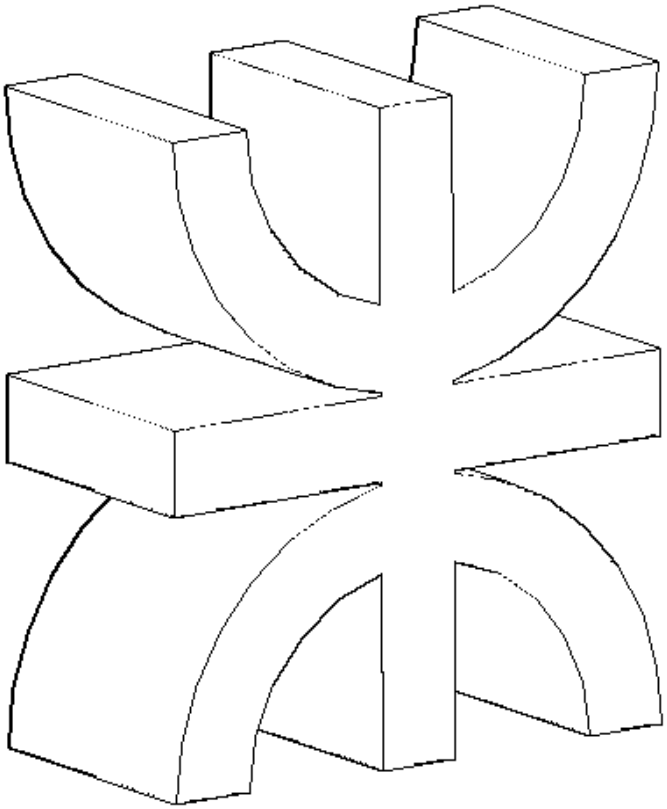
Unidad N°1

SISTEMAS DE FUERZAS

Estabilidad I – Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Buenos Aires



CONCEPTO DE FUERZA

Para el estudio de esta unidad consideramos como **FUERZA** a toda causa capaz de producir o modificar el movimiento de un cuerpo.

TIPOS DE FUERZAS

a. Distribuidas →
- Volúmenes.
- Superficies.
- Líneas (concepción teórica).

b. Concentradas → Son fuerzas cuya superficie de contacto es tan pequeña que puede considerarse puntual.

SISTEMAS DE FUERZAS DISTRIBUIDAS

Está constituido por un conjunto continuo de fuerzas de módulos diferenciales (dP).

SISTEMAS DE FUERZAS CONCENTRADAS

Está constituido por un conjunto discreto de fuerzas de módulos finitos que actúan simultáneamente sobre un cuerpo.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS CONCENTRADAS

SISTEMAS ESPACIALES → Las rectas de acción de las fuerzas no están ubicadas todas sobre un mismo plano.

- No concurrentes
- Concurrentes
- Paralelas

SISTEMAS COPLANARES → Las fuerzas actúan todas sobre un mismo plano.

- No concurrentes
- Concurrentes
- Paralelas

RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS

- Es una única fuerza que produce sobre el cuerpo el mismo efecto que provoca todo el sistema.

- Determinar la resultante de un sistema de fuerzas es encontrar la mínima expresión del mismo.

EQUIVALENCIA ENTRE SISTEMAS DE FUERZAS

- Dos sistemas de fuerzas son equivalentes cuando producen el mismo efecto en el cuerpo sobre el cual actúan.

OBSERVACIÓN: Se entiende por “efecto” a la modificación del estado original del cuerpo.

EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS

- Un sistema de fuerzas se encuentra en equilibrio cuando no produce ningún efecto cinemático sobre el cuerpo en estudio.
- En los sistemas que admiten resultante única (concepto que se verá más adelante), se da el equilibrio cuando la misma es nula.

REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE UNA FUERZA

Datos

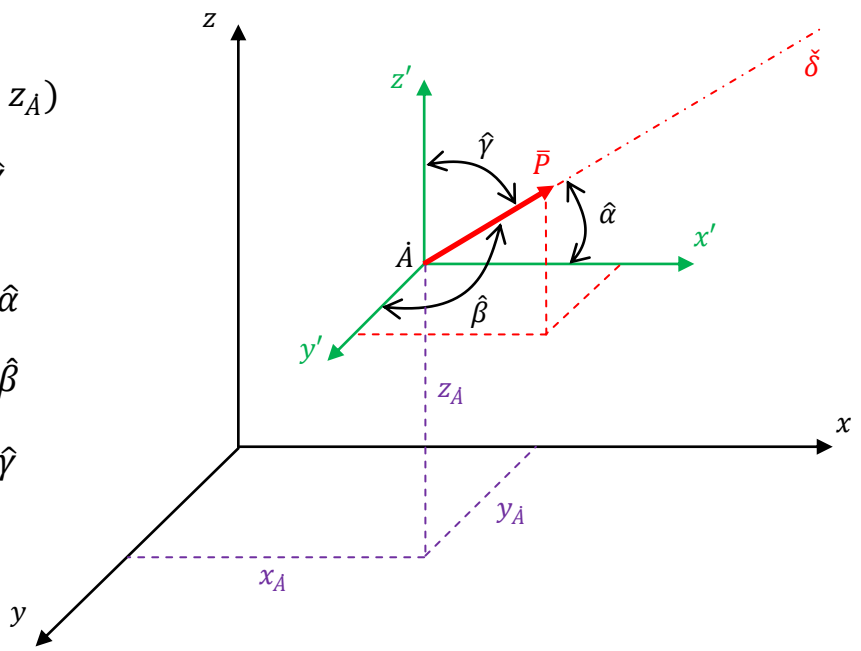
$\dot{A} \equiv (x_A; y_A; z_A)$

$\bar{P}; \hat{\alpha}; \hat{\beta}; \hat{\gamma}$

$P_x = P.cos\hat{\alpha}$

$P_y = P.cos\hat{\beta}$

$P_z = P.cos\hat{\gamma}$



$$\bar{P} = P.\left(cos\hat{\alpha}.\breve{\imath} + cos\hat{\beta}.\breve{\jmath} + cos\hat{\gamma}.\breve{k} \right) \quad (1)$$

$$cos^2\hat{\alpha} + cos^2\hat{\beta} + cos^2\hat{\gamma} = 1$$

$$\breve{\delta} = cos\hat{\alpha}.\breve{\imath} + cos\hat{\beta}.\breve{\jmath} + cos\hat{\gamma}.\breve{k} \quad (2)$$

La magnitud de la fuerza $\bar{P}$ está dada por el siguiente producto escalar:

$$P = \bar{P} x \breve{\delta} \quad (3)$$

Reemplazando (1) en (3):

$$P = P.\left(cos\hat{\alpha}.\breve{\imath} + cos\hat{\beta}.\breve{\jmath} + cos\hat{\gamma}.\breve{k} \right) x \breve{\delta} \quad (4)$$

Reemplazando (2) en (4):

$$P = P.\left(cos\hat{\alpha}.\check{\imath} + cos\hat{\beta}.\check{\jmath} + cos\hat{\gamma}.\check{k}\right)x\left(cos\hat{\alpha}.\check{\imath} + cos\hat{\beta}.\check{\jmath} + cos\hat{\gamma}.\check{k}\right) \quad (5)$$

Analizando el producto escalar:

$$\left(cos\hat{\alpha}.\check{\imath} + cos\hat{\beta}.\check{\jmath} + cos\hat{\gamma}.\check{k}\right)x\left(cos\hat{\alpha}.\check{\imath} + cos\hat{\beta}.\check{\jmath} + cos\hat{\gamma}.\check{k}\right) =$$

$$cos\hat{\alpha}.\check{\imath}.cos\hat{\alpha}.\check{\imath} + cos\hat{\alpha}.\check{\imath}.cos\hat{\beta}.\check{\jmath} + cos\hat{\alpha}.\check{\imath}.cos\hat{\gamma}.\check{k} +$$

$$cos\hat{\beta}.\check{\jmath}.cos\hat{\alpha}.\check{\imath} + cos\hat{\beta}.\check{\jmath}.cos\hat{\beta}.\check{\jmath} + cos\hat{\beta}.\check{\jmath}.cos\hat{\gamma}.\check{k} +$$

$$cos\hat{\gamma}.\check{k}.cos\hat{\alpha}.\check{\imath} + cos\hat{\gamma}.\check{k}.cos\hat{\beta}.\check{\jmath} + cos\hat{\gamma}.\check{k}.cos\hat{\gamma}.\check{k} =$$

$$cos^2\hat{\alpha}.\check{\imath}^2 + cos^2\hat{\beta}.\check{\jmath}^2 + cos^2\hat{\gamma}.\check{k}^2 =$$

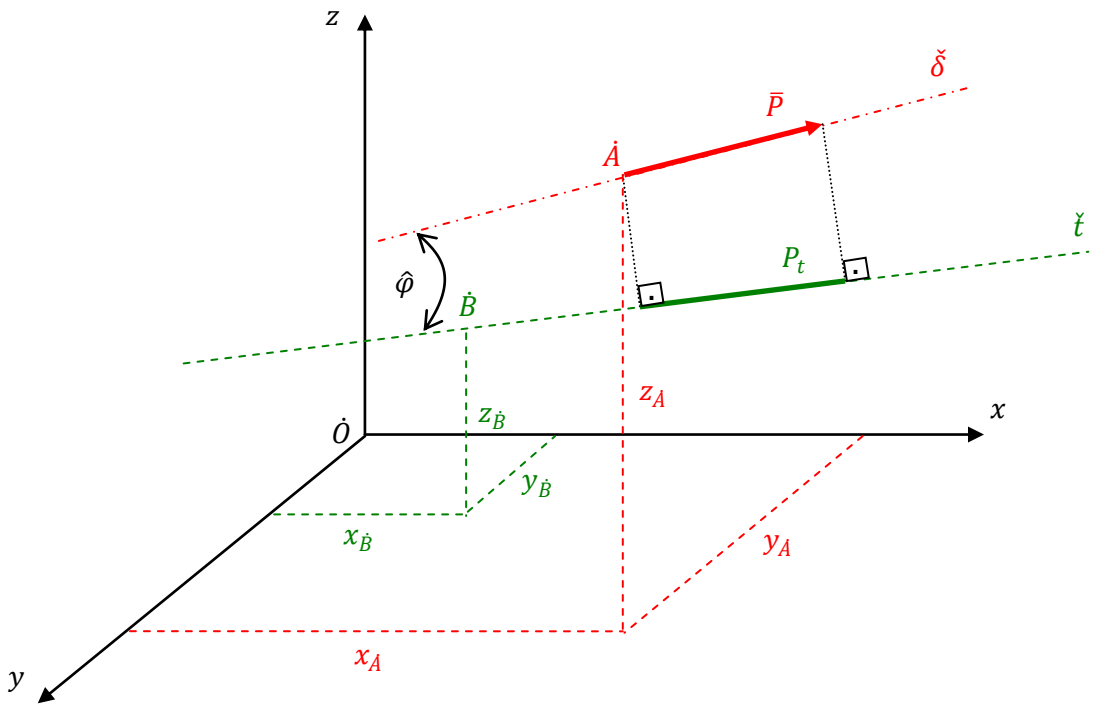
$$cos^2\hat{\alpha} + cos^2\hat{\beta} + cos^2 = 1$$

El producto escalar entre dos versores ortogonales es nulo, mientras que, el resultado de la multiplicación por sí mismo es igual a la unidad.

