (a_1, a_2) y se designa por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) = f''_{xy}(a_1, a_2)$$

Igualmente se definiría

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f'''_{xxx}; \quad \dots$$

► Teorema de Schwarz

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos la existencia de f'_x, f'_y, f''_{xy} en una bola de centro (x_0, y_0) y la continuidad de f''_{xy} en (x_0, y_0) , entonces existe $f''_{yx}(x_0, y_0)$ y coinciden

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Diferenciales de orden superior

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^2$, y $(x, y) \in A$. La diferencial de f es

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

Obsérvese que la $df(x, y)$ vuelve a ser una función de las variables x e y , por lo que, supuesto que sea diferenciable en (x, y) podemos calcular su diferencial y la llamaremos *diferencial segunda* de f , denotándola por d^2f .

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Se suele utilizar la siguiente notación

$$d^2f = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(2)} f(x, y)$$

Diferenciales de orden superior

- En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k + \\ &+ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} k^2 + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)^2 \end{aligned}$$

- La diferencial n -ésima sería $d^n f = d [d^{n-1} f]$ y se puede demostrar que

$$d^n f = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n)} f(x, y)$$

Funciones definidas implícitamente

Decimos que y es función implícita de x cuando viene dada, indirectamente, por una ecuación de la forma

$$F(x, y) = 0$$

► **Teorema de la función Implícita para $F(x, y) = 0$**

Sea $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ con A subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y $(x_0, y_0) \in A$, una función $F(x, y)$ que satisface las siguientes condiciones:

i) $F(x_0, y_0) = 0$.

ii) Las derivadas parciales respecto x e y son continuas en una bola de centro (x_0, y_0) .

iii) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Entonces, existen dos intervalos $[x_0 - a, x_0 + a]$, $[y_0 - b, y_0 + b]$ y una única función $y = f(x)$, $f : [x_0 - a, x_0 + a] \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b]$ continua y derivable, tal que $F(x, f(x)) = 0$ y su derivada viene dada por

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

Funciones definidas implícitamente

Decimos que z es función implícita de x e y cuando viene dada, indirectamente, por una ecuación

$$F(x, y, z) = 0$$

► Teorema de la función Implícita para $F(x, y, z) = 0$

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^3$, $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas en un entorno de (x_0, y_0, z_0) y $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Si $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ entonces, existe un abierto V de $\mathbb{R}^3$ con $(x_0, y_0, z_0) \in V$, un abierto W en $\mathbb{R}^2$ y una función $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ continua y diferenciable tal que $F'_z(x, y, z) \neq 0, \forall (x, y, z) \in V$ y $F(x, y, f(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in W$. Además si $z = f(x, y)$

$$dz = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}dx - \frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}dy \implies$$

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}; \quad f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Funciones definidas implícitamente. Sistemas de ecuaciones

Consideremos ahora que tenemos funciones implícitas definidas mediante un *sistema de ecuaciones*. En general, para saber cuántas funciones (y de cuántas variables independientes) se pueden obtener de un sistema de ecuaciones, es muy útil recordar la siguiente regla

$$\begin{array}{ccc} \text{Sistema} & & \\ m \text{ ecuaciones} & \implies & m \text{ funciones} \\ n \text{ incógnitas} & & n - m \text{ variables indep.} \end{array}$$

Derivada de la función inversa

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$ y $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ una función de A en $\mathbb{R}^n$. Si f es diferenciable en a , entonces la inversa de f , que denotaremos como f^{-1} es diferenciable en $f(a)$ y además se cumple que

$$J(f^{-1})(f(a)) = (Jf(a))^{-1}$$

Nota: Observar que, en general

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}}$$

Extremos Relativos. Definiciones

Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de A en $\mathbb{R}$.

► Máximo relativo

Se dice que f alcanza un máximo relativo en $a \in A$ si existe una bola, $B(a, r)$, tal que $f(x) \leq f(a)$ para cada $x \in A \cap B(a, r)$. Si se verifica que $f(x) < f(a)$ para cada $x \in A \cap (B(a, r) - \{a\})$ se dice que el máximo es estricto.

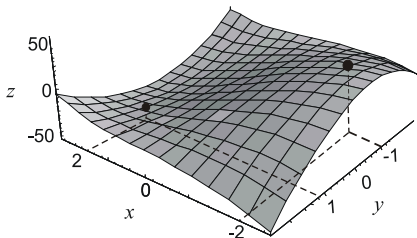
► Mínimo relativo

Se dice que f alcanza un mínimo relativo en $a \in A$ si existe una bola, $B(a, r)$, tal que $f(x) \geq f(a)$ para cada $x \in A \cap B(a, r)$. Si se verifica que $f(x) > f(a)$ para cada $x \in A \cap (B(a, r) - \{a\})$ se dice que el mínimo es estricto.

