Ejercicio Nº / Tipo		
2.	03	G

* Dado el sistema de Fuerzas P_1 y P_2, esquematizado en la figura 2.03.01, se pide:

1 Determinar la distancia d entre las rectas de acción de ambas fuerzas.

2 Determinar las proyecciones de ambas fuerzas sobre los ejes coordenados y la suma de las mismas.

3 Determinar la suma de los momentos de las fuerzas P1 y P2 respecto de los puntos O y D.

4 Determinar la suma de los momentos de ambas fuerzas con respecto a cada uno de los ejes coordenados de referencia.

5 ¿Qué representan las dos fuerzas constitutivas del sistema?

6 Determinar el vector representativo de dicho conjunto.

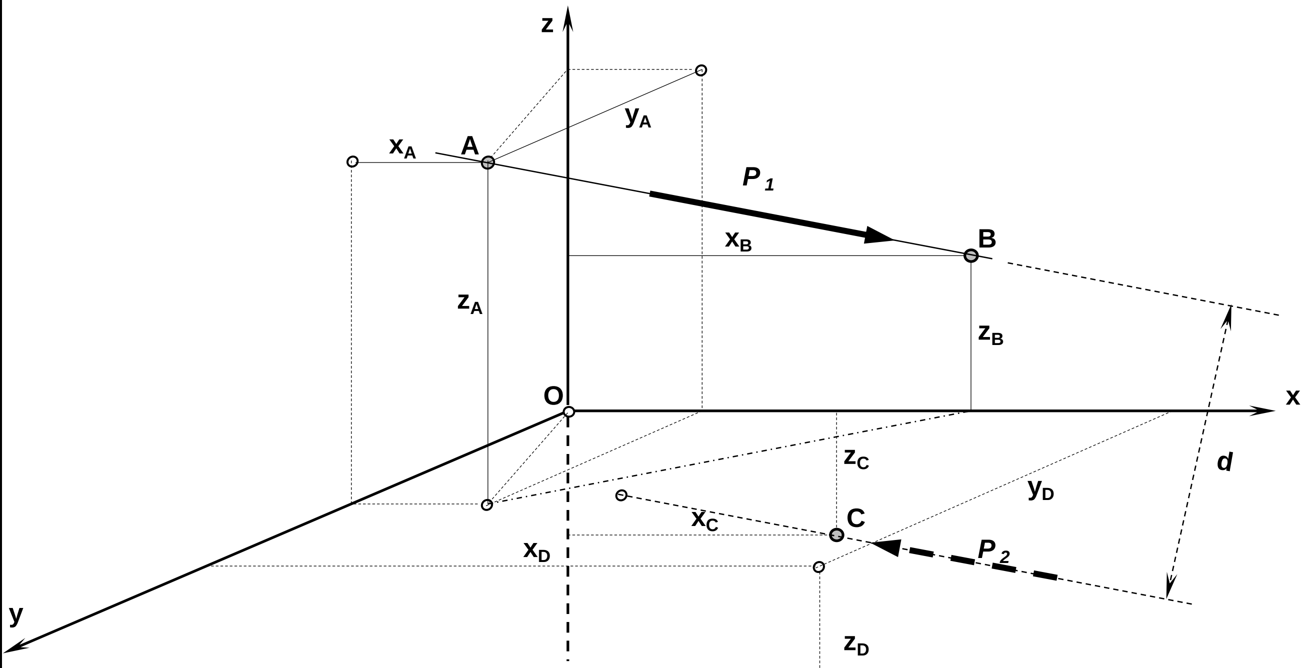

Fig. 2.03.01

Datos: $P_1 = - P_2$

$\lvert P_1\rvert$	$\lvert P_2\rvert$	x_A	y_A	z_A	x_B	y_B	z_B	x_C	y_C	z_C	x_D	y_D	z_C
[kN]		[m]											
5	5	2	4	10	6	0	4	4	0	-2	8	6	-10

C

VIERNES	16 a 20	Ing. GIACOIA	Ing. PARENTE				/
CLASES DE TP		JEFE DE TP	AYUDANTES DE TP	GRUPO Nº	ALUMNO: APELLIDO / NOMBRE	PADRON Nº	HOJA Nº

1 ***Distancia* d *entre las rectas de acción de ambas fuerzas.***

Para resolver este ítem calcularemos, en primer lugar, el momento de la fuerza P_1 con respecto al punto C, que pertenece a la recta de acción de P_2. Luego, sabiendo que dicho momento es igual al producto de la fuerza por la distancia al punto, podremos determinar la distancia d, dado que P_1 es conocida.