Por lo expuesto se verifica la ecuación (5), resultando:

$$P = P$$

PROYECCIÓN DE UNA FUERZA



$$\bar{P} = P.\left(\cos\hat{\alpha}.\check{\imath} + \cos\hat{\beta}.\check{\jmath} + \cos\hat{\gamma}.\check{k}\right) \quad (1)$$

$$\check{t} = \cos\widehat{\alpha_t}.\check{\imath} + \cos\widehat{\beta_t}.\check{\jmath} + \cos\widehat{\gamma_t}.\check{k} \quad (2)$$

$$P_t = \bar{P}x\check{t} \quad (3)$$

$$P_t = P.\left(\cos\hat{\alpha}.\check{\imath} + \cos\hat{\beta}.\check{\jmath} + \cos\hat{\gamma}.\check{k}\right)x\left(\cos\widehat{\alpha_t}.\check{\imath} + \cos\widehat{\beta_t}.\check{\jmath} + \cos\widehat{\gamma_t}.\check{k}\right)$$

$$P_t = P.\underbrace{\left(\cos\hat{\alpha}.\cos\widehat{\alpha_t} + \cos\hat{\beta}.\cos\widehat{\beta_t} + \cos\hat{\gamma}.\cos\widehat{\gamma_t}\right)}_{\cos\hat{\varphi}}$$

$$\boxed{P_t = P.\cos\hat{\varphi}}$$

MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO DE UN PUNTO

Datos

$\dot{A} \equiv (x_{\dot{A}}; y_{\dot{A}}; z_{\dot{A}})$

$\dot{O} \equiv (x_{\dot{O}}; y_{\dot{O}}; z_{\dot{O}})$

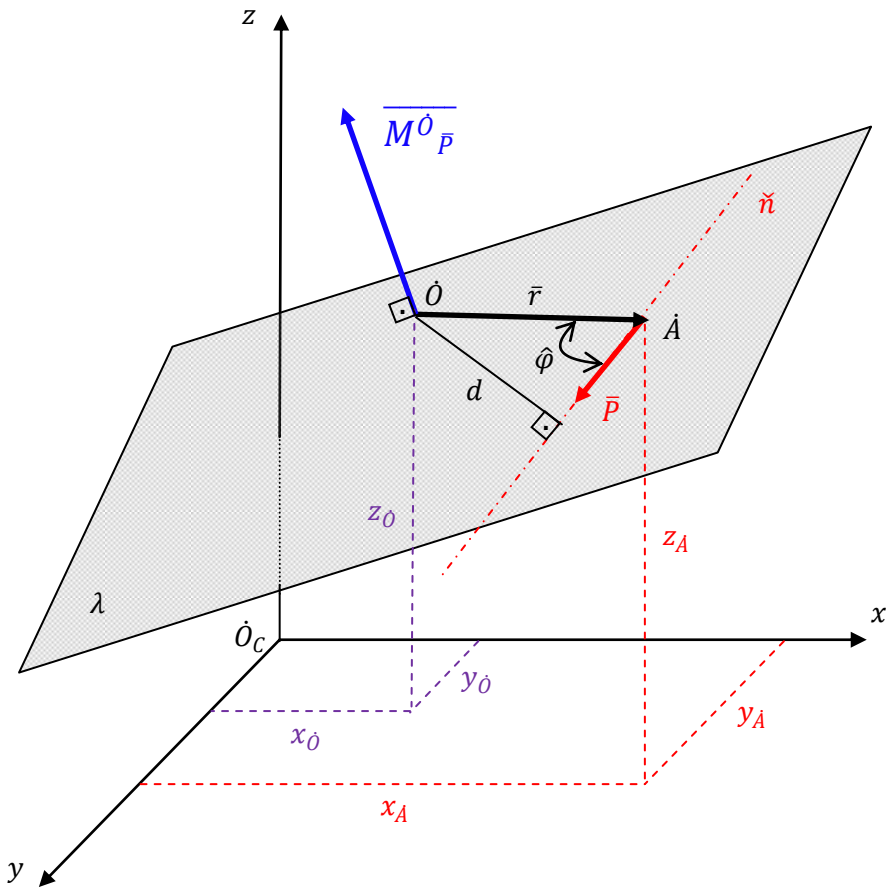
$\bar{P}; \hat{\alpha}; \hat{\beta}; \hat{\gamma}$

$\{\dot{O}; \bar{P}\} \in \lambda$

$P_x = P.cos\hat{\alpha}$

$P_y = P.cos\hat{\beta}$

$P_z = P.cos\hat{\gamma}$



$$\bar{r} = \overline{(\dot{A} - \dot{O})}$$

$$\bar{r} = \Delta x.\check{\imath} + \Delta y.\check{\jmath} + \Delta z.\check{k}$$

$$\begin{cases} \Delta x = x_{\dot{A}} - x_{\dot{O}} \\ \Delta y = y_{\dot{A}} - y_{\dot{O}} \\ \Delta z = z_{\dot{A}} - z_{\dot{O}} \end{cases}$$

$$\bar{P} = P_x.\check{\imath} + P_y.\check{\jmath} + P_z.\check{k}$$

El momento de la fuerza $\bar{P}$ respecto del punto $\dot{O}$ esta dado por el siguiente producto vectorial:

$$\overline{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}} = \bar{r} \wedge \bar{P}$$

Convención de signos: Los momentos serán positivos cuando, según la regla del observador, la fuerza tienda a producir giros en sentido horario respecto del punto considerado.

Un momento es capaz de producir una rotación de un cuerpo alrededor de su eje sostén y en el sentido correspondiente.

MAGNITUD DE UN MOMENTO

$$M_{\bar{P}}^{\dot{O}} = r.P.\sin\hat{\varphi}$$

$d = r.\sin\hat{\varphi}$, es el BRAZO DE PALANCA (la menor distancia entre el centro de momentos ($\dot{O}$) y la recta de acción de la fuerza $\bar{P}$).

$$M_{\bar{P}}^{\dot{O}} = P.d$$

$$\overline{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \underbrace{(\Delta y.P_z - \Delta z.P_y).\check{\imath}}_{\left(M_{\bar{P}}^{\dot{O}}\right)_x} + \underbrace{(\Delta z.P_x - \Delta x.P_z).\check{\jmath}}_{\left(M_{\bar{P}}^{\dot{O}}\right)_y} + \underbrace{(\Delta x.P_y - \Delta y.P_x).\check{k}}_{\left(M_{\bar{P}}^{\dot{O}}\right)_z}$$

$$\overline{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}} = \left(M_{\bar{P}}^{\dot{O}}\right)_x.\check{\imath} + \left(M_{\bar{P}}^{\dot{O}}\right)_y.\check{\jmath} + \left(M_{\bar{P}}^{\dot{O}}\right)_z.\check{k}$$

$$M_{\bar{P}}^{\dot{O}} = \sqrt{\left(M_{\bar{P}}^{\dot{O}}\right)_x^{\ 2} + \left(M_{\bar{P}}^{\dot{O}}\right)_y^{\ 2} + \left(M_{\bar{P}}^{\dot{O}}\right)_z^{\ 2}}$$

Cosenos directores del vector momento $\left(\overline{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}}\right)$:

$$\begin{cases} \cos\hat{\alpha}_{\overline{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}}} = \dfrac{\left(M_{\bar{P}}^{\dot{O}}\right)_x}{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}} \\ \cos\hat{\beta}_{\overline{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}}} = \dfrac{\left(M_{\bar{P}}^{\dot{O}}\right)_y}{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}} \\ \cos\hat{\gamma}_{\overline{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}}} = \dfrac{\left(M_{\bar{P}}^{\dot{O}}\right)_z}{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}} \end{cases}$$

Nota: Se ha hecho uso de excesiva notación a los efectos de dejar claro el concepto que se desea transmitir.

TEOREMA DE VARIGNON

El momento de la resultante de un sistema de fuerzas respecto de un punto, es igual a la suma de los momentos de cada una de las fuerzas componentes de dicho sistema respecto del mismo punto.

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{M}_{\bar{\boldsymbol{R}}}^{\dot{\boldsymbol{O}}}} = \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \overline{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{P_i}}^{\dot{\boldsymbol{O}}}}}$$

MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO DE UN EJE

Datos

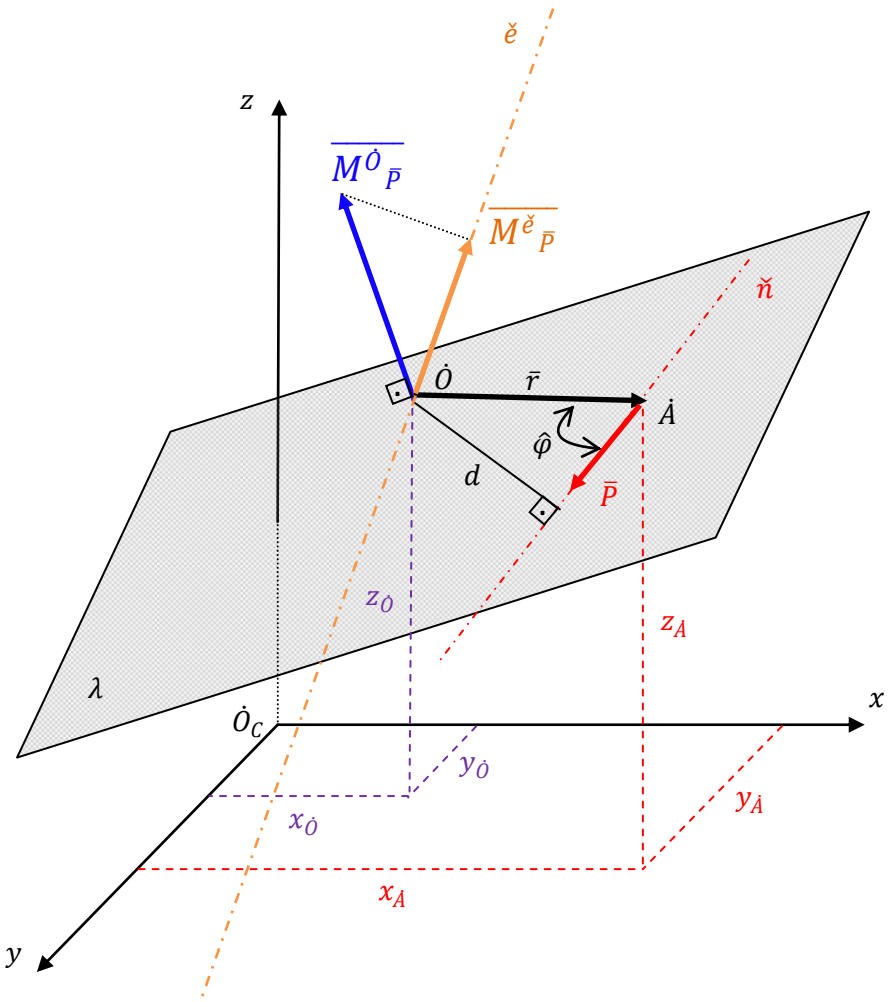
$\dot{A} \equiv (x_A; y_A; z_A)$

$\dot{O} \equiv (x_{\dot{O}}; y_{\dot{O}}; z_{\dot{O}})$

$\dot{O} \in \check{e}$

$\bar{P}; \hat{\alpha}; \hat{\beta}; \hat{\gamma}$

$\{\dot{O}; \bar{P}\} \in \lambda$



$$\bar{r} = \overline{(\dot{A} - \dot{O})}$$

$$\bar{P} = P_x.\check{\imath} + P_y.\check{\jmath} + P_z.\check{k}$$

El módulo del momento de una fuerza respecto de un eje esta dado por la proyección sobre dicho eje del vector momento de la fuerza respecto de un punto cualquiera perteneciente al eje:

$$M_{\bar{P}}^{\check{e}} = \overline{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}}\, x \check{e}$$

DEMOSTRACIÓN: Para ello, adoptamos un plano π que contenga al punto $\dot{A}$ y que sea ortogonal a $\check{e}$. También descomponemos la fuerza $\bar{P}$ en dos fuerzas componentes ($\bar{P}_1$ y $\bar{P}_2$) , una contenida en el plano π y la otra normal al mismo.

Análogamente a la descomposición efectuada con la fuerza $\bar{P}$, supongamos un punto arbitrario $\dot{O}$ perteneciente al eje $\check{e}$ y sea $\bar{r}$ el vector que define la posición de $\bar{P}$ respecto de $\dot{O}$, el mismo puede también descomponerse en dos vectores posición ($\bar{r}_1$ y $\bar{r}_2$), de manera tal que uno de ellos este contenido en el plano π ($\bar{r}_1$) y el otro en el eje $\check{e}$ ($\bar{r}_2$)como indica la siguiente figura.

