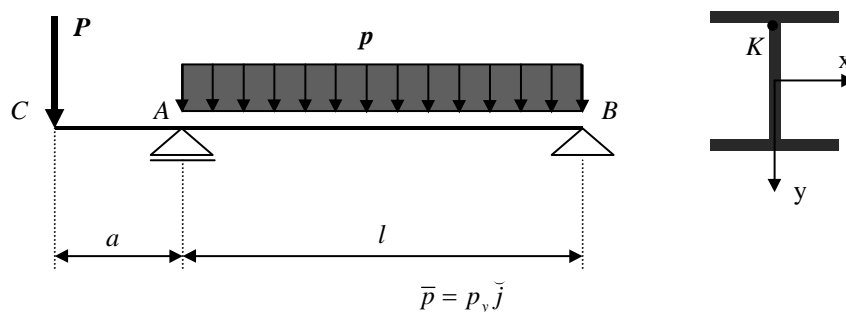


**Ejercicio N° 5- Enunciado**

Dada la estructura que se indica en la figura 5.1, la cual será construida en acero:

**Figura 5.1**

$a$	$l$	$p$	$P$	$\sigma_{adm}$	$\tau_{adm}$
$m$	$m$	$kN/m$	$kN$	$kN/cm^2$	$kN/cm^2$
1	4	40	50	14	8

**Tabla 5.1**

Se solicita

1. Trazar los diagramas de esfuerzos característicos
2. Dimensionar la misma adoptando un perfil doble T.
3. Determinar para la fibra extrema superior del alma (punto K) de la sección más comprometida al esfuerzo de corte:
  - 3.1. Las tensiones y planos principales, en forma analítica
  - 3.2. Las tensiones y planos principales de corte, y la tensión normal ( $\sigma^*$ ) asociada a los mismos, en forma analítica.
  - 3.3. Verificar los puntos 3.1. y 3.2. anteriores mediante la circunferencia de Mohr y realizar un cuadro comparativo

## Ejercicio N° 5– Resolución

### 1. Trazado de los diagramas de esfuerzos característicos

#### 1.1. Cálculo de las reacciones de vínculo

Se tiene el siguiente diagrama de cuerpo libre:

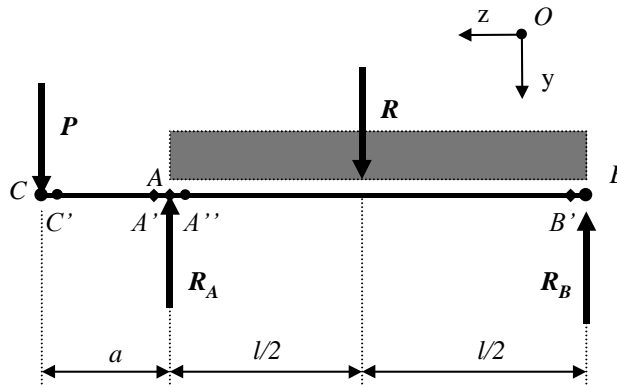


Figura 5.2

Siendo

$$R = P \cdot l = 40 \cdot 4 = 160 \cdot kN$$

Se tiene que:

$$\sum_i M_{ix}^B = 0$$

$$-P \cdot (a + l) + R_A \cdot l - R \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$R_A = \frac{P \cdot (a + l) + R \cdot \frac{l}{2}}{l} = \frac{50 \cdot (4 + 1) + 160 \cdot \frac{4}{2}}{4}$$

$$R_A = 142,5 \cdot kN$$

$$\sum_i P_{iy} = 0$$

$$P - R_A + R - R_B = 0$$

$$R_B = P - R_A + R = 50 - 142,5 + 160$$

$$R_B = 67,5 \cdot kN$$

#### 1.2. Trazado de los diagramas de esfuerzos característicos

Esfuerzos de corte:

$$Q_{zy}(C') = P = 50 \cdot kN$$

$$Q_{zy}(A') = P = 50 \cdot kN$$

$$Q_{zy}(A'') = Q_{zy}(A') - R_A = 50 - 142,5 = -92,5 \cdot kN$$

$$Q_{zy}(B') = Q_{zy}(A'') + R = -92,5 + 160 = 67,5 \cdot kN$$

Momentos flexores:

$$Mf_{x(C)} = 0 \cdot kN \cdot m$$

$$Mf_{x(A)} = -P \cdot a = 50 \cdot 1 = -50 \cdot kN \cdot m$$

$$Mf_{x(B)} = 0 \cdot kN \cdot m$$

El momento flexor máximo,  $Mf_{xmáx}$ , ocurre para  $Q_{zy} = 0$ . Se calcula la distancia  $d$  a partir de A de la siguiente manera:

$$Q_{zy(0)} = P - R_A + p \cdot d = 0$$

$$d = \frac{R_A - P}{p} = \frac{142,5 - 50}{40}$$

$$d = 2,31 \cdot m$$

En consecuencia:

$$Mf_{xmáx} = -P \cdot (a + d) + R_A \cdot d - p \cdot \frac{d^2}{2} = 0$$

$$Mf_{xmáx} = -50 \cdot (1 + 2,31) + 142,5 \cdot 2,31 - 40 \cdot \frac{2,31^2}{2}$$

$$Mf_{xmáx} = 56,96 \cdot kN \cdot m$$

$$Esc\_L = 0,5 \cdot m/cm \quad Esc\_Q_{zy} = 33,33 \cdot kN/cm \quad Esc\_Mf_x = 33,33 \cdot kN \cdot m/cm$$

$$\overline{AH} = l/2 = 2 \cdot m \quad \overline{HV} = Q_{zy(A^*)} \cdot l/2 = 92,5 \cdot 2 = 185 \cdot kN \cdot m$$

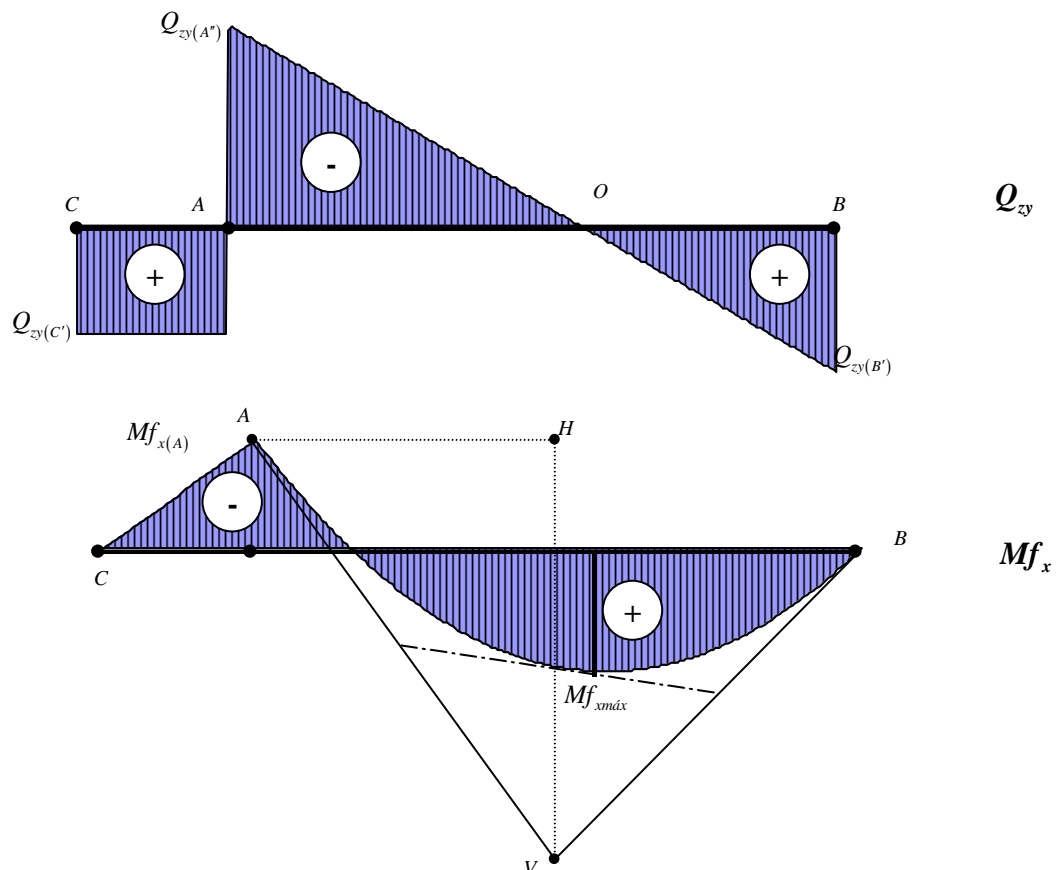


Figura 5.3

En definitiva, las secciones más comprometidas son:

Para el esfuerzo de corte, la sección ( $A''$ ), donde:

$$Q_{zy(A'')} = -92,5 \cdot kN$$

Para el momento flexor, la sección ( $O$ ), donde:

$$Mf_{xmáx} = 56,96 \cdot kN \cdot m = 5696 \cdot kN \cdot cm$$

## 2. Dimensionamiento

Se realiza teniendo en cuenta las secciones más comprometidas al momento flexor y al esfuerzo de corte. El criterio que se adopta es el siguiente:

1) Se dimensiona por flexión simple:

$$\sigma_{zmáx} \leq \sigma_{adm}$$

2) Se verifica al corte

$$\tau_{zymáx} \leq \tau_{adm}$$

En cuanto al dimensionamiento por flexión, se tiene:

$$\sigma_{zmáx} = \frac{Mf_{xmáx}}{W_x}$$

Siendo que

$$Mf_{xmáx} = 56,96 \cdot kN \cdot m = 5696 \cdot kN \cdot cm \quad \text{y} \quad \sigma_{adm} = 14 \cdot kN/cm^2$$

se llega a

$$W_x \geq \frac{5696}{14}$$

$$W_x \geq 406,86 \cdot cm^3$$

De acuerdo con la tabla de perfiles, se adopta un perfil doble T N° 26, cuyas características son:

$$W_x = 442 \cdot cm^3$$

$$J_x = 5740 \cdot cm^4$$

$$S_{xmáx}^* = 257 \cdot cm^3$$

$$e = 0,94 \cdot cm$$

$$b = 11,3 \cdot cm$$

$$h = 26 \cdot cm$$

$$h_1 = 23,18 \cdot cm$$

$$t = 1,41 \cdot cm$$

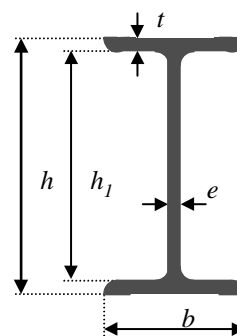


Figura 5.4

Verificación al corte para la sección (A'')

$$\tau_{zymáx} = \frac{Q_{zymáx} \cdot S_{xmáx}^*}{e \cdot J_x}$$

En valor absoluto se tiene que:

$$\tau_{zymáx} = \frac{92,5 \cdot 257}{0,94 \cdot 5740}$$

$$\tau_{zymáx} = 4,41 \cdot \text{kN/cm}^2$$

Se verifica que

$$|\tau_{zymáx}| \leq \tau_{adm}$$

$$4,41 \cdot \text{kN/cm}^2 < 8,0 \cdot \text{kN/cm}^2$$

### 3.1. Cálculo analítico de las tensiones y planos principales

Se realizará el cálculo para un punto  $K$  de la fibra extrema superior del alma (transición del alma con el ala), correspondiente a la sección más comprometida del esfuerzo de corte (sección A''). Para dicha sección los diagramas  $\sigma_z$  y  $\tau_{zy}$  serán:

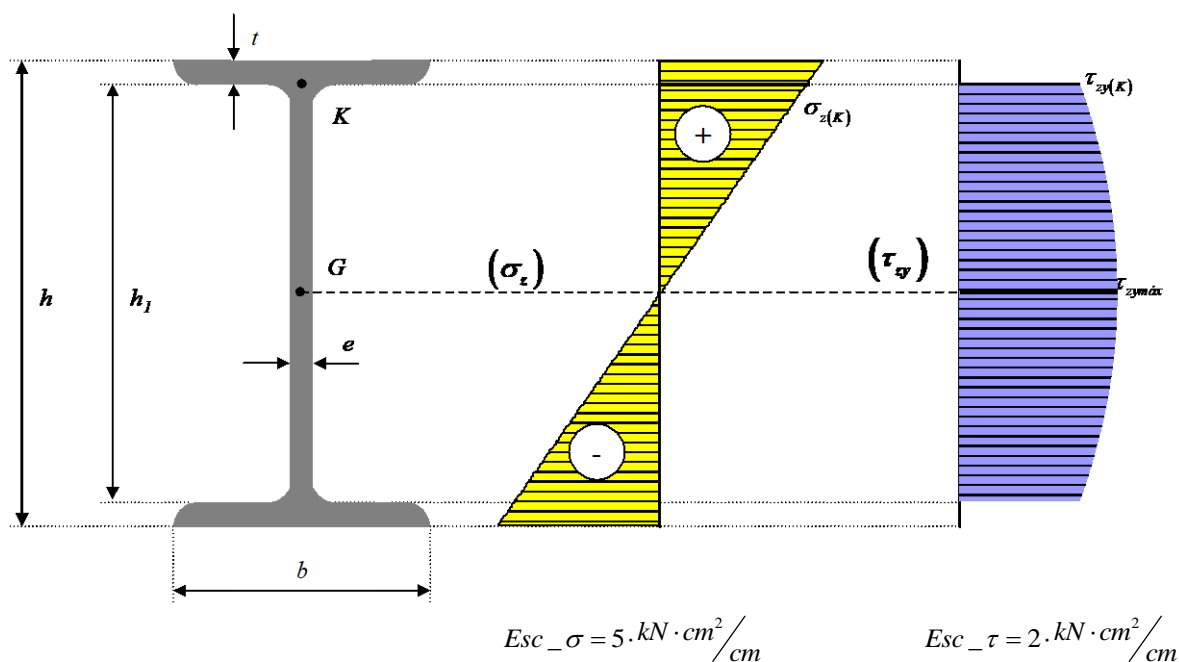


Figura 5.5

Donde siendo para dicha sección (A'') la concavidad de la barra hacia abajo, la tensión normal ( $\sigma_z$ ) en dicho punto  $K$  es de tracción.

En definitiva, las tensiones actuantes en el punto  $K$  serán los siguientes:

$$\sigma_{z(K)} = \frac{|Mf_{x(A'')}|}{J_x} \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right)$$

$$\sigma_{z(K)} = \frac{5000}{5740} \cdot \left(\frac{23,18}{2}\right)$$

$$\sigma_{z(K)} = 10,10 \cdot \text{kN/cm}^2$$

$$\tau_{zy(K)} = \frac{Q_{zy(A'')} \cdot S_{x(ALA)}^*}{e \cdot J_x}$$

Donde:

$$S_{x(ALA)}^* = b \cdot t \cdot \left(\frac{h-t}{2}\right)$$

$$S_{x(ALA)}^* = 11,3 \cdot 1,41 \cdot \left(\frac{26-1,41}{2}\right)$$

$$S_{x(ALA)}^* = 195,90 \cdot \text{cm}^4$$

Reemplazando y asignando valores absolutos:

$$\tau_{zy(K)} = \frac{92,5 \cdot 195,90}{0,94 \cdot 5740}$$

$$\tau_{zy(K)} = 3,36 \cdot \text{kN/cm}^2$$

Finalmente, tomando la cara derecha de la sección (A''), se tendrá para el punto K lo siguiente:

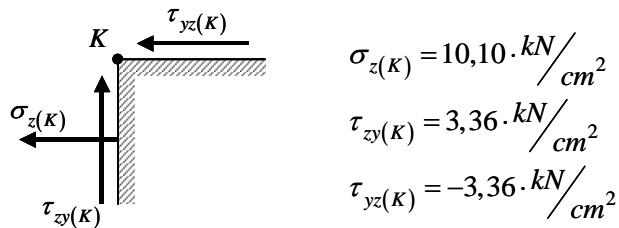


Figura 5.6

### Cálculo de los planos principales

Siendo:

$$\tan(2 \cdot \alpha_o) = \frac{2 \cdot \tau_{yz}}{\sigma_z - \sigma_y}$$

despejando y reemplazando valores se llega a que

$$\alpha_o = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2 \cdot \tau_{yz}}{\sigma_z - \sigma_y} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2 \cdot (-3,36)}{10,10 - 0} \right)$$

$$\alpha_o = -16^\circ 49'$$

**Cálculo de las tensiones principales**

Siendo

$$\sigma_{I;II} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{yz}^2}$$

Reemplazando valores:

$$\sigma_{I;II} = \frac{10,10+0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(10,10-0)^2 + 4 \cdot (-3,36)^2}$$

$$\sigma_{I;II} = 5,05 \pm 6,07$$

$$\sigma_I = 11,12 \cdot \text{kN/cm}^2$$

$$\sigma_I = -1,02 \cdot \text{kN/cm}^2$$

**3.2. Cálculo analítico de los planos y tensiones principales de corte:**

Cálculo de los planos principales de corte:

Siendo

$$\tan(2 \cdot \alpha_1) = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2 \cdot \tau_{yz}}$$

despejando y reemplazando valores se llega a que

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2 \cdot \tau_{yz}} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{0-10,10}{2 \cdot (-3,36)} \right)$$

$$\alpha_1 = 28^\circ \quad 11'$$

**Cálculo de las tensiones principales de corte**

Siendo:

$$\tau_{\begin{smallmatrix} máx \\ mín \end{smallmatrix}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4 \cdot (\tau_{yz})^2}$$

Reemplazando valores:

$$\tau_{\begin{smallmatrix} máx \\ mín \end{smallmatrix}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(10,10-0)^2 + 4 \cdot (-3,36)^2}$$

$$\tau_{\begin{smallmatrix} máx \\ mín \end{smallmatrix}} = \pm 6,07$$

$$\tau_{máx} = 6,07 \cdot \text{kN/cm}^2$$

$$\tau_{mín} = -6,07 \cdot \text{kN/cm}^2$$

Donde se verifica que:

$$|\tau_{m\acute{a}x}| \leq \tau_{adm}$$

$$6,07 \cdot kN/cm^2 < 8,0 \cdot kN/cm^2$$

La tensión normal  $\sigma^*$  asociada a los planos principales de corte será:

$$\sigma^* = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} = \frac{10,10 - 0}{2}$$