Eligiendo al punto B de la recta de acción de P_1 para definir el vector posición correspondiente, tendremos, entonces, lo siguiente:

$$M_{P1}{}^{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_{1x} & P_{1y} & P_{1z} \\ -2{,}00 & 0{,}00 & -6{,}00 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Dado que no conocemos las componentes P_{1x}, P_{1y} y P_{1z}, es necesario calcularlas, para lo cual debemos hallar primero los cosenos directores correspondientes.

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_B - x_A = (\ 6{,}00 - 2{,}00\ ) = 4{,}00 \text{ m} \\ \Delta y &= y_B - y_A = (\ 0{,}00 - 4{,}00\ ) = -4{,}00 \text{ m} \\ \Delta z &= z_B - z_A = (\ 4{,}00 - 10{,}00\ ) = -6{,}00 \text{ m} \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\Delta s = \text{raiz}\ [\ (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\ ] = 8{,}246 \text{ m} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} \cos\alpha_P &= \Delta x / \Delta s = 4{,}00 / 8{,}246 = 0{,}48507 \\ \cos\beta_P &= \Delta y / \Delta s = -4{,}00 / 8{,}246 = -0{,}48507 \\ \cos\gamma_P &= \Delta z / \Delta s = -6{,}00 / 8{,}246 = -0{,}72761 \end{aligned} \qquad (4)$$

Tendremos, entonces, que:

$$\begin{aligned} P_{1x} &= P \,.\, \cos\alpha = 5 \text{ kN} \,.\, 0{,}48507 = 2{,}43 \text{ kN} \\ P_{1y} &= P \,.\, \cos\beta = 5 \text{ kN} \,.\, -0{,}48507 = -2{,}43 \text{ kN} \\ P_{1z} &= P \,.\, \cos\gamma = 5 \text{ kN} \,.\, -0{,}72761 = -3{,}64 \text{ kN} \end{aligned} \qquad (5)$$

y, por lo tanto:

$$M_{P1}{}^{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2{,}43 & -2{,}43 & -3{,}64 \\ -2{,}00 & 0{,}00 & -6{,}00 \end{vmatrix} = 14{,}55\ i + 21{,}83\ j - 4{,}85\ k \ \text{[kN.m]} \qquad (6)$$

$$|M_{P1}{}^{C}| = \text{raiz}\ [\ (Mx_{P1}{}^{C})^2 + (My_{P1}{}^{C})^2 + (Mz_{P1}{}^{C})^2 = 26{,}68 \text{ kN.m} \qquad (7)$$

$$\mathbf{d} = |M_{P1}{}^{C}| \ / \ |P_1| = 26{,}68 \text{ kN.m} \ / \ 5{,}00 \text{ kN} = \mathbf{5{,}34 \text{ m}} \qquad (8)$$

$$\boxed{\mathbf{d = 5{,}34 \text{ m}}} \qquad (9)$$

b) *Proyecciones de ambas fuerzas sobre los ejes coordenados y suma de las mismas.*

Dado que $P_1 = -P_2$, las proyecciones correspondientes tendrán signos contrarios y su suma será nula.

P_{1x} = 2,43 kN
P_{1y} = -2,43 kN (determinadas en el punto anterior) (10)
P_{1z} = -3,64 kN

P_{2x} = -2,43 kN
P_{2y} = 2,43 kN (11)
P_{2z} = 3,64 kN

$\mathbf{P_{1x} + P_{2x} = 0}$	
$\mathbf{P_{1y} + P_{2y} = 0}$	(12)
$\mathbf{P_{1z} + P_{2z} = 0}$	

3 *Suma de los momentos de las fuerzas P1 y P2 respecto de los puntos O y D.*

3.1 Suma de los momentos de las fuerzas P1 y P2 respecto del punto O.

Eligiendo los puntos B y C de las rectas de acción de P_1 y P_2 para definir los vectores posición correspondientes, tendremos, entonces, lo siguiente:

$$M_{P1}^{O} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2{,}43 & -2{,}43 & -3{,}64 \\ -6{,}00 & 0{,}00 & -4{,}00 \end{vmatrix} = 9{,}70\ i + 31{,}53\ j - 14{,}55\ k \quad [\text{kN.m}] \qquad (13)$$

$$M_{P2}^{O} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2{,}43 & 2{,}43 & 3{,}64 \\ -4{,}00 & 0{,}00 & 2{,}00 \end{vmatrix} = 4{,}85\ i - 9{,}70\ j + 9{,}70\ k \quad [\text{kN.m}] \qquad (14)$$

