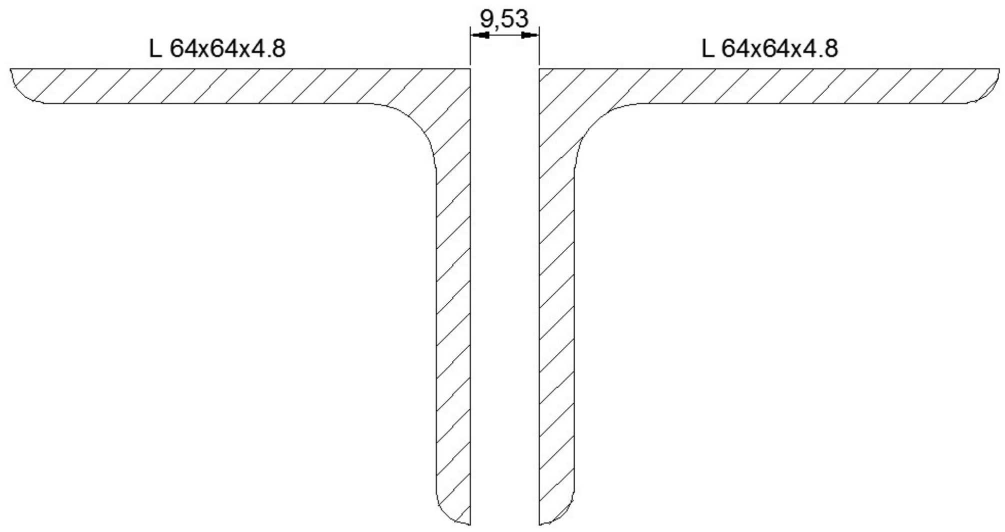
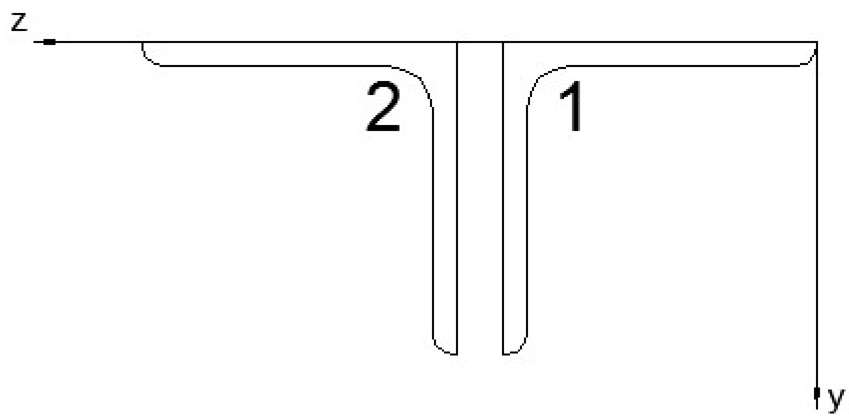
Ejercicio - Geometría de las masas

Para la geometría presentada determinar:
1. Posición del baricentro.
2. Momentos de inercia respecto al par de ejes YZ.
3. Momentos de inercia principales baricéntricos.



1. Determinación de la posición del baricentro



Caracteristicas del perfil (L 64x64x4.8)

$b := 64mm$ Ancho del perfil

$e_1 := 1.72cm$ Ubicación del baricentro

$F := 6cm^2$ Area

$e := 9.53mm$ Separación

Posición del baricentro del perfil 01 respecto a la terna YZ

$z_{1.g} := b - e_1 = 46.8 \cdot mm$

$y_{1.g} := e_1 = 17.2 \cdot mm$

Posición del baricentro del perfil 02 respecto a la terna YZ

$z_{2.g} := b + e + e_1 = 90.7 \cdot mm$

$y_{2.g} := e_1 = 17.2 \cdot mm$

Teniendo en cuenta que el momento estático de la figura entera es igual a la suma de los momentos estáticos de cada una de las partes componentes, se determinó la posición del baricentro de la figura completa de la siguiente manera.