$\pi \perp \check{e}$

$\bar{r}_1 \in \pi$

$\bar{r}_2 /\!/ \check{e}$

$\bar{P}_1 \in \pi$

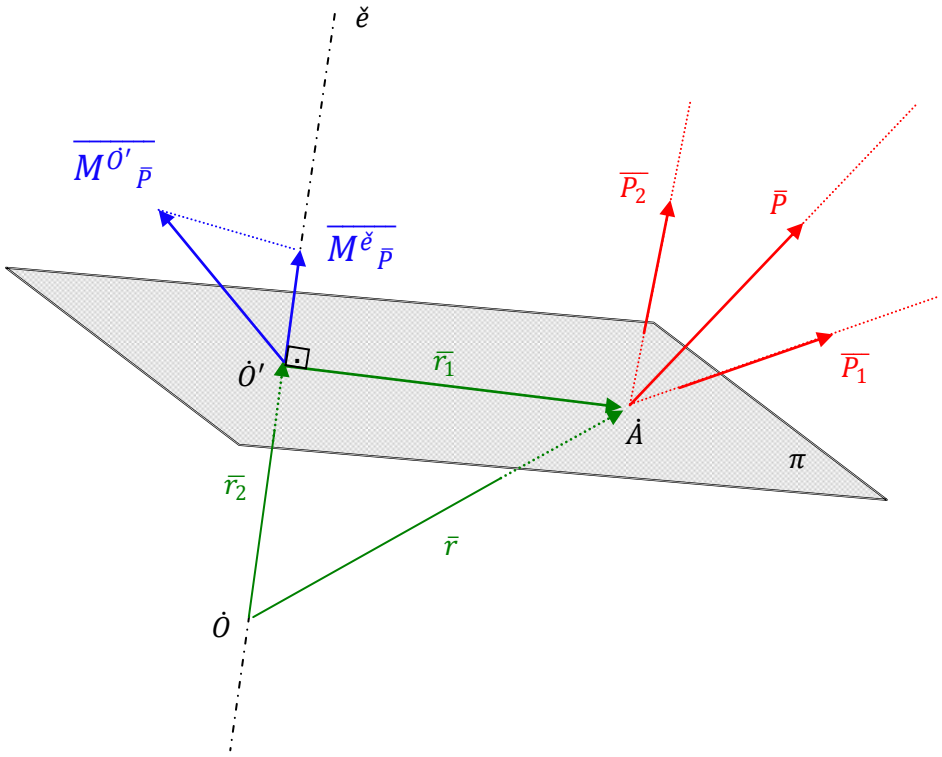
$\overline{P_2} \perp \pi$

$\therefore\ \overline{P_2} /\!/ \check{e}$

$\bar{P} = \bar{P}_1 + \overline{P_2}$

$\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2$

$\dot{O}' \in \pi$



$$M_{\bar{P}}^{\check{e}} = \overline{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}} x \check{e} \quad (1)$$

$$\overline{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}} = \bar{r} \wedge \bar{P} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$M_{\bar{P}}^{\check{e}} = (\bar{r} \wedge \bar{P}) x \check{e} \quad (3)$$

Reemplazando en (3) $\bar{r}$ y $\bar{P}$ por sus componentes:

$$M_{\bar{P}}^{\check{e}} = [(\overline{r_1} + \overline{r_2}) \wedge (\overline{P_1} + \overline{P_2})] x \check{e}$$

$$M_{\bar{P}}^{\check{e}} = \underbrace{(\overline{r_1} \wedge \overline{P_1}) x \check{e}}_{\overline{M_{\overline{P_1}}^{\dot{O}'}}} + \underbrace{(\overline{r_1} \wedge \overline{P_2}) x \check{e}}_{\text{Se anula por producto escalar por ser: } (\overline{r_1} \wedge \overline{P_2}) \perp \check{e}} + \underbrace{(\overline{r_2} \wedge \overline{P_1}) x \check{e}}_{\text{Se anula por producto escalar por ser: } (\overline{r_2} \wedge \overline{P_1}) \perp \check{e}} + \underbrace{(\overline{r_2} \wedge \overline{P_2}) x \check{e}}_{\text{Se anula por producto vectorial por ser: } \overline{r_2} /\!/ \overline{P_2}}$$

Por lo tanto:

$$M_{\bar{P}}^{\check{e}} = \overline{M_{\overline{P_1}}^{\dot{O}'}} x \check{e}$$

Teniendo en cuenta que $(\overline{r_1} \wedge \overline{P_1}) = \overline{M_{\overline{P_1}}^{\dot{O}'}} /\!/ \check{e}$, se deduce:

$$\boxed{M_{\bar{P}}^{\check{e}} = M_{\overline{P_1}}^{\dot{O}'}}$$

En definitiva, la magnitud del momento $M_{\bar{P}}^{\check{e}}$ esta dada por el momento que produce la proyección de dicha fuerza $(\overline{P_1})$, sobre un plano cualquiera (π), normal al eje $(\check{e})$, respecto del punto intersección $(\dot{O}')$ de dicho eje con el plano mencionado.

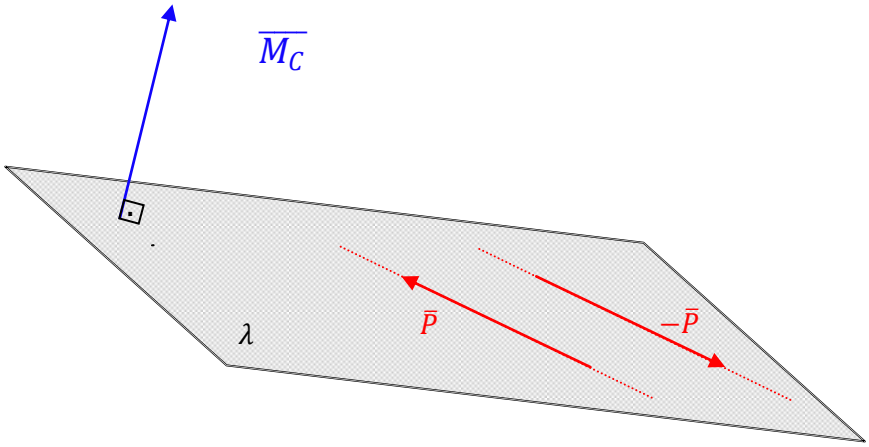
CUPLA - PAR DE FUERZAS

El sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo está formado por dos fuerzas paralelas, de igual intensidad y sentidos opuestos.

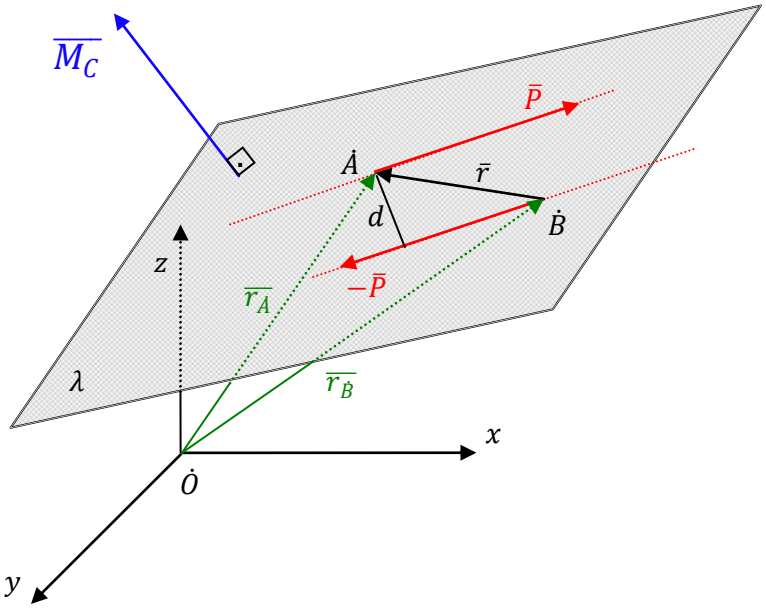
$$\therefore \bar{R} = \bar{0}$$

¡*No produce traslaciones*!

¡*Produce sólo rotaciones*!



$\overline{M_C}$: Momento de la cupla representativo del sistema. El mismo es un vector libre.



$$\overline{M^{\dot{O}}{}_C} = \overline{r_{\dot{A}}} \wedge \bar{P} + \overline{r_{\dot{B}}} \wedge (-\bar{P})$$

$$\overline{M^{\dot{O}}{}_C} = (\overline{r_{\dot{A}}} - \overline{r_{\dot{B}}}) \wedge \bar{P} \quad (1)$$

$$\overline{r_{\dot{A}}} = \overline{r_{\dot{B}}} + \bar{r}$$

$$\therefore \ \overline{r_{\dot{A}}} - \overline{r_{\dot{B}}} = \bar{r} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1), resulta:

$$\overline{M^{\dot{O}}{}_C} = \bar{r} \wedge \bar{P}$$

Queda entonces demostrado que el momento de la cupla es libre, pues no depende del punto que se tome como centro de reducción de momentos.

$$\boxed{\overline{M_C} = \bar{r} \wedge \bar{P}}$$

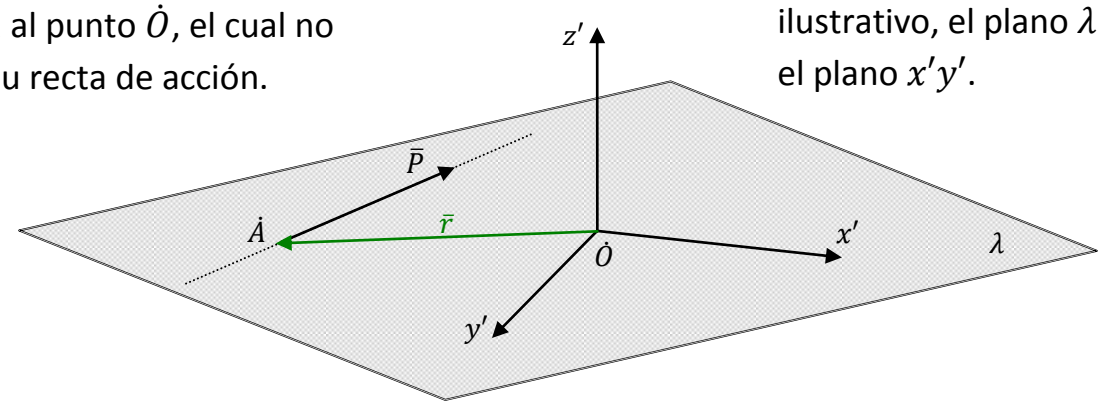
En el caso de tener un sistema formado por n cuplas, la cupla resultante será igual a la suma vectorial de las cuplas componentes.

TRASLACIÓN DE UNA FUERZA A UN PUNTO QUE NO PERTENECE A SU RECTA DE ACCIÓN

Objetivo: Trasladar la fuerza $\bar{P}$ aplicada en $\dot{A}$ al punto $\dot{O}$, el cual no pertenece a su recta de acción.

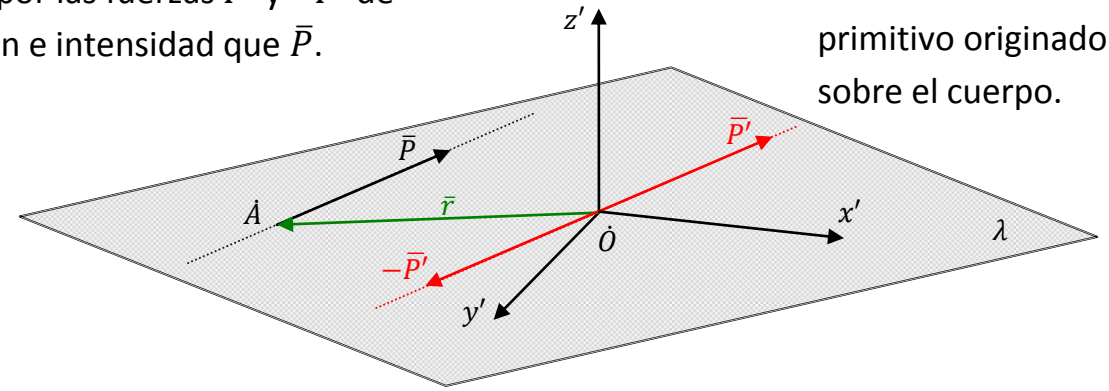
$\bar{P} \in \lambda$

$\dot{O} \in \lambda$



Por conveniencia y sólo a título ilustrativo, el plano λ coincide con el plano $x'y'$.

Para ello añadimos en $\dot{O}$ un sistema nulo conformado por las fuerzas $\bar{P}'$ y $-\bar{P}'$ de igual dirección e intensidad que $\bar{P}$.

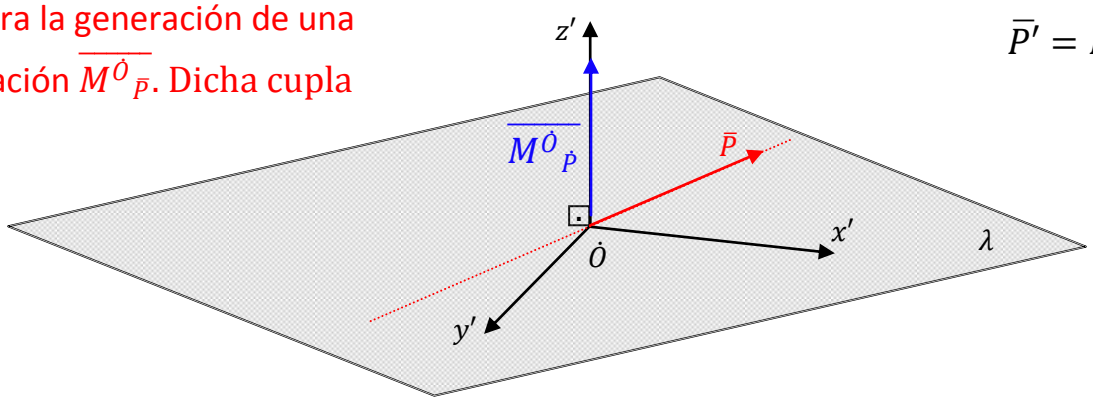


El agregar un sistema nulo no altera el efecto traslatorio primitivo originado por la fuerza $\bar{P}$ sobre el cuerpo.

Conclusión: Trasladar una fuerza a un punto que no pertenece a su recta de acción involucra la generación de una cupla de traslación $\overline{M^{\dot{O}}{}_{\bar{P}}}$. Dicha cupla es libre.