► Punto de Silla

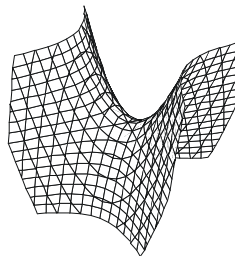
Se dice que f alcanza un punto de silla (o ensilladura) en $a \in A$ si para toda bola $B(a, r)$, se tienen puntos $x \in A \cap B(a, r)$ con $f(x) \geq f(a)$ y $f(x) \leq f(a)$.

Extremos Relativos. Definiciones



Extremos de

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$



Punto de silla: $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Extremos Relativos. Condiciones Necesarias

► Proposición

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de A en $\mathbb{R}$. Si $a \in A$ es un punto de extremo relativo de f y existen las derivadas parciales $D_i f(a)$, $i = 1, \dots, n$ entonces

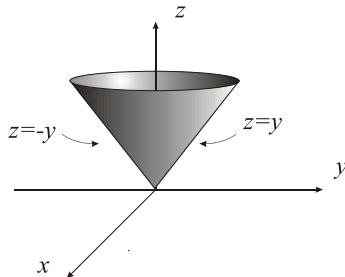
$$D_i f(a) = 0; \quad i = 1, \dots, n$$

► Punto crítico

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de A en $\mathbb{R}$ con derivadas parciales en un punto $a \in A$. Si $D_i f(a) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$, se dice que a es un punto crítico de f .

Extremos Relativos. Condiciones Necesarias

- Igual que ocurría en funciones de una variable, una función de varias variables puede tener extremos en puntos donde no es derivable.



$$\text{Cono } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

El origen es un mínimo, pero en él no existen las derivadas parciales $\partial f / \partial x$ y $\partial f / \partial y$.

- Para simplificar nuestro estudio en lo sucesivo nos limitaremos a estudiar y a buscar extremos en los puntos donde existen dichas derivadas parciales.

Extremos Relativos. Condiciones Suficientes

► Forma cuadrática

Una forma cuadrática

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

(con $a_{ij} = a_{ji}$ para $i, j = 1, 2, \dots, n$) se denomina:

- definida positiva si $F(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ distinto de 0.
- definida negativa si $F(x) < 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ distinto de 0.
- indefinida si toma tanto valores positivos como negativos.

Extremos Relativos. Condiciones Suficientes

► Proposición

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que f tiene derivadas continuas de segundo orden en A y que $x_0 \in A$ es un punto crítico de f . Si la forma cuadrática, diferencial segunda de f en el punto x_0 :

$$\begin{aligned} F(h) &= F(h_1, h_2, \dots, h_n) = \\ &= \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(2)} f(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) = d^2 f(x_0) \end{aligned}$$

- *es definida positiva entonces x_0 es un mínimo estricto.*
- *es definida negativa entonces x_0 es un máximo estricto.*
- *es indefinida entonces en el punto x_0 no hay extremo (es un punto de silla).*

Extremos Relativos. Condiciones Suficientes

- ▶ Sea $f(x_1, x_2, \dots, x_n) : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ Se denomina H *matriz Hessiana* a la matriz siguiente

$$H = (D_{ij}f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}; \quad 1 \leq i, j \leq n$$

- ▶ Denotaremos como Δ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ los *menores principales* de dicha matriz.

$$\Delta_1 = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}; \quad \dots \quad \Delta_k = (D_{ij}f), \quad 1 \leq i, j \leq k$$

Extremos Relativos. Condiciones Suficientes

► Proposición (criterio de Sylvester)

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Supongamos que $x_0 \in A$ es un punto crítico de f , y sean Δ_k los menores principales en x_0 .

a) Si $\Delta_k > 0$ para $k = 1, 2, \dots, n$ entonces en x_0 se alcanza un mínimo estricto de f .

b) Si $(-1)^k \Delta_k > 0$ para $k = 1, 2, \dots, n$ entonces en x_0 se alcanza un máximo estricto de f .

c) Si $\Delta_n \neq 0$ y no se cumple ni a) ni b) entonces en x_0 hay un punto de silla de f .

