Álgebra Lineal (Segundo cuatrimestre, 2024)

Guías de Trabajos Prácticos

Versión 2.1 [En construcción]

Cuando podemos trasladar un problema práctico al lenguaje de la matemática, podemos, al mismo tiempo, "abstraernos" de las características secundarias del problema y, haciendo uso de fórmulas y teoremas generales, obtener resultados precisos. De este modo la abstracción de la matemática constituye su potencia; esta abstracción es una necesidad práctica.

A. N. Kolmogorov

Glosario de símbolos

: Alto. Estos ejercicios son importantes, pudiendo ser o no difíciles de resolver. Se recomienda fuertemente resolverlos.

: Curva peligrosa. Estos ejercicios pueden ser más difíciles de lo que parecen a simple vista, o por el contrario, si se miran bien resultan más fáciles de lo que parecen. Ante la duda, consulte a los docentes del curso.

: "Siga siga". Lea detenidamente el enunciado. Si cree entender qué es lo que hay que hacer (ya ha resuelto un ejercicio previamente de espíritu similar), pase al siguiente. Ante la duda, resuélvalo.

: Solo para artesanos. Estos ejercicios son de naturaleza teórica y exigen un buen dominio del arte y una cuota de imaginación.

: Oráculo. Proporciona pistas y sugerencias para resolver algunos ejercicios. A veces, propone una situación.

. El ejercicio requiere utilizar una máquina.

Guía 1

Preliminares y notación

En todo lo que sigue, y salvo que se diga lo contrario, se utiliza la siguiente notación:

1. $\mathbb{N}$ denota el conjunto de todos los números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
2. $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de todos los números enteros,
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$
3. $\mathbb{N}_0$ denota el conjunto de todos los números enteros no negativos,
$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$
4. $\mathbb{R}$ denota el conjunto (cuerpo) de todos los números reales.
5. $\mathbb{R}^+$ denota el conjunto de números reales no negativos, y $\mathbb{R}^+_*$ el conjunto de los números reales positivos.
6. $\mathbb{C}$ denota el conjunto (cuerpo) de todos los números complejos. Por definición $z \in \mathbb{C}$ si, y sólo si $z = a+ib$, donde $i^2 = -1$ y $a, b \in \mathbb{R}$. La expresión $\bar{z} = a-ib$ se utiliza para designar al conjugado de z. Obsérvese que $z + \bar{z} = 2a$ y que $z - \bar{z} = i2b$. La *fórmula de Euler* establece que
$$e^z = e^{a+ib} = e^a\left(\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b)\right).$$
7. Dado $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{I}_n$ denota el conjunto $\{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$. Nótese que $\{x_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ denota el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ cuyos elementos son $x_1, x_2, \dots, x_n$.
8. Dado un conjunto no vacío $\mathbb{I}$, $\{x_i : i \in \mathbb{I}\}$ denota el conjunto cuyos elementos están indexados por el conjunto $\mathbb{I}$.
9. Salvo que se diga lo contrario, las letras i, j, k, l denotan índices en algún subconjunto de $\mathbb{N}$, n y m denotan números naturales, u, v, w, x, y denotan vectores, A, B, C denotan matrices.
10. $\mathbb{K}$ denota un cuerpo.
11. $\mathbb{K}^{m\times n}$ denota el conjunto de todas las matrices de $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Para denotar los coeficientes de una matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, se utilizan las notaciones $A = [A_{ij}]_{\substack{i\in\mathbb{I}_m\\ j\in\mathbb{I}_n}}$ o $A = [a_{ij}]_{\substack{i\in\mathbb{I}_m\\ j\in\mathbb{I}_n}}$.
12. Dada $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, se denota por $A^T \in \mathbb{K}^{n\times m}$ a su matriz traspuesta, definida por $A^T_{ij} := A_{ji}$, para $i \in \mathbb{I}_n$ y $j \in \mathbb{I}_m$.
13. El símbolo
$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$
se llama *delta de Kronecker*
14. La matriz de $\mathbb{K}^{n\times n}$ con unos en la diagonal principal y ceros en cualquier otro lugar, $\mathbf{I} := [\delta_{ij}]_{\substack{i\in\mathbb{I}_n\\ j\in\mathbb{I}_n}}$, se llama *la matriz identidad de orden n.*