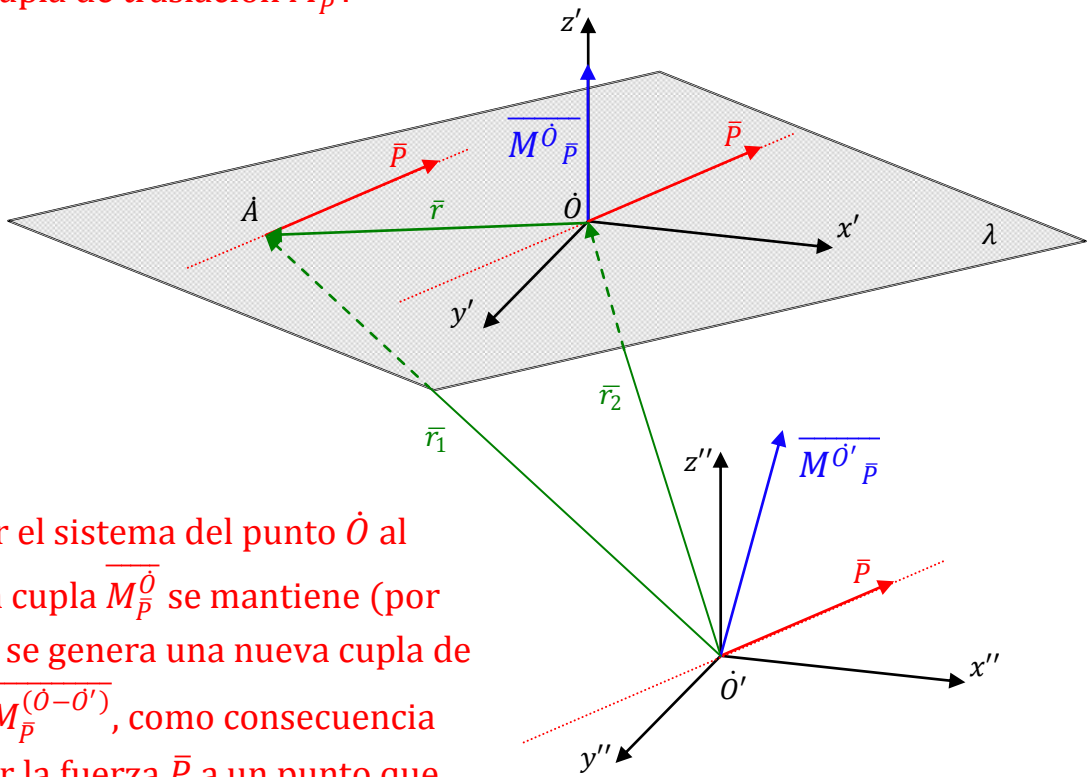
$$\overline{M^{\dot{O}}{}_{\bar{P}}} = \bar{r} \wedge \bar{P}$$

$$\bar{P}' = \bar{P}$$



Objetivo: Trasladar el sistema del punto $\dot{O}$ al punto $\dot{O}'$.

- El sistema original está constituido por la fuerza $\bar{P}$ aplicada en el punto $\dot{A}$.
- La reducción del sistema al punto $\dot{O}$ origina la cupla de traslación $\overline{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}}$.



- Al trasladar el sistema del punto $\dot{O}$ al punto $\dot{O}'$, la cupla $\overline{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}}$ se mantiene (por ser libre) y se genera una nueva cupla de traslación $\overline{M_{\bar{P}}^{(\dot{O}-\dot{O}')}}$, como consecuencia de trasladar la fuerza $\bar{P}$ a un punto que no pertenece a su recta de acción.

$$\overline{M_{\bar{P}}^{\dot{O}'}} = \overline{M_{\bar{P}}^{\dot{O}}} + \overline{M_{\bar{P}}^{(\dot{O}-\dot{O}')}} \quad (1)$$

$$\overline{M^{\dot{O}}{}_{\bar{P}}} = \bar{r} \wedge \bar{P} \quad (2)$$

$$\overline{M_{\bar{P}}^{(\dot{O}-\dot{O}')}} = \bar{r}_2 \wedge \bar{P} \quad (3)$$

$$\bar{r}_2 = \left(\dot{O} - \dot{O}'\right)$$

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \bar{r}_2 \quad (4)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$\overrightarrow{M_{\bar{P}}^{\dot{O}'}} = \bar{r} \wedge \bar{P} + \bar{r_2} \wedge \bar{P}$$

$$\overrightarrow{M_{\bar{P}}^{\dot{O}'}} = (\bar{r} + \bar{r_2}) \wedge \bar{P} \quad (5)$$

Reemplazando (4) en (5):

$$\boxed{\overrightarrow{M_{\bar{P}}^{\dot{O}'}} = \bar{r_1} \wedge \bar{P}}$$

SISTEMAS DE FUERZAS ESPACIALES NO CONCURRENTES

Son también denominados SISTEMAS DE FUERZAS GAUSOS, nombre que proviene del término francés “gauche” con que se denominan las superficies no desarrollables.

Al realizar el estudio de los sistemas de fuerzas se persiguen los siguientes objetivos:

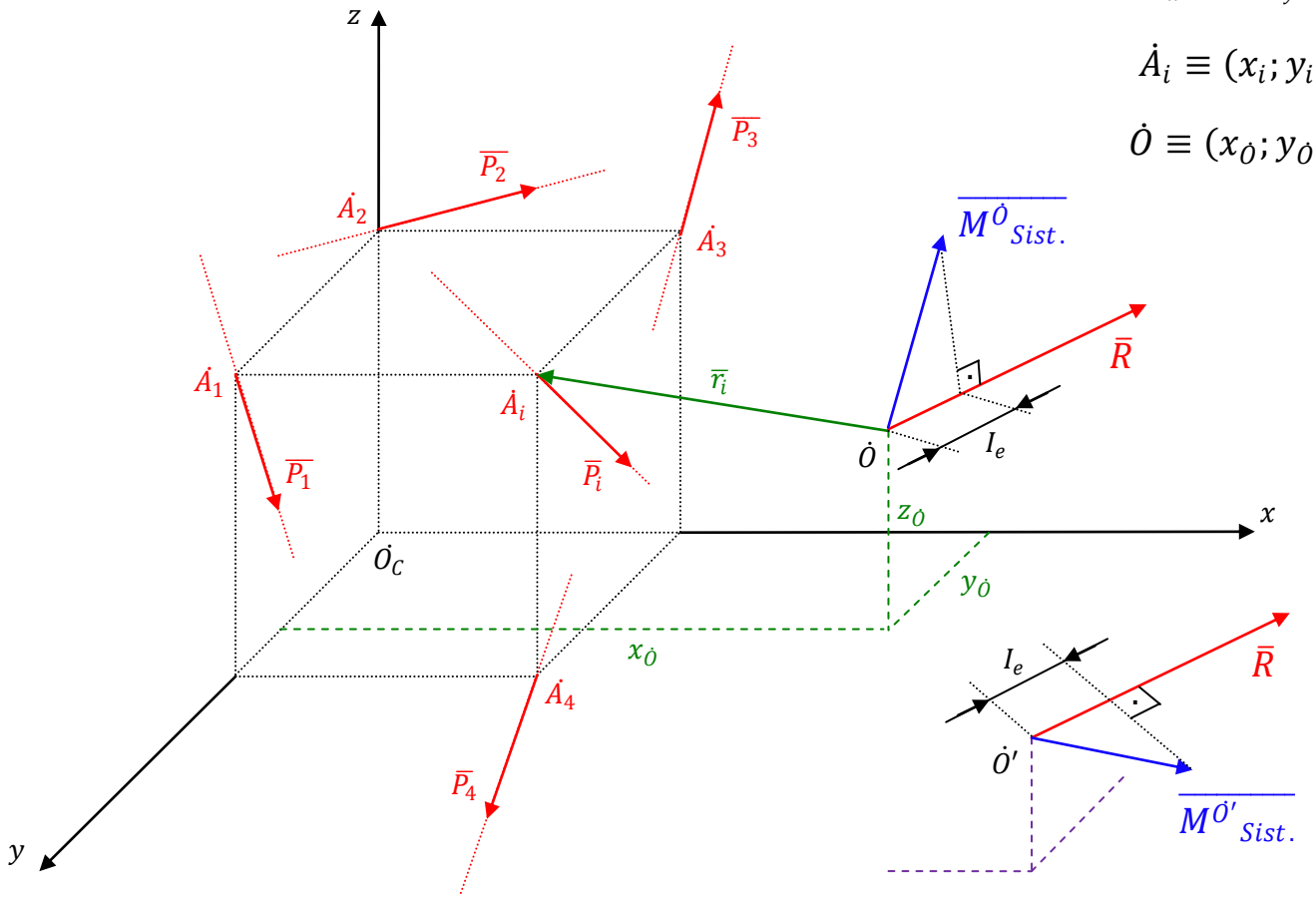
1) La composición del sistema.
2) La descomposición del sistema.

Datos

$$\overline{P_i} \equiv P_{i_x}.\check{\imath} + P_{i_y}.\check{\jmath} + P_{i_z}.\check{k}$$

$$\dot{A}_i \equiv (x_i; y_i; z_i)$$

$$\dot{O} \equiv (x_{\dot{O}}; y_{\dot{O}}; z_{\dot{O}})$$

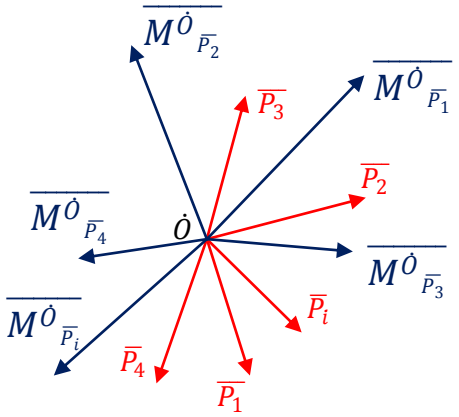


1. Composición de un sistema de fuerzas: Componer un sistema significa reducir el mismo a su mínima expresión.
   En aquellos sistemas que admiten resultante única, el objetivo es hallar dicha resultante.

Reducción del sistema al punto $\dot{O}$ (centro de reducción):

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i$$

$$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M^{\dot{O}}_{\bar{P}_i}} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \wedge \bar{P}_i)$$

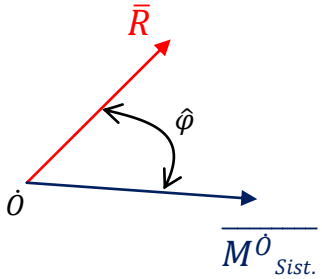


En el caso más general:

$$\bar{R} \neq \bar{0}$$

$$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} \neq \bar{0}$$

$$\hat{\varphi} \neq 90°$$



$\bar{R}$: Resultante de **reducción** del sistema.

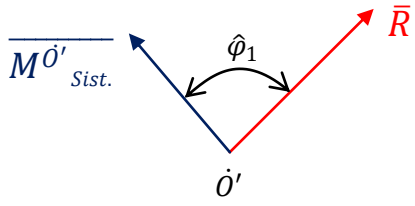
$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}}$: Vector cupla resultante de **reducción** del sistema.

Al conjunto de $\bar{R}$ y $\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}}$ se lo denomina:

BINOMIO DE REDUCCIÓN

Si cambiamos el centro de reducción desde el punto $\dot{O}$ al punto $\dot{O}'$, ocurre lo siguiente:

$$\bar{R} = cte. \;\; ; \;\; \overline{M^{\dot{O}'}{}_{Sist.}} \neq \overline{M^{\dot{O}}{}_{Sist.}} \;\; ; \;\; \hat{\varphi}_1 \neq \hat{\varphi} \;\; ; \;\; \hat{\varphi}_1 \neq 90°$$

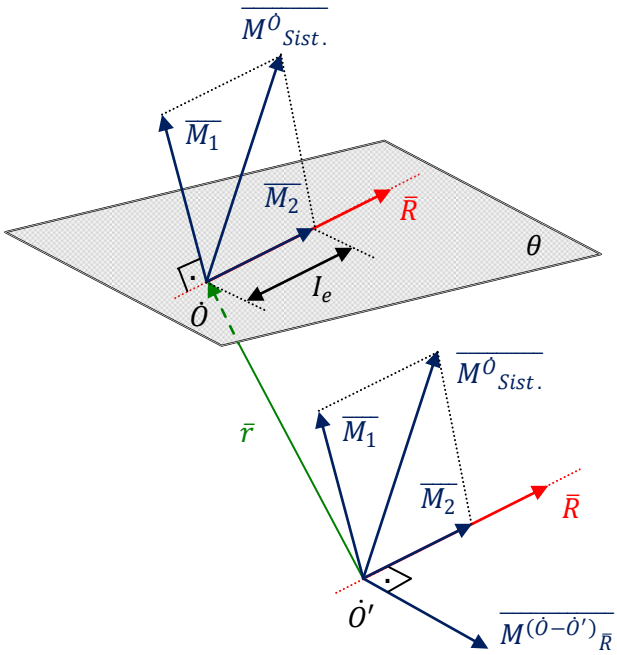


Conclusiones:

- La resultante de reducción permanece constante constituyendo el **invariante vectorial** del sistema.
- Si bien al cambiar el centro de reducción, se verifica en general $\overline{M^{\dot{O}'}{}_{Sist.}} \neq \overline{M^{\dot{O}}{}_{Sist.}}$, lo que no varía es la proyección de dichos vectores sobre la recta de acción de la resultante. Esta proyección constituye el **invariante escalar** del sistema.