$$\sigma^* = 5,05 \cdot kN/cm^2$$

### 3.3. Circunferencia de Mohr

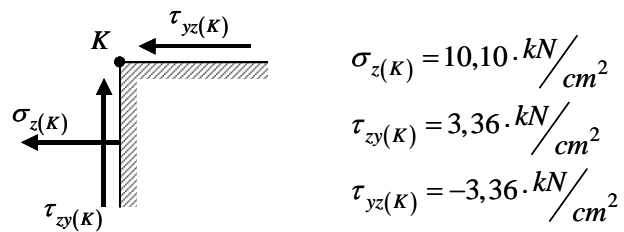
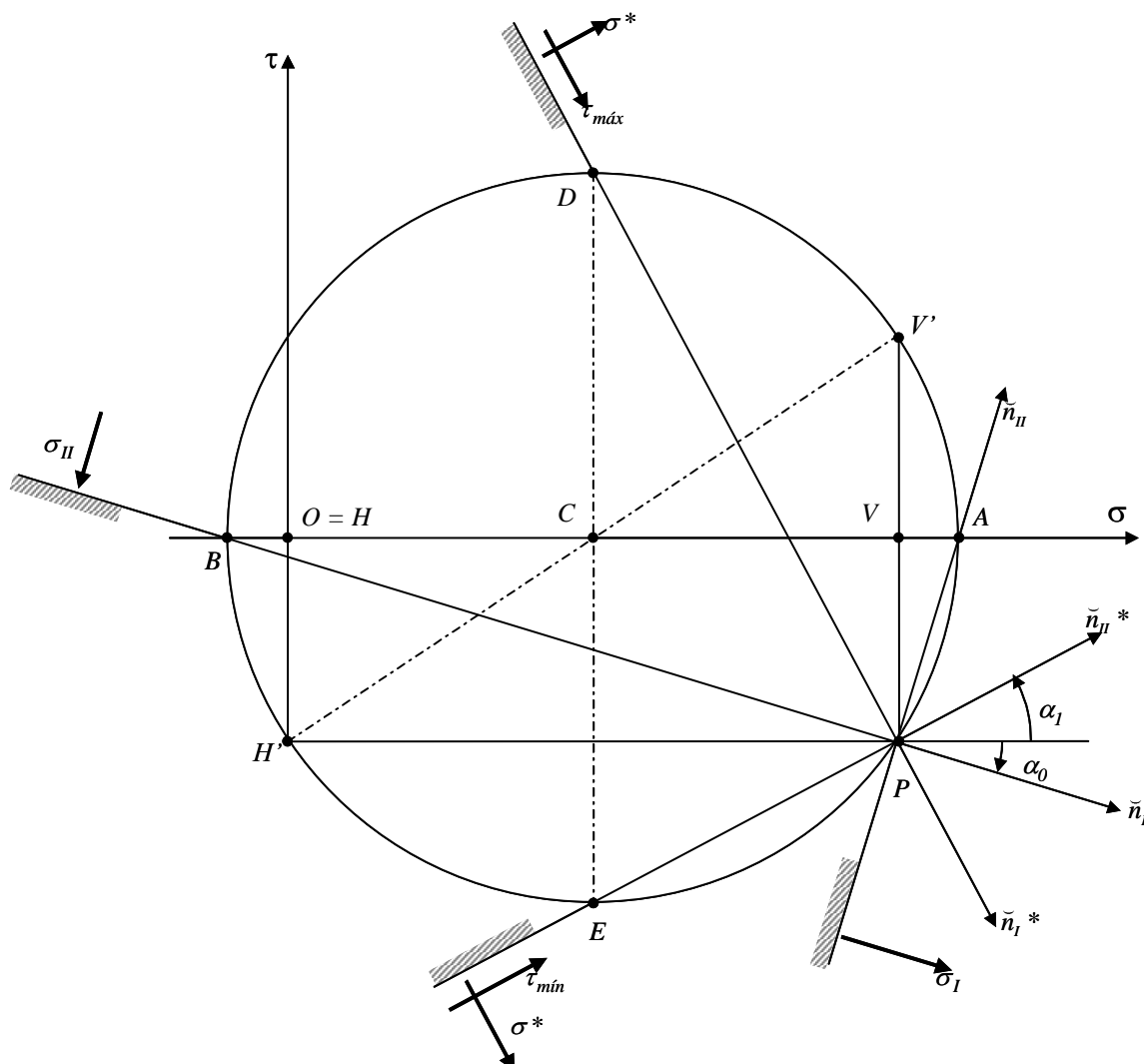


Figura 5.7



$$Esc_{-\sigma} = 1,25 \cdot kN \cdot cm^{-2} / cm^2 \quad Esc_{-\tau} = 1,25 \cdot kN \cdot cm^{-2} / cm^2$$



DATOS:

$$\overline{OV} = \sigma_{z(K)} = 10,10 \cdot kN/cm^2$$

$$\overline{HH'} = \tau_{yz(K)} = -3,36 \cdot kN/cm^2$$

$$\overline{VV'} = \tau_{zy(K)} = 3,36 \cdot kN/cm^2$$

RESULTADOS:

$$\overline{OA} = \sigma_I = 11,13 \cdot kN/cm^2$$

$$\overline{OB} = \sigma_{II} = -1,00 \cdot kN/cm^2$$

$$\overline{CD} = \tau_{m\acute{a}x} = 6,05 \cdot kN/cm^2$$

$$\overline{CE} = \tau_{min} = -6,05 \cdot \frac{kN}{cm^2}$$

$$\overline{OC} = \sigma^* = 5,06 \cdot kN/cm^2$$

$$\alpha_0 = -17^\circ$$

$$\alpha_1 = 28^\circ$$

*Figura 5.8*

<i>Cátedra: Ing. José Luis Tavorro</i>	<i>TP 5</i>	<i>5/10</i>
--	-------------	-------------

**Cuadro comparativo de valores**

Método	$\alpha_0$	$\sigma_I$	$\sigma_{II}$	$\alpha_I$	$\tau_{m\grave{a}x}$	$\tau_{m\grave{i}n}$	$\sigma^*$
	°	$kN/cm^2$	$kN/cm^2$	°	$kN/cm^2$	$kN/cm^2$	$kN/cm^2$
Analítico	-16° 49'	11,12	-1,02	28° 11'	6,07	-6,07	5,05
Circunferencia de Mohr	-17°	11,13	-1,00	28	6,05	-6,05	5,06