En consecuencia, será:

$$M_{P1}^{O} + M_{P2}^{O} = 14{,}55\ i + 21{,}83\ j - 4{,}85\ k \quad [\text{kN.m}] \qquad (15)$$

$$\boxed{\Sigma M_{P1/P2}^{O} = M_{P1}^{O} + M_{P2}^{O} = 14{,}55\ i + 21{,}83\ j - 4{,}85\ k \quad [\text{kN.m}]} \qquad (16)$$

3.2 Suma de los momentos de las fuerzas P1 y P2 respecto del punto D.

Eligiendo los puntos B y C de las rectas de acción de P_1 y P_2 para definir los vectores posición correspondientes, tendremos, entonces, lo siguiente:

$$M_{P1}^{D} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2,43 & -2,43 & -3,64 \\ 2,00 & 6,00 & -14,00 \end{vmatrix} = 55,78\ i + 26,68\ j + 19,40\ k \quad [kN.m] \qquad (17)$$

$$M_{P2}^{D} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2,43 & 2,43 & 3,64 \\ 4,00 & 6,00 & -8,00 \end{vmatrix} = -41,23\ i - 4,85\ j - 24,25\ k \quad [kN.m] \qquad (18)$$

En consecuencia, será:

$$M_{P1}^{D} + M_{P2}^{D} = 14,55\ i + 21,83\ j - 4,85\ k \quad [kN.m] \qquad (19)$$

$$\boxed{\Sigma \mathbf{M}_{P1/P2}^{D} = \mathbf{M}_{P1}^{D} + \mathbf{M}_{P2}^{D} = \mathbf{14,55\ i + 21,83\ j - 4,85\ k \quad [kN.m]}} \qquad (20)$$

4 *Suma de los momentos de ambas fuerzas con respecto a cada uno de los ejes coordenados de referencia.*

Antetodo, debemos recordar que los momentos de cada fuerza con respecto a los ejes coordenados son iguales a las respectivas componentes del vector momento de cada una de ellas con respecto al punto de concurrencia de los tres ejes.

Consecuentemente, tendremos que:

$$\left.\begin{array}{l} M_{P1}^{x} = Mx_{P1}^{O}\ i = 9,70\ i \\ M_{P1}^{y} = My_{P1}^{O}\ j = +\ 31,53\ j \\ M_{P1}^{z} = Mz_{P1}^{O}\ k = -\ 14,55\ k \end{array}\right| \quad (21) \qquad \left.\begin{array}{l} M_{P2}^{x} = Mx_{P2}^{O}\ i = 4,85\ i \\ M_{P2}^{y} = My_{P2}^{O}\ j = -\ 9,70\ j \\ M_{P2}^{z} = Mz_{P2}^{O}\ k = +\ 9,70\ k \end{array}\right| \quad (22)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{M}_{P1}^{x} + \mathbf{M}_{P2}^{x} = \mathbf{14,55\ i} \\ \mathbf{M}_{P1}^{y} + \mathbf{M}_{P2}^{y} = \mathbf{+\ 21,83\ j} \\ \mathbf{M}_{P1}^{z} + \mathbf{M}_{P2}^{z} = \mathbf{-\ 4,85\ k} \end{array}} \quad \mathbf{[kN.m]} \qquad (23)$$

5 ***¿Qué representan las dos fuerzas constitutivas del sistema?***

Dado que $P_1 = -P_{2,}$ que la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a dos puntos cualesquiera del espacio, como lo son O y D, tienen el mismo valor y que la suma de las proyecciones sobre cada uno de los ejes coordenados es nula, lo que implica que es nula la resultante del sistema, podemos afirmar que las dos fuerzas datos del problema constituyen **UN PAR DE FUERZAS**.

6 ***Vector representativo de dicho conjunto.***

Evidentemente, las expresiones (6), (16) ó (20) responden este último punto. Tendremos, por tanto:

$$\boxed{\boldsymbol{M_{PAR\ P1/P2} = 14{,}55\ i + 21{,}83\ j - 4{,}85\ k\quad [kN.m]}} \qquad (24)$$

$$|M_{PAR\ \ P1/P2}| = \text{raiz}\ [\ (Mx_{P1/P2})^2 + (My_{P1/P2})^2 + (Mz_{P1/P2})^2 = \mathbf{26{,}68\quad kN.m} \qquad (25)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha_M = Mx_{P1/P2} \ / \ |M_{P1/P2}| = 0{,}54545 \\ \cos\beta_M = My_{P1/P2} \ / \ |M_{P1/P2}| = 0{,}81818 \\ \cos\gamma_M = Mz_{P1/P2} \ / \ |M_{P1/P2}| = -\ 0{,}18182 \end{array}\right| \qquad (26)$$

----oOo----