La identidad del sistema son: el invariante vectorial y el invariante escalar.

CONCEPTO GRÁFICO DEL INVARIANTE ESCALAR



$$\overline{M^{\dot{O}}{}_{Sist.}} = \overline{M_1} + \overline{M_2}$$

Adoptamos: $\overline{M_1} \perp \bar{R}$

$$\bar{R} \in \theta$$

$$\overline{M_2} \in \theta$$

$$\overline{M^{\dot{O}'}{}_{Sist.}} = \overline{M^{\dot{O}}{}_{Sist.}} + \overline{M^{(\dot{O}-\dot{O}')}{}_{\bar{R}}}$$

$$\overline{M^{\dot{O}'}{}_{Sist.}} = \underbrace{\overline{M_1}}_{\perp \bar{R}} + \underbrace{\overline{M_2}}_{/\!/ \bar{R}} + \underbrace{\overline{M^{(\dot{O}-\dot{O}')}{}_{\bar{R}}}}_{\perp \bar{R}}$$

∴ Sólo cambia la componente normal del momento.

Al trasladar el sistema desde el punto $\dot{O}$ hacia el punto $\dot{O}$', se genera la cupla de traslación $\overline{M^{(\dot{O}-\dot{O}')}{}_{\bar{R}}} = \bar{r} \wedge \bar{R}$.

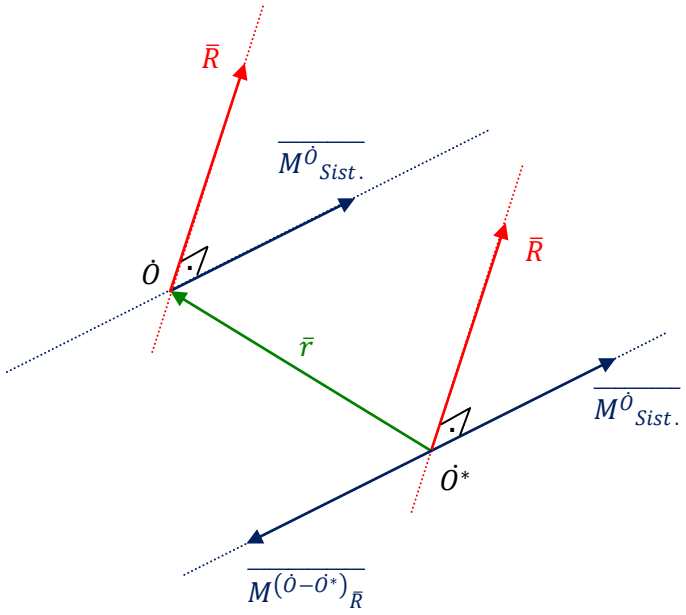
El vector momento resultante del anterior producto vectorial será perpendicular a la recta de acción de la fuerza resultante, es por ello que el vector $\overline{M^{\dot{O}'}{}_{Sist.}}$ admite una componente en la dirección de $\bar{R}$ igual a $\overline{M_2}$.

<u>Conclusión:</u> El invariante escalar I_e de un sistema de fuerzas viene dado por la proyección del vector momento resultante del sistema sobre la recta de acción de la resultante de fuerzas de dicho sistema.

$$I_e = \frac{\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} x \bar{R}}{R}$$

Primer caso particular:

$$\bar{R} \neq \bar{0} \;\; ; \;\; \overline{M^{\dot{O}}{}_{Sist.}} \neq \bar{0} \;\; ; \;\; \hat{\varphi} = 90° \;\; \rightarrow \boxed{I_e = 0}$$



- En este caso, por ser $I_e = 0$, es posible hallar la resultante del sistema (admite resultante única).
- En general, el problema más importante que se presenta en la determinación de la resultante de un sistema de fuerzas es encontrar un punto $\dot{O}^*$ que pertenezca a su recta de acción.
- Para resolver dicho problema (hallar $\dot{O}^*$) resulta de suma utilidad la aplicación del **Teorema de Varignon**.

$$\overline{M^{(\dot{O}-\dot{O}^*)}}_{\bar{R}} = -\overline{M^{\dot{O}}}_{Sist.}$$

$$\overline{M^{(\dot{O}-\dot{O}^*)}}_{\bar{R}} = \bar{r} \wedge \bar{R}$$

$$\overline{M^{\dot{O}^*}}_{Sist.} = \overline{M^{\dot{O}}}_{Sist.} + \overline{M^{(\dot{O}-\dot{O}^*)}}_{\bar{R}} = \bar{0}$$

Se dice entonces que el punto $\dot{O}^*$ pertenece a la recta de acción de la fuerza resultante.

Segundo caso particular:

$$\bar{R} \neq \bar{0} \quad ; \quad \overline{M^{\dot{O}}}_{Sist.} = \bar{0}$$

En este caso el punto $\dot{O}$ (centro de reducción) pertenece a la recta de acción de la resultante.

Tercer caso particular:

$$\bar{R} = \bar{0} \quad ; \quad \overline{M^{\dot{O}}}_{Sist.} \neq \bar{0}$$

En este caso, el sistema se reduce a una cupla.

$$\overline{M^{\dot{O}}}_{Sist.} = \overline{M^{\dot{O}'}}_{Sist.} = cte.$$

Cuarto caso particular:

$$\bar{R} = \bar{0} \quad ; \quad \overline{M^{\dot{O}}{}_{Sist.}} = \bar{0}$$

- El sistema de fuerzas está en equilibrio.
- El sistema es incapaz de producir traslaciones y rotaciones.

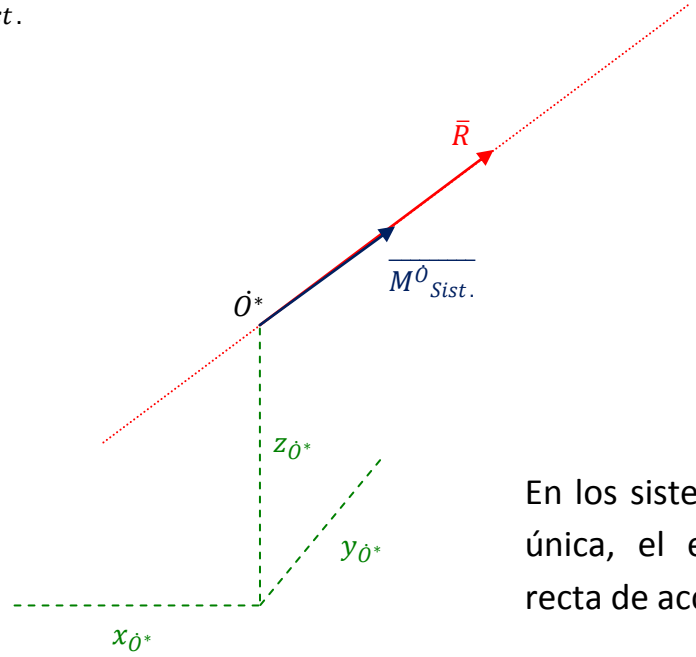
CONCEPTO DE EJE CENTRAL

Eje central de un sistema de fuerzas corresponde al lugar geométrico de los puntos (O^*) que tomados como centro de reducción dan origen a vectores $\overline{M^{O^*}_{Sist.}}$ de direcciones paralelas a la resultante de reducción y de magnitudes iguales al invariante escalar de dicho sistema.

$$I_e = M^{\dot{O}^*}{}_{Sist.}$$

$$\hat{\varphi} = 0°$$

Eje central o eje torsor de un sistema de fuerzas.



En los sistemas que admiten resultante única, el eje central coincide con la recta de acción de la resultante.

CÁLCULO DEL BINOMIO DE REDUCCIÓN

Cálculo de $\bar{R}$:

$$\bar{R} = R_x.\check{\imath} + R_y.\check{\jmath} + R_z.\check{k}$$

Son la causa de los desplazamientos

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = \sum_{i=1}^{n} P_{i_x} \\ R_y = \sum_{i=1}^{n} P_{i_y} \\ R_z = \sum_{i=1}^{n} P_{i_z} \end{array} \right\} \quad R = \sqrt{(R_x)^2 + \left(R_y\right)^2 + (R_z)^2}$$

Cosenos directores de $\bar{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\hat{\alpha}_{\bar{R}} = \dfrac{R_x}{R} \\ \cos\hat{\beta}_{\bar{R}} = \dfrac{R_y}{R} \\ \cos\hat{\gamma}_{\bar{R}} = \dfrac{R_z}{R} \end{array} \right.$$

$$\cos^2\hat{\alpha}_{\bar{R}} + \cos^2\hat{\beta}_{\bar{R}} + \cos^2\hat{\gamma}_{\bar{R}} = 1$$

Cálculo de $\overline{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}}$:

$$\overline{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}} = \left(M_{\bar{R}}^{\dot{O}}\right)_x . \check{\imath} + \left(M_{\bar{R}}^{\dot{O}}\right)_y . \check{\jmath} + \left(M_{\bar{R}}^{\dot{O}}\right)_z . \check{k}$$

$$\overline{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}} = \overline{M_{Sist.}^{\dot{O}}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M_{\bar{P}_i}^{\dot{O}}} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ (x_i - x_{\dot{O}}) & (y_i - y_{\dot{O}}) & (z_i - z_{\dot{O}}) \\ P_{i_x} & P_{i_y} & P_{i_z} \end{vmatrix}$$

Producen giros sobre los ejes coordenados respectivos.

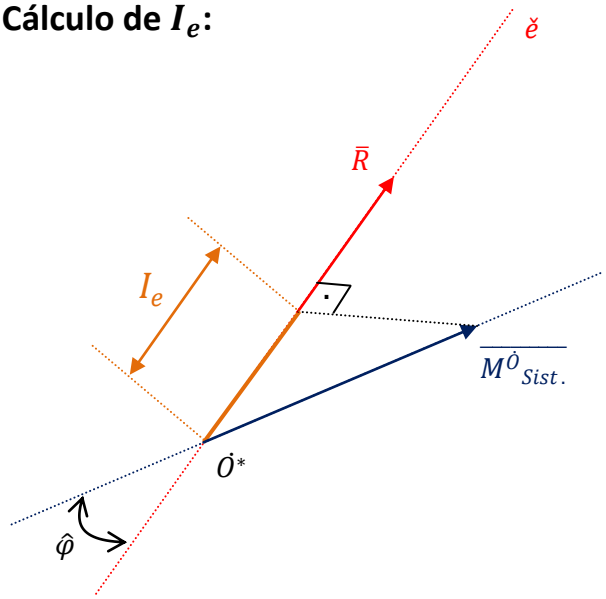
$$\left\{ \begin{array}{l} \left(M_{\bar{R}}^{\dot{O}}\right)_x = \sum_{i=1}^{n} P_{i_z} . (y_i - y_{\dot{O}}) - \sum_{i=1}^{n} P_{i_y} . (z_i - z_{\dot{O}}) \\ \left(M_{\bar{R}}^{\dot{O}}\right)_y = \sum_{i=1}^{n} P_{i_x} . (z_i - z_{\dot{O}}) - \sum_{i=1}^{n} P_{i_z} . (x_i - x_{\dot{O}}) \\ \left(M_{\bar{R}}^{\dot{O}}\right)_z = \sum_{i=1}^{n} P_{i_y} . (x_i - x_{\dot{O}}) - \sum_{i=1}^{n} P_{i_x} . (y_i - y_{\dot{O}}) \end{array} \right\}$$

$$M_{\bar{R}}^{\dot{O}} = \sqrt{\left(M_{\bar{R}}^{\dot{O}}\right)_x^{\,2} + \left(M_{\bar{R}}^{\dot{O}}\right)_y^{\,2} + \left(M_{\bar{R}}^{\dot{O}}\right)_z^{\,2}}$$

Cosenos directores de $\overline{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \hat{\alpha}_{\overline{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}}} = \dfrac{\left(M_{\bar{R}}^{\dot{O}}\right)_x}{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}} \\ \cos \hat{\beta}_{\overline{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}}} = \dfrac{\left(M_{\bar{R}}^{\dot{O}}\right)_y}{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}} \\ \cos \hat{\gamma}_{\overline{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}}} = \dfrac{\left(M_{\bar{R}}^{\dot{O}}\right)_z}{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}} \end{array} \right\} \qquad \cos^2 \hat{\alpha}_{\overline{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}}} + \cos^2 \hat{\beta}_{\overline{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}}} + \cos^2 \hat{\gamma}_{\overline{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}}} = 1$$

Cálculo de I_e:



$$I_e = \overline{M^{\dot{O}}{}_{Sist.}} x \check{e}$$

$$\check{e} = \frac{\bar{R}}{R}$$

$$I_e = \overline{M^{\dot{O}}{}_{Sist.}} x \frac{\bar{R}}{R}$$

$$I_e = \frac{\left(M_{\bar{R}}^{\dot{O}}\right)_x . R_x + \left(M_{\bar{R}}^{\dot{O}}\right)_y . R_y + \left(M_{\bar{R}}^{\dot{O}}\right)_z . R_z}{R}$$

2. Descomposición de un sistema de fuerzas:

SISTEMAS EQUIVALENTES

Dos sistemas de fuerzas son equivalentes cuando producen el mismo efecto en el cuerpo sobre el que actúan, es decir, cuando tienen el mismo binomio de reducción.

$$\overline{R_I} = \overline{R_{II}}$$

$$\overline{M^{\dot{O}}{}_{Sist.I}} = \overline{M^{\dot{O}}{}_{Sist.II}}$$

Por tratarse de un sistema de fuerzas espaciales no concurrentes, se dispone de seis ecuaciones de equivalencia.

$$\begin{cases} \overline{P_x} \\ \overline{P_y} \\ \overline{P_z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{M_x} \\ \overline{M_y} \\ \overline{M_z} \end{cases}$$

EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS

Un sistema de fuerzas se encuentra en equilibrio cuando su binomio de reducción es nulo. Esto **NO** quiere decir que el sistema no esté cargado (que no existan fuerzas ni momentos), de hecho, puede que un cuerpo se encuentre en equilibrio estático y que llegue a la rotura por los esfuerzos engendrados por los sistemas exteriores tanto activos como reactivos.

$$\bar{R} = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P_{i_x} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P_{i_y} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P_{i_z} = 0 \end{cases}$$

$$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(M^{\dot{O}}_{P_i}\right)_x = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(M^{\dot{O}}_{P_i}\right)_y = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(M^{\dot{O}}_{P_i}\right)_z = 0 \end{cases}$$

Otras formas de plantear las ecuaciones de equivalencia son las siguientes:

a. Dos ecuaciones de nulidad de proyección de fuerzas y cuatro de nulidad de momentos.
b. Una ecuación de nulidad de proyección de fuerzas y cinco ecuaciones de nulidad de momentos.
c. Seis ecuaciones de nulidad de momentos.