15. $\mathbb{K}^n$ denota el conjunto de todas las matrices de $n \times 1$ con coeficientes en $\mathbb{K}$: $x \in \mathbb{K}^n$ si, y sólo si
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$$
para algunos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$.
16. Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Las columnas de A se pueden pensar como elementos de $\mathbb{K}^m$ y las filas de A como elementos de $\mathbb{K}^n$. La notación $A_{i*} \in \mathbb{K}^n$ se utiliza para denotar la i-ésima fila de A, y la notación $A_{*j} \in \mathbb{K}^m$ para denotar la j-ésima columna de A.
17. El conjunto $\mathcal{E} = \{e_j : j \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{K}^n$ cuyos elementos están definidos por $e_j := \mathbf{I}_{*j}$ se denomina *la base canónica de* $\mathbb{K}^n$.
18. Dado un intervalo I de la recta real, $C(I)$ denota el conjunto de todas las funciones continuas de I en $\mathbb{R}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, $C^n(I)$ denota el conjunto de todas las funciones de I en $\mathbb{R}$ que son n-veces derivables y cuyas derivadas sucesivas son continuas hasta el orden n inclusive. El conjunto de todas las funciones que pertenecen a todos los $C^n(I)$, $n \in \mathbb{N}$, se designa por $C^\infty(I)$, es decir, $C^\infty(I) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(I)$.
19. $\mathbb{K}[x]$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$: $p \in \mathbb{K}[x]$ si, y sólo si, $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$ y algunos $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.
20. El grado del polinomio $0 \in \mathbb{K}[x]$ es $-\infty$.
21. $\mathbb{K}_n[x]$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ cuyo grado no supera n.

Ejercicios

1.1 Verificar las siguientes afirmaciones.

(**a**) El conjunto $\left\{\begin{bmatrix}-a+2b & 2a-3b & 3a\end{bmatrix}^T : a,b \in \mathbb{R}\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(**b**) El conjunto $\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(**c**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de polinomios

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k : a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\right\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}[x]$.

(**d**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de funciones

$$\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(2k\pi t) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi t)\right] : a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}\right\}$$

es un subespacio de $C^\infty(\mathbb{R})$.

: *observar que la morfología de todos esos conjuntos es la misma:*

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} x_j v_j : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\right\},$$

donde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son vectores de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ¿Será verdad que el conjunto $\left\{x_1 \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T + x_2 \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T : x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+\right\}$ es un subespacio?

1.2 Se consideran los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{S}_1 = \left\{a\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\end{bmatrix}^T + b\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\end{bmatrix}^T + c\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\end{bmatrix}^T : a,b,c \in \mathbb{R}\right\},$$

$$\mathbb{S}_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\right\}.$$

Verificar que $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ son subespacios de $\mathbb{R}^3$ y describirlos mediante sistemas de generadores. ¿Será verdad que $\mathbb{S}_2 = \mathbb{S}_1$?

1.3 STOP Sean $A_1 = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$.

(**a**) Comprobar que $B \in \operatorname{gen}\{A_1, A_2, A_3\}$ y hallar 3 maneras diferentes de representar B como combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3.

(**b**) Hallar una sistema de generadores del subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbb{S} := \left\{\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^T : x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 = 0_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\right\}.$$

(**c**) Representar cada una de las matrices A_i como una combinación lineal de las otras dos.

(**d**) Comprobar que $\{0\} \subsetneq \mathrm{gen}\{A_1\} \subsetneq \mathrm{gen}\{A_1, A_2\} = \mathrm{gen}\{A_1, A_2, A_3\}$.

1.4 En cada uno de los siguientes casos describir el subespacio $\mathbb{S}$ mediante un sistema de generadores minimal.

(**a**) $\mathbb{S} = \left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \mathrm{traza}(X) = 0\right\}$.

(**b**) $\mathbb{S} = \left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : X^T = X\right\}$.

(**c**) $\mathbb{S} = \left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : X \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X\right\}$.

(**d**) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = p(-1)\}$.

(**e**) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = p(-1) = 0\}$.

(**f**) $\mathbb{S} = \left\{p \in \mathbb{R}_3[x] : \int_{-1}^{1} p(x)dx = 0, \int_{-1}^{1} xp(x)dx = 0\right\}$.

1.5 [*miniatura*] Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, v_3\}$ un sistema de generadores de $\mathbb{V}$. Probar que $\mathcal{G}$ es un sistema minimal de generadores de $\mathbb{V}$ si, y sólo si, $\mathcal{G}$ es linealmente independiente.

: *¿qué significa que $\mathcal{G}$ sea un sistema de generadores que no es minimal?*

1.6 [*herramienta*] Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\{v_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{V}$ un conjunto linealmente independiente, y $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Para cada $j \in \mathbb{I}_n$ se definen los vectores $w_j := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$. Mostrar que $\{w_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es linealmente independiente si, y sólo si, $\det(A) \neq 0$.

1.7 Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se considera un conjunto de vectores linealmente independiente $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{V}$ y se definen w_1, w_2, w_3, w_4 mediante

$$
\begin{aligned}
w_1 &:= v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4, \\
w_2 &:= -4v_1 - 2v_2 + v_4, \\
w_3 &:= 2v_1 + 3v_2 - v_3 - 3v_4, \\
w_4 &:= 17v_1 - 10v_2 + 11v_3 + v_4.
\end{aligned}
$$

¿El conjunto $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es linealmente independiente?

1.8 Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son linealmente independientes en su correspondiente espacio vectorial.

(**a**) El subconjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(**b**) El subconjunto $\left\{1 + 3x - 2x^2, 3 + 5x - 6x^2, -5x + 6x^2\right\}$ de $\mathbb{R}[x]$.

(**c**) El subconjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

1.9 Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de funciones son linealmente independientes:

(**a**) $\mathcal{F} = \{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$. : *calcular el Wronskiano de* $\mathcal{F}$.