$$z_g := \frac{z_{1.g} \cdot F + z_{2.g} \cdot F}{2 \cdot F} = 68.8 \cdot mm$$

$$y_g := \frac{y_{1.g} \cdot F + y_{2.g} \cdot F}{2F} = 17.2 \cdot mm$$

2. Momentos de inercia respecto a los ejes xz

De la tabla de perfiles se obtiene el valor de los momentos de inercia respecto a los ejes baricéntricos paralelos a Y y Z para cada una de las figuras (01 y 02)

$J_{z.g.1} := 22.7cm^4$ $\qquad$ $J_{z.g.2} := 22.7cm^4$

$J_{y.g.1} := 22.7cm^4$ $\qquad$ $J_{y.g.2} := 22.7cm^4$

Mediante el teorema de Steiner se obtienen los momentos de inercia mostrados anteriormente pero respecto a los ejes Y y Z para cada una de las figuras, de esta forma podremos sumar los momentos de inercia de cada una de las mismas y obtener los valores para la totalidad de la figura (Solo podemos sumar los momentos si estan asociados a mismos ejes)

$J_{z.1} := J_{z.g.1} + F \cdot y_{1.g}^2 = 404504 \cdot mm^4$

$J_{z.2} := J_{z.g.2} + F \cdot y_{2.g}^2 = 404504 \cdot mm^4$

$J_{y.1} := J_{y.g.1} + F \cdot z_{1.g}^2 = 1541144 \cdot mm^4$

$J_{y.2} := J_{y.g.2} + F \cdot z_{2.g}^2 = 5166159.7 \cdot mm^4$

A continuación se muestran los momentos de inercia respecto al par de ejes Y y Z para la figura completa.

$J_z := J_{z.1} + J_{z.2} = 809008 \cdot mm^4$

$J_y := J_{y.1} + J_{y.2} = 6707304 \cdot mm^4$

Nota: Si se observa la tabla, no da los valores de momento centrífugo para ejes baricentricos paralelos a los ejes Y y Z, pero los mismos se pueden determinar sabiendo que respecto a los ejes principales, el momento centrifugo es nulo.
A continuación se muestran las expresiones para obtener los momentos de inercia respecto a un par de ejes, conociendo otros momentos respecto a otro par de ejes pero con el mismo origen (Pagina 201 del tomo 1 del Ing. Fliess)