Los ejes $x; y; z$ pueden no ser coincidentes con los de la terna de ejes de referencia, y si dos ejes son coplanares, el tercero no puede ser paralelo.

Cabe mencionar lo siguiente:

1) Cuando el número de incógnitas que presenta el problema de descomposición del sistema es igual al número de ecuaciones que puede plantear la estática decimos que el sistema es **estáticamente determinado**.
2) Cuando el numero de incógnitas es menor que el número de ecuaciones que puede plantear la estática, el problema es **estáticamente de solución condicionada**, es decir, para resolver este problema la estática debe observar la posición en que se encuentra el sistema.
3) Cuando el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones que puede plantear la estática, el problema es **estáticamente indeterminado**.

SISTEMAS DE FUERZAS ESPACIALES CONCURRENTES

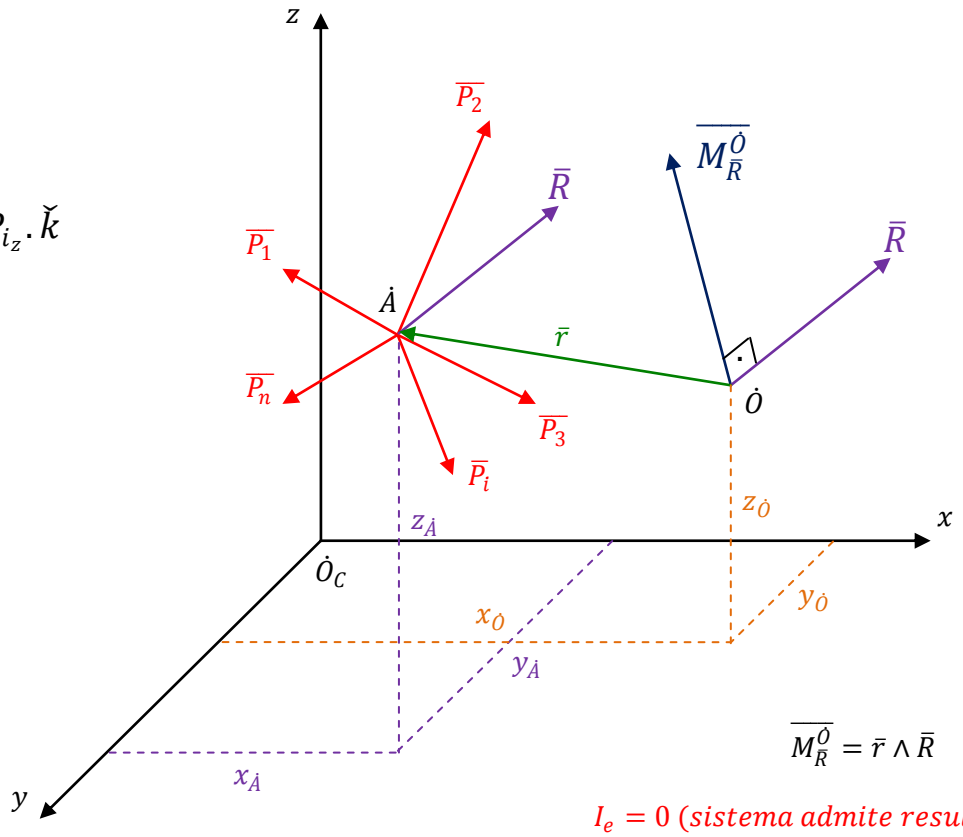
Datos

$$\overline{P_i} \equiv P_{i_x}.\check{\imath} + P_{i_y}.\check{\jmath} + P_{i_z}.\check{k}$$

$$\dot{A} \equiv (x_{\dot{A}}; y_{\dot{A}}; z_{\dot{A}})$$

$$\dot{O} \equiv (x_{\dot{O}}; y_{\dot{O}}; z_{\dot{O}})$$

$$\bar{R} \neq \bar{0} \text{ ó } \bar{R} = \bar{0}$$



$$\overline{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}} = \bar{r} \wedge \bar{R}$$

$I_e = 0$ *(sistema admite resultante única)*

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i$$

$$\bar{R} = R_x.\check{\imath} + R_y.\check{\jmath} + R_z.\check{k}$$

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^{n} P_{i_x} \\ R_y &= \sum_{i=1}^{n} P_{i_y} \\ R_z &= \sum_{i=1}^{n} P_{i_z} \end{aligned}\right\} \quad R = \sqrt{(R_x)^2 + \left(R_y\right)^2 + (R_z)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\hat{\alpha}_{\bar{R}} &= \frac{R_x}{R} \\ \cos\hat{\beta}_{\bar{R}} &= \frac{R_y}{R} \\ \cos\hat{\gamma}_{\bar{R}} &= \frac{R_z}{R} \end{aligned}\right\} \quad \cos^2\hat{\alpha}_{\bar{R}} + \cos^2\hat{\beta}_{\bar{R}} + \cos^2\hat{\gamma}_{\bar{R}} = 1$$

Descomposición del sistema en estudio:

Equivalencia: Cuando los sistemas presentan igual resultante.

$$\overline{R_I} = \overline{R_{II}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_x} = \sum_{j=1}^{n} P_{j_x}$$
$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_y} = \sum_{j=1}^{n} P_{j_y}$$
$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_z} = \sum_{j=1}^{n} P_{j_z}$$

La estática puede plantear tres ecuaciones.

Equilibrio:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_x} = o$$
$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_y} = o$$
$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_z} = o$$

En este caso, también puede plantearse:

a) Dos ecuaciones de nulidad de fuerzas y una de momentos.
b) Dos ecuaciones de nulidad de momentos y una de fuerzas.
c) Tres ecuaciones de nulidad de momentos.

SISTEMAS DE FUERZAS ESPACIALES PARALELAS

Datos

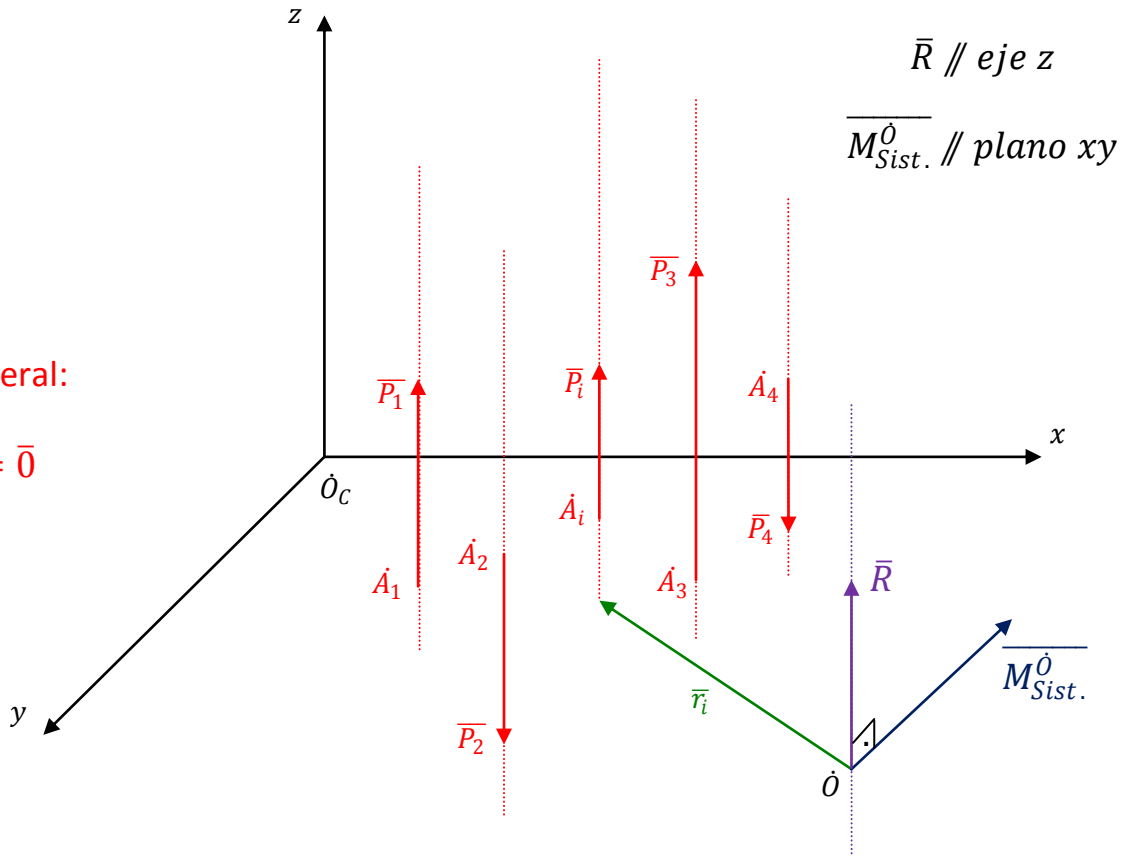
$\overline{P_i} \equiv P_{i_z}.\check{k}$

$\dot{A}_i \equiv (x_i; y_i)$

$\dot{O} \equiv (x_{\dot{O}}; y_{\dot{O}})$

En el caso más general:

$\overline{R} \neq \overline{0}$; $\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} \neq \overline{0}$



$\overline{R} \;/\!/\; eje\ z$

$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} \;/\!/\; plano\ xy$

Reduciendo el sistema al punto $\dot{O}$:

$$\overline{R} = R_z.\check{k}$$

$$R = \sum_{i=1}^{n} P_{i_z}$$

$$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} \perp \overline{R} \quad \rightarrow \quad \overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} \;/\!/\; plano\ xy$$

$$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = \overline{r_i} \wedge \overline{P_i}$$

$$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{(\dot{A}_i - \dot{O})} \wedge \overline{P_i}$$

$$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} := \left(M^{\dot{O}}_{\bar{R}}\right)_x . \check{\imath} + \left(M^{\dot{O}}_{\bar{R}}\right)_y . \check{\jmath}$$

$$I_e = 0 \; ; \; \left(\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} \perp \bar{R}\right) \rightarrow \textit{El sistema admite resultante única}$$

Primer caso particular:

$$\left.\begin{array}{c} \bar{R} \neq \bar{0} \\ \overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = \bar{0} \end{array}\right\}$$

$\dot{O}$ Pertenece a la recta de acción de la resultante.

(Recordar **Teorema de Varignon**).

Segundo caso particular:

$$\left.\begin{array}{c} \bar{R} = \bar{0} \\ \overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} \neq \bar{0} \end{array}\right\}$$

El sistema se reduce a una cupla si cambiamos el centro de reducción.

Tercer caso particular:

$$\left.\begin{array}{c} \bar{R} = \bar{0} \\ \overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = \bar{0} \end{array}\right\}$$

El sistema está en equilibrio.