Extremos Relativos. Condiciones Suficientes

En el caso particular de funciones de dos variables $z = f(x, y)$, llamaremos determinante *Hessiano* a

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

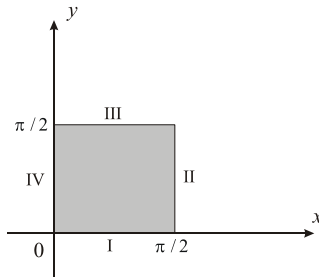
► Proposición

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales de segundo orden continuas y $(x_0, y_0) \in A$ un punto crítico de f . Entonces:

- si en $(x_0, y_0) : \Delta_2 > 0$, (x_0, y_0) es un punto de extremo estricto, (máximo estricto, si en este punto $f''_{xx} < 0$ y mínimo estricto, si $f''_{xx} > 0$).
- si en $(x_0, y_0) : \Delta_2 < 0$ entonces hay un punto de silla (no hay extremo) en (x_0, y_0) .
- si en $(x_0, y_0) : \Delta_2 = 0$ el criterio no decide.

Extremos Absolutos

- ▶ Recordemos que en el caso de una función de una variable $y = f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$ se estudiaban los extremos relativos en el abierto (a, b) y luego se estudiaba la función en la frontera, es decir en los puntos a y b . En realidad tan sólo se buscaban los puntos críticos en el abierto (a, b) (sin discutirlos).
- ▶ Para funciones de varias variables se trata de la misma idea, con los lógicos cambios de dimensión.



Extremos Condicionados

Dos métodos clásicos que resuelven extremos condicionados:

- **Eliminación de la condición**

Este método, en ocasiones, debe manejarse con precaución, como veremos en los ejemplos.

- **Método de los Multiplicadores de Lagrange (MML)**

Se basa en formar la función auxiliar (*función de Lagrange* o *Lagrangiana*)

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \phi(x, y)$$

Veremos que los extremos condicionados de $f(x, y)$ se pueden encontrar entre los puntos críticos de $F(x, y)$.

Extremos Condicionados (MML)

► Teorema de Lagrange. Condiciones necesarias

Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f(x, y), \phi(x, y) : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones con derivadas parciales continuas en A y $X = \{(x, y) \in A / \phi(x, y) = 0\}$. Si (x_0, y_0) es un punto de extremo condicionado de $f(x, y)$ sobre X y el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} \phi'_x(x_0, y_0) & \phi'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

es 1, entonces existe un número real λ tal que (x_0, y_0) es un punto crítico de la función

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \phi(x, y)$$

Nota. Esta proposición nos da condiciones necesarias pero no suficientes para la existencia de extremos condicionados. Además que el rango de la matriz sea 1 equivale a que no se anulen simultáneamente las dos derivadas parciales de ϕ .

Extremos Condicionados (MML)

► Teorema de Lagrange. Condiciones suficientes

Si la diferencial segunda de $F(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) es una forma cuadrática definida positiva (respectivamente definida negativa) de las variables dx, dy , a condición de que estas satisfagan

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

entonces (x_0, y_0) es un punto de mínimo (máximo) estricto condicionado de f sobre X . Si la forma cuadrática es indefinida, no existe máximo ni mínimo.

Extremos Condicionados (MML)

- Es decir, la discusión de los puntos críticos se realiza analizando la forma cuadrática, función de (dx, dy)

$$d^2F = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(2)} F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2$$

estando ligadas las diferenciales (dx, dy) por la relación

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

que se obtiene diferenciando la condición.

- En la práctica, el estudio del carácter del eventual extremo suele deducirse de la naturaleza física o geométrica del problema a resolver. La razón de esto es que la discusión del signo de d^2F no es, en general, un problema sencillo.

Extremos Condicionados (MML). Generalización

► Definición

Sean G un abierto de $\mathbb{R}^n$; $f_0: G \rightarrow \mathbb{R}$; X subconjunto de G tal que

$$X = \{x \in G / f_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

y $x_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) \in X$. El punto x_0 se dirá punto de extremo condicionado de la función f_0 respecto de las ecuaciones $f_i(x) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) si es un punto de extremo ordinario de esta función, al considerarse ésta sólo en el conjunto X .

Extremos Condicionados (MML). Generalización

► Teorema de Lagrange. Condiciones necesarias

Sean G un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f_i : G \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 0, 1, 2, \dots, m$ funciones con derivadas parciales continuas en G y

$$X = \{x \in G \mid f_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m\}, (m < n)$$

Si $x_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$ es un punto de extremo condicionado de f_0 sobre X y el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

es m , entonces existen m números reales $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ tales que x_0 es un punto crítico de la función

$$F = f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m$$

Extremos Condicionados (MML). Generalización

► Teorema de Lagrange. Condiciones suficientes

Si la diferencial segunda de $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en el punto x_0 es una forma cuadrática definida positiva (respectivamente definida negativa) de las variables $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, a condición de que estas satisfacen el sistema

$$\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_n} dx_n = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

entonces x_0 es un punto de mínimo (máximo) estricto condicionado de f_0 sobre X . Si la forma cuadrática es indefinida, no existe máximo ni mínimo.