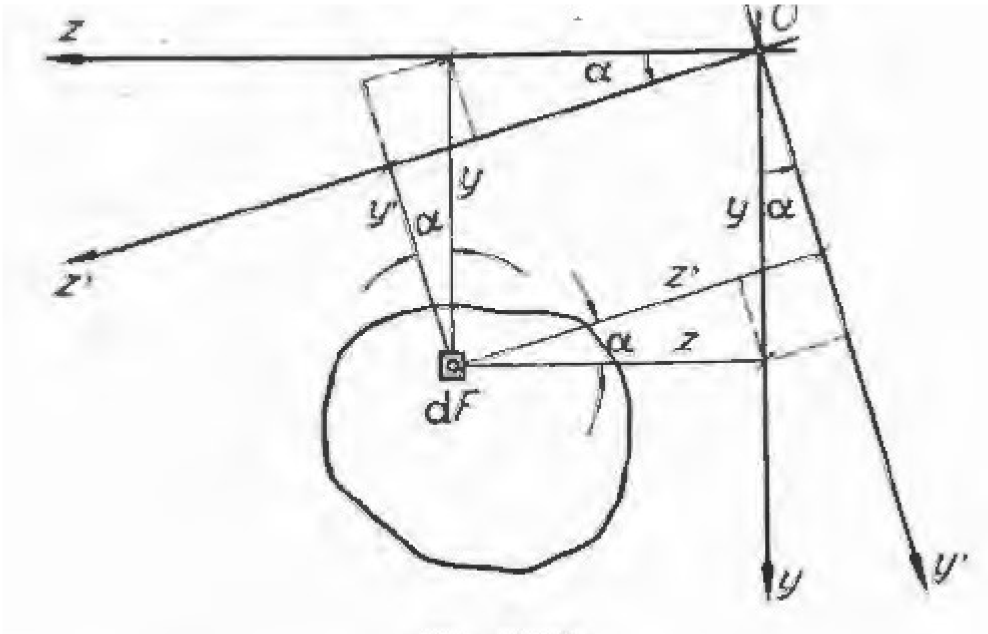


Fig. 4.28.

$$J_{y'} = J_y \cdot (\cos(\alpha))^2 + J_z \cdot (\sin(\alpha))^2 + J_{zy} \cdot \sin(2\cdot\alpha)$$

$$J_{z'} = J_z \cdot (\cos(\alpha))^2 + J_y \cdot (\sin(\alpha))^2 - J_{zy} \cdot \sin(2\cdot\alpha)$$

$$J_{z'y'} = J_{zy} \cdot \cos(2\cdot\alpha) + \frac{1}{2} \cdot \left(J_z - J_y\right) \cdot \sin(2\alpha)$$

Siendo Y´ y Z´ los ejes principales de inercia del perfil 01 (Ver tabla) tenemos

$$J_{z'.y'.1.g} := 0$$

$$\alpha := 45deg$$

$$J_{z'.1.g} := 36.76cm^4$$

$$J_{y'.1.g} := 8.65cm^4$$

El momento de inercia centrífugo de la figura 01 respecto a ejes baricéntricos paralelos a los ejes Z e Y resulta

$$J_{zy.1.g} := J_{z'.y'.1.g} \cdot \cos(2\cdot\alpha) + \frac{1}{2} \cdot \left(J_{z'.1.g} - J_{y'.1.g}\right) \cdot \sin(2\cdot\alpha) = 140550 \cdot mm^4$$

Mediante el teorema de Steiner se obtiene el momento de inercia centrífugo de la figura 01 respecto al par de ejes Y y Z.

$$J_{zy.1} := J_{zy.1.g} + F \cdot z_{1.g} \cdot y_{1.g} = 623526 \cdot mm^4$$

De la misma forma obtenemos el correspondiente a la figura 02.

$$J_{z'.y'.2.g} := 0$$

$$\alpha := 45deg$$

$$J_{z'.2.g} := 8.65cm^4$$

$$J_{y'.2.g} := 36.76cm^4$$

$$J_{zy.2.g} := J_{z'.y'.2.g} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) + \frac{1}{2} \cdot \left(J_{z'.2.g} - J_{y'.2.g}\right) \cdot \sin(2 \cdot \alpha) = -140550 \cdot mm^4$$

$$J_{zy.2} := J_{zy.2.g} + F \cdot z_{2.g} \cdot y_{2.g} = 795783.6 \cdot mm^4$$

A continuación se presenta el momento de inercia centrífugo de la figura completa respecto al par de ejes Y y Z.

$$J_{zy} := J_{zy.1} + J_{zy.2} = 1419310 \cdot mm^4$$

3. Momentos de inercia principales

Mediante el teorema de Steiner se obtienen los momentos de inercia respecto a los ejes baricéntricos paralelos al par Y y Z de la figura completa.

$$J_{z.g} := J_z - 2F \cdot y_g^{\ 2} = 454000 \cdot mm^4$$

$$J_{y.g} := J_y - 2F \cdot z_g^{\ 2} = 1032953 \cdot mm^4$$

Dado que el eje Y baricéntrico resulta un eje de simetría y el eje Z resulta ser el eje ortogonal al mismo, dicho par de ejes resultan los ejes principales de inercia, por lo que el momento centrifugo respecto a dicho par de ejes resulta nulo.