Calculamos la resultante del sistema:

Conocemos

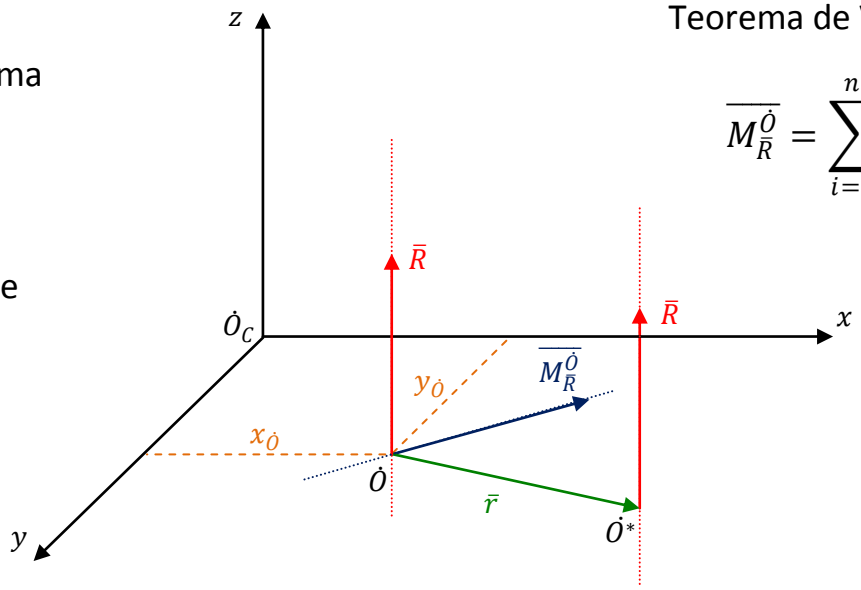
- Intensidad
- Dirección
- Sentido

→ Debemos calcular un punto que pertenezca a la recta de acción de la resultante.

Para ello hay que aplicar el **Teorema de Varignon**

Si $I_e = 0$ existe un lugar geométrico donde el sistema admite resultante única. Supongamos un punto $\dot{O}^*$ donde se verifica dicha condición. En este punto se cumple lo siguiente:

$$\overline{M^{\dot{O}^*}_{Sist.}} = \bar{0}$$



Teorema de Varignon

$$\overline{M^{\dot{O}}_{\bar{R}}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M^{\dot{O}}_{\bar{P}_i}}$$

$$\overline{M^{\dot{O}}_{\bar{R}}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M^{\dot{O}}_{\bar{P}_i}} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M^{\dot{O}}_{\bar{P}_i}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\left(\dot{A}_i - \dot{O}\right)} \wedge \bar{P}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M_{\bar{P}_i}^{\dot{O}}} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ (x_i - x_{\dot{O}}) & (y_i - y_{\dot{O}}) & 0 \\ 0 & 0 & P_{i_z} \end{vmatrix}$$

$$\left(M_{Sist.}^{\dot{O}}\right)_x = \sum_{i=1}^{n} P_{i_z} . (y_i - y_{\dot{O}})$$

$$\left(M_{Sist.}^{\dot{O}}\right)_y = -\sum_{i=1}^{n} P_{i_z} . (x_i - x_{\dot{O}})$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M_{\bar{P}_i}^{\dot{O}}} = \sum_{i=1}^{n} P_{i_z} . (y_i - y_{\dot{O}}).\check{\imath} + \sum_{i=1}^{n} P_{i_z} . (x_{\dot{O}} - x_i).\check{\jmath} \quad (2)$$

El momento de la fuerza resultante respecto del punto $\dot{O}$ esta dado por la siguiente expresión:

$$\overline{M_{\bar{R}}^{(\dot{O}^* - \dot{O})}} = \overline{\left(\dot{O}^* - \dot{O}\right)} \wedge \bar{R}$$

$$\bar{R} = R_z.\check{k}$$

$$\overline{M_{\bar{R}}^{(\dot{O}^* - \dot{O})}} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ (x_{\dot{O}^*} - x_{\dot{O}}) & (y_{\dot{O}^*} - y_{\dot{O}}) & 0 \\ 0 & 0 & R_z \end{vmatrix}$$

$$\left(M_{\bar{R}}^{(\dot{O}^* - \dot{O})}\right)_x = R_z.(y_{\dot{O}^*} - y_{\dot{O}})$$

$$\left(M_{\bar{R}}^{(\dot{O}^* - \dot{O})}\right)_y = -R_z.(x_{\dot{O}^*} - x_{\dot{O}})$$

$$\overline{M_{\bar{R}}^{(\dot{O}^* - \dot{O})}} = R_z.(y_{\dot{O}^*} - y_{\dot{O}}).\check{\imath} + R_z.(x_{\dot{O}} - x_{\dot{O}^*}).\check{\jmath} \quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1), resulta:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_z} . (y_i - y_{\dot{O}}) = R_z . (y_{\dot{O}^*} - y_{\dot{O}})$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_z} . (x_{\dot{O}} - x_i) = R_z . (x_{\dot{O}} - x_{\dot{O}^*})$$

Ecuaciones que permiten calcular las coordenadas del punto $\dot{O}^*$ perteneciente a la recta de acción de la fuerza resultante.

Descomposición del sistema de fuerzas en estudio:

Equivalencia: Dos sistemas de fuerzas son equivalentes cuando tienen el mismo binomio de reducción.

$$\overline{R_I} = \overline{R_{II}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_z} = \sum_{j=1}^{n} P_{j_z}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(M_{\overline{P_i}}^{\dot{O}}\right)_x = \sum_{j=1}^{n} \left(M_{\overline{P_j}}^{\dot{O}}\right)_x$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(M_{\overline{P_i}}^{\dot{O}}\right)_y = \sum_{j=1}^{n} \left(M_{\overline{P_j}}^{\dot{O}}\right)_y$$

Tres expresiones de equivalencia.

Equilibrio: Un sistema está en equilibrio cuando su binomio de reducción es nulo.

$$\bar{R} = \bar{0} \;\; y \;\; \overline{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}} = \bar{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_z} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(M_{\overline{P_i}}^{\dot{O}}\right)_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(M_{\overline{P_i}}^{\dot{O}}\right)_y = 0$$

Se puede también plantear tres ecuaciones de nulidad de momentos.

SISTEMAS DE FUERZAS COPLANARES NO CONCURRENTES

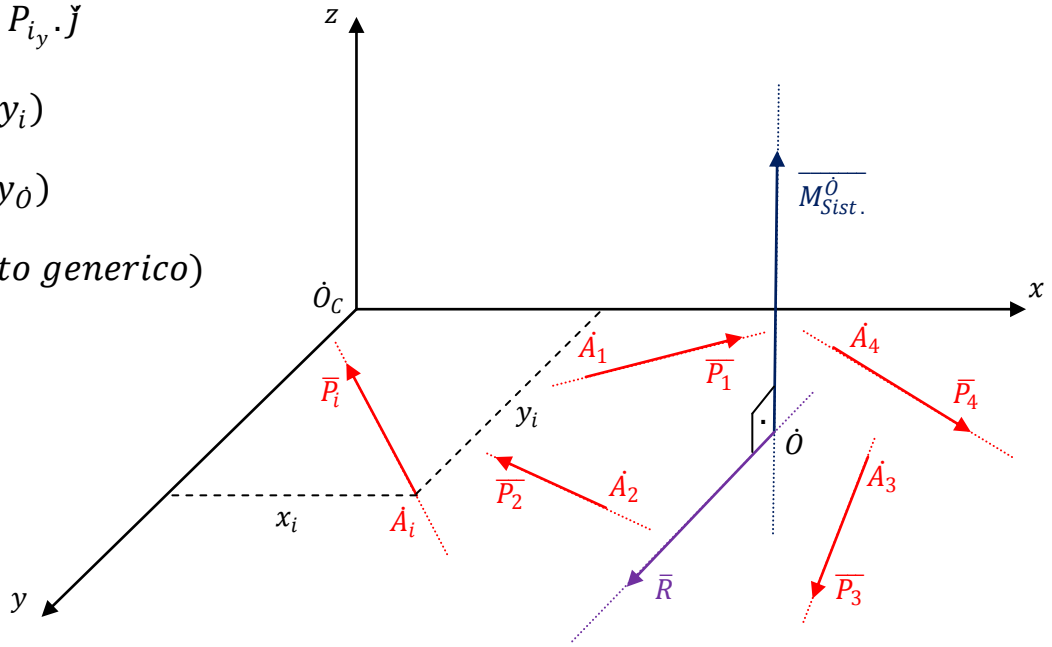
Datos

$\overline{P_i} \equiv P_{i_x}.\check{\imath} + P_{i_y}.\check{\jmath}$

$\dot{A}_i \equiv (x_i; y_i)$

$\dot{O} \equiv (x_{\dot{O}}; y_{\dot{O}})$

$\dot{O} \in plano\ xy\ (punto\ generico)$



Binomio de reducción (en el caso más general)

$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} \neq \bar{0}$

$\bar{R} \neq \bar{0}$

$\hat{\varphi} = 90° \longrightarrow I_e = 0 \longrightarrow$ El sistema admite resultante única

Conclusiones:

$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} \mathbin{/\!/} eje\ z$

$\bar{R} \in plano\ xy$

$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} \perp \bar{R}$

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P_i}$$

$$\bar{R} = R_x.\check{\imath} + R_y.\check{\jmath}$$

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} P_{i_x} \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} P_{i_y}$$

$$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M^{\dot{O}}_{\overline{P_i}}}$$

$$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = \sum_{i=1}^{n} \left(M^{\dot{O}}_{\overline{P_i}}\right)_z . \check{k}$$

$$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ (x_i - x_{\dot{O}}) & (y_i - y_{\dot{O}}) & 0 \\ P_{i_x} & P_{i_y} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = \sum_{i=1}^{n} \left[P_{i_y} . (x_i - x_{\dot{O}}) - P_{i_x} . (y_i - y_{\dot{O}})\right] . \check{k}$$

Primer caso particular:

$$\left.\begin{array}{c} \bar{R} \neq \bar{0} \\ \overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = \bar{0} \end{array}\right\}$$

$\dot{O}$ Pertenece a la recta de acción de la resultante.

(Recordar **Teorema de Varignon**).

Segundo caso particular:

$$\left.\begin{array}{c} \bar{R} = \bar{0} \\ \overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} \neq \bar{0} \end{array}\right\}$$

El sistema se reduce a una cupla.

Tercer caso particular:

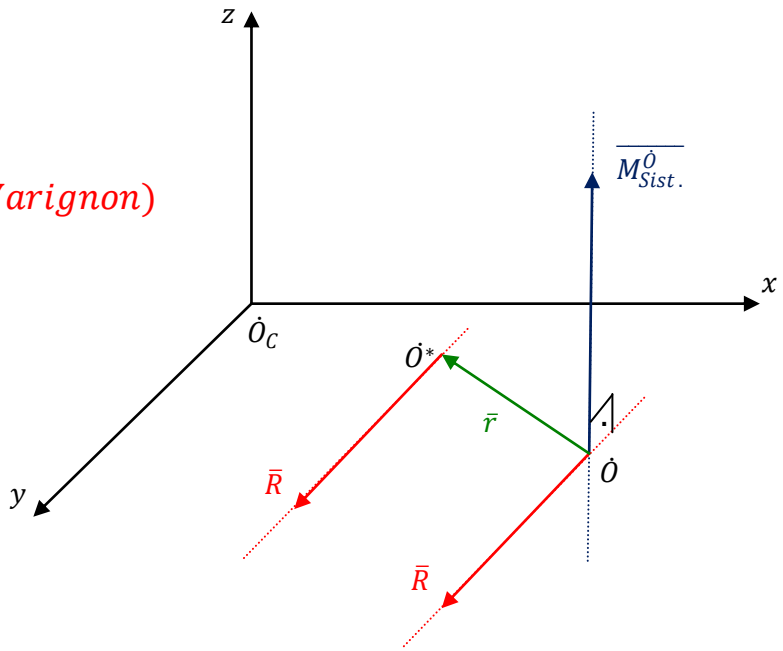
$$\left.\begin{array}{c} \bar{R} = \bar{0} \\ \overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = \bar{0} \end{array}\right\}$$

El sistema está en equilibrio.

Cálculo de la resultante:

$$\bar{r} = \overline{(\dot{O}^* - \dot{O})}$$

$$\overline{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M_{\bar{P}_i}^{\dot{O}}} \quad (Teorema\ de\ Varignon)$$



$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M_{\bar{P}_i}^{\dot{O}}} = \sum_{i=1}^{n} \left[P_{i_y}.(x_i - x_{\dot{O}}) - P_{i_x}.(y_i - y_{\dot{O}})\right].\check{k} \quad (1)$$

$$\overline{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}} = \bar{r} \wedge \bar{R} = \overline{(\dot{O}^* - \dot{O})} \wedge \bar{R}$$

$$\overline{M_{\bar{R}}^{(\dot{O}^* - O)}} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ (x_{\dot{O}^*} - x_{\dot{O}}) & (y_{\dot{O}^*} - y_{\dot{O}}) & 0 \\ R_x & R_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overline{M_{\bar{R}}^{(O^* - O)}} = \left[R_x.(y_{\dot{O}^*} - y_{\dot{O}}) - R_y.(x_{\dot{O}^*} - x_{\dot{O}})\right].\check{k} = \overline{M_{\bar{R}}^{\dot{O}}} \quad (2)$$

Según el Teorema de Varignon se verifica la igualdad entre las ecuaciones (1) y (2) lo que permite hallar las coordenadas del punto $\dot{O}^*$ perteneciente a la recta de acción de la resultante.

Descomposición del sistema de fuerzas en estudio:

Equivalencia: Dos sistemas de fuerzas son equivalentes cuando tienen el mismo binomio de reducción.

$$\overline{R_I} = \overline{R_{II}} \quad \wedge \quad \overline{M^{\dot{O}}_{R_I}} = \overline{M^{\dot{O}}_{R_{II}}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_x} = \sum_{j=1}^{n} P_{j_x}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_y} = \sum_{j=1}^{n} P_{j_y}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M^{\dot{O}}{}_{\overline{P_i}} = \sum_{j=1}^{n} M^{\dot{O}}{}_{\overline{P_j}}$$

Tres expresiones de equivalencia.

Equilibrio: Un sistema está en equilibrio cuando su binomio de reducción es nulo.

$$\bar{R} = \bar{0} \quad \wedge \quad \overline{M^{\dot{O}}_{\bar{R}}} = \bar{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_x} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_y} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M^{\dot{O}}{}_{\overline{P_i}} = 0$$

Los ejes x e y no tienen por qué coincidir con los ejes de referencia, pero no deben ser paralelos.

Se puede también plantear el equilibrio de las siguientes formas

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P_{i_x} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M^{\dot{O}}{}_{\overline{P_i}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M^{\dot{O}'}{}_{\overline{P_i}} = 0 \end{cases}$$

$\overline{(\dot{O}' - \dot{O})}$ **NO** debe ser perpendicular a $\bar{R}$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} M^{\dot{O}}{}_{\overline{P_i}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M^{\dot{O}_1}{}_{\overline{P_i}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M^{\dot{O}_2}{}_{\overline{P_i}} = 0 \end{cases}$$

$\dot{O}_1; \dot{O}_2$ y $\dot{O}$ **NO** deben estar alineados.

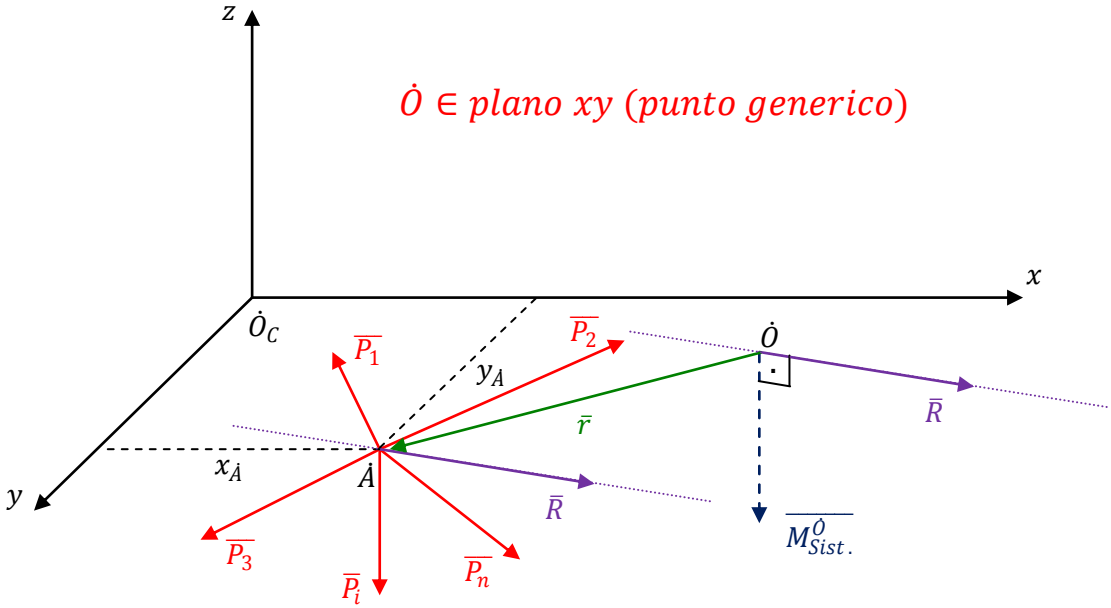
SISTEMAS DE FUERZAS COPLANARES CONCURRENTES

Datos

$\dot{A} \equiv (x_{\dot{A}}; y_{\dot{A}})$

$\bar{P}_i \equiv P_{i_x}.\check{\imath} + P_{i_y}.\check{\jmath}$

$\bar{R} \equiv R_x.\check{\imath} + R_y.\check{\jmath}$



Si $\dot{O}$ no pertenece a la recta de acción de $\bar{R}$ $\rightarrow$ $\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} \neq \bar{0}$

$$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = M^{\dot{O}}_{Sist.}.\check{k}$$

Descomposición del sistema de fuerzas en estudio:

Equivalencia

$$\downarrow$$

$$\overline{R_I} = \overline{R_{II}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_x} = \sum_{j=1}^{n} P_{j_x}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_y} = \sum_{j=1}^{n} P_{j_y}$$

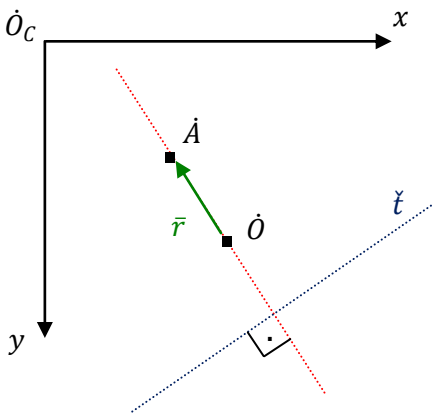
Dos expresiones de equivalencia.

Equilibrio

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} P_{i_x} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P_{i_y} = 0 \end{array} \right\} \quad \bar{R} = \bar{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} P_{i_t} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_{\bar{P}_i}^{\dot{O}} = 0 \end{array} \right\}$$

En este caso, el centro de reducción de momentos $\dot{O}$ deberá ser elegido de manera tal que el vector $\overline{(\dot{A} - \dot{O})}$ ($\dot{A}$ punto de concurrencia de las fuerzas del sistema) **NO** sea perpendicular a la recta $\check{t}$ sobre la que se ha planteado la ecuación de nulidad de proyección de fuerzas.

$$\bar{r} = \overline{(\dot{A} - \dot{O})}$$

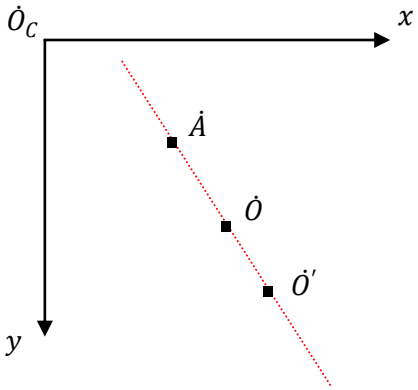


INCORRECTO

Otra forma de plantear el equilibrio del sistema sería la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} M_{\bar{P}_i}^{\dot{O}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_{\bar{P}_i}^{\dot{O}'} = 0 \end{array} \right\}$$

En este caso $\dot{A}; \dot{O}$ y $\dot{O}'$ **NO** deben estar alineados.



INCORRECTO

SISTEMAS DE FUERZAS COPLANARES PARALELAS

Datos

$$\dot{A}_i \equiv (x_i; y_i)$$

$$\bar{P}_i \equiv P_{i_y}.\check{j}$$

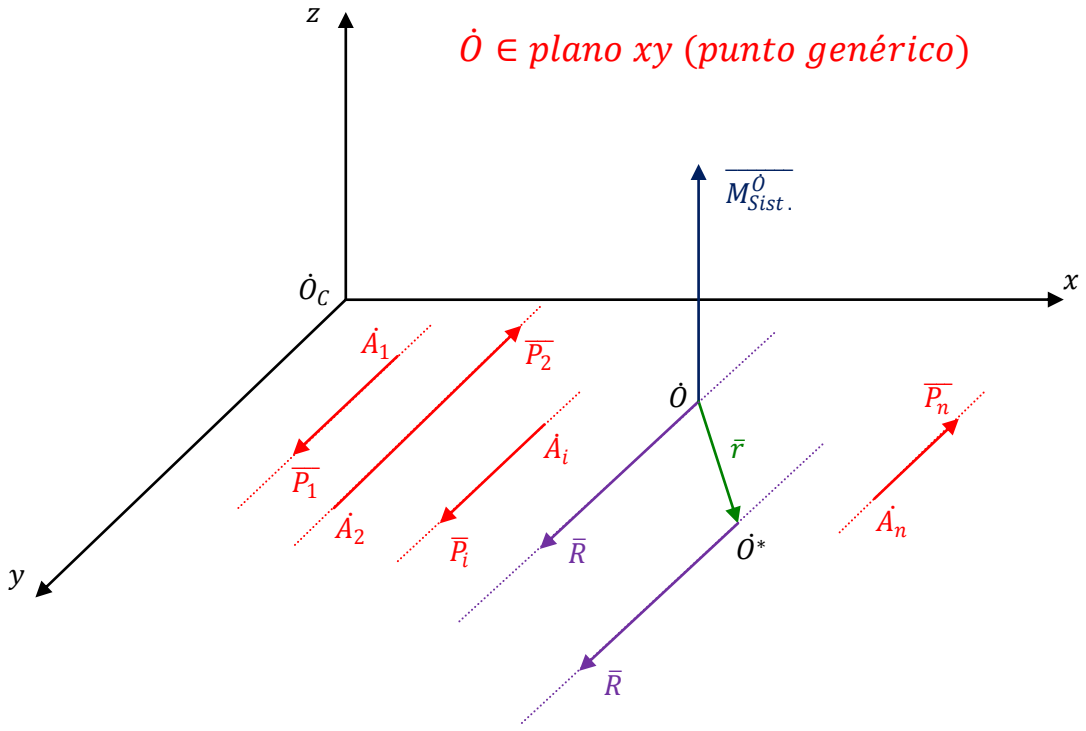
$$\bar{R} \equiv R_y.\check{j}$$

$$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = M^{\dot{O}}_{Sist.z}.\check{k}$$

$$M^{\dot{O}}_{Sist.z} = \sum_{i=1}^{n} P_{i_y}.(x_i - x_{\dot{O}})$$

$$\bar{r} = \overline{(\dot{O}^* - \dot{O})}$$

$$I_e = 0$$



Primer caso particular:

$$\left.\begin{array}{c} \bar{R} \neq \bar{0} \\ \overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = \bar{0} \end{array}\right\}$$

$\dot{O}$ Pertenece a la recta de acción de la resultante.

Segundo caso particular:

$$\left.\begin{array}{c} \bar{R} = \bar{0} \\ \overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} \neq \bar{0} \end{array}\right\}$$

El sistema se reduce a una cupla.

Tercer caso particular:

$$\left.\begin{array}{c} \bar{R} = \bar{0} \\ \overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} \neq \bar{0} \end{array}\right\}$$ El sistema está en equilibrio.

Cálculo de la resultante:

$$\overline{M^{\dot{O}}_{Sist.}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M^{\dot{O}}_{\bar{P}_i}} = \overline{M^{(\dot{O}-\dot{O}^*)}_{\bar{R}}} \quad (1)$$

$$\overline{M^{(\dot{O}-\dot{O}^*)}_{\bar{R}}} = \bar{r} \wedge \bar{R} = \overline{\left(\dot{O}^* - \dot{O}\right)} \wedge \bar{R}$$

$$\overline{M^{(\dot{O}-\dot{O}^*)}_{\bar{R}}} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ (x_{\dot{O}} - x_{\dot{O}^*}) & (y_{\dot{O}} - y_{\dot{O}^*}) & 0 \\ 0 & R_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overline{M^{(\dot{O}-\dot{O}^*)}_{\bar{R}}} = R_y . (x_{\dot{O}} - x_{\dot{O}^*}) . \check{k} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1), resulta:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M^{\dot{O}}_{\bar{P}_i}} = R_y . (x_{\dot{O}} - x_{\dot{O}^*}) . \check{k}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\overline{r_i} \wedge \overline{P_i}) = R_y . (x_{\dot{O}} - x_{\dot{O}^*}) . \check{k}$$

Ecuación que permite calcular las coordenadas del punto $\dot{O}^*$ perteneciente a la recta de acción de la fuerza resultante.

Descomposición del sistema de fuerzas en estudio:

Equivalencia

$$\overline{R_I} = \overline{R_{II}} \quad \wedge \quad \overline{M^{\dot{O}}_{\overline{R_I}}} = \overline{M^{\dot{O}}_{\overline{R_{II}}}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_y} = \sum_{j=1}^{n} P_{j_y}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M^{\dot{O}}{}_{\overline{P_i}} = \sum_{j=1}^{n} M^{\dot{O}}{}_{\overline{P_j}}$$

Equilibrio

$$\bar{R} = \bar{0} \quad \wedge \quad \overline{M^{\dot{O}}_{\bar{R}}} = \bar{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_y} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M^{\dot{O}}{}_{\overline{P_i}} = 0$$