(**b**) $\mathcal{G} = \{1 + 3\operatorname{sen}(x) - 2\cos(x), 3 + 5\operatorname{sen}(x) - 6\cos(x), -5\operatorname{sen}(x) + 6\cos(x)\}$.

(**c**) $\tilde{\mathcal{G}} = \{1 + 2\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x), 4 + 5\operatorname{sen}(x) + 7\cos(x), 2 + \operatorname{sen}(x) + \cos(x)\}$.

1.10 Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes conjuntos son linealmente independientes en su correspondiente espacio vectorial.

(**a**) $\{1 + a\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x), 4 + 5\operatorname{sen}(x) + 7\cos(x), a + \operatorname{sen}(x) + \cos(x)\}$ en $C^\infty(\mathbb{R})$.

(**b**) $\left\{1 + 2ax + x^2 + 2x^3, 2 + ax + 4x^2 + 8x^3, x^2 + 2x^3\right\}$ en $\mathbb{R}_3[x]$.

(**c**) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & a \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3a+1 & 3 \\ -4 & 3a+1 \end{bmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

1.11 Hallar una base y determinar la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios:

(**a**) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = 0\}$.

(**b**) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0,\ p(2) = 0\}$.

(**c**) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) = 0,\ p'(1) = 0,\ p''(1) = 0\}$.

(**d**) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : 18p(0) = 3p''(0) + 2p'''(0),\ 6p'(0) = 6p''(0) - p'''(0)\}$.

1.12 Hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que el conjunto

$$\mathcal{B}_a = \left\{ \begin{bmatrix} a & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & a & \frac{3}{2} \end{bmatrix}^T \right\}$$

es una base del subespacio $\mathbb{S}_a = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : \frac{1}{2}x_1 - ax_3 + x_4 = 0\right\}$.

1.13 [*herramienta*] Explicar por qué los siguientes algoritmos producen una base $\mathcal{B}$ de un subespacio $\mathbb{S}$ a partir de un sistema de generadores $\mathcal{G}$ del mismo.

(**a**) *Algoritmo espacio filas*:

Algorithm 1 espacio filas

Require: $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{K}^n$ un sistema de generadores del subespacio $\mathbb{S}$.
Ensure: $\mathcal{B}$ una base del subespacio $\mathbb{S}$.

Construir la matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ cuyas filas son $v_1^T, \dots, v_m^T$
Construir $E \in \mathbb{K}^{m\times n}$ la matriz escalonada por filas reducida de A
Listar las filas no nulas de E: $\{E_{i_1 *}, \dots, E_{i_q *}\}$
$\mathcal{B} \leftarrow \{E_{i_1 *}, \dots, E_{i_q *}\}$
return $\mathcal{B}$

(**b**) *Algoritmo espacio columnas*:

Algorithm 2 espacio columnas

Require: $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{K}^m$ un sistema de generadores del subespacio $\mathbb{S}$.
Ensure: $\mathcal{B}$ una base del subespacio $\mathbb{S}$.

Construir la matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ cuyas columnas son $v_1, \dots, v_n$
Construir $E \in \mathbb{K}^{m\times n}$ la matriz escalonada por filas reducida de A
Listar las columnas de A que corresponden a las columnas pivotales de E: $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_p}\}$
$\mathcal{B} \leftarrow \{v_{j_1}, \dots, v_{j_p}\}$
return $\mathcal{B}$

1.14 En cada uno de los siguientes casos, hallar dos bases del subespacio generado por el sistema de generadores $\mathcal{G}$: la primera utilizando el *algortimo espacio filas* y la segunda utilizando el *algoritmo espacio columnas*.

(**a**) $\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(**b**) $\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(**c**) $\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^3$.

: *alguno a mano y para ganar tiempo el resto a* .

1.15 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\operatorname{col}(A) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}^T\right\}$ y $\operatorname{nul}(A) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right\}$, y sea $b = \begin{bmatrix}1 & -7 & 0\end{bmatrix}^T$.

(**a**) Explicar por qué el sistema lineal $Ax = b$ es compatible.

(**b**) Explicar por qué el sistema lineal $Ax = b$ no puede tener una única solución.

1.16 Lucas y Monk resolvieron el sistema lineal $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}.$$

Lucas encontró la solución

$$S_L = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T + \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & -2\end{bmatrix}^T\right\},$$

y Monk la solución

$$S_M = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T + \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-3 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}.$$

¿Alguno de los dos encontró la solución correcta?

1.17 Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 4 & 0\\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1\\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1\end{bmatrix}$$

(**a**) Hallar una base de cada uno de los cuatro subespacios fundamentales de la matriz A.

(**b**) Sea $b = \begin{bmatrix}3 & 5 & 5 & 7\end{bmatrix}^T$, ¿existe $x \in \mathbb{R}^5$ tal que $Ax = b$? Si la respuesta es afirmativa, hallar todas las soluciones del sistema $Ax = b$.

(**c**) Para $b = \begin{bmatrix}3 & 5 & 5 & 7\end{bmatrix}^T$, ¿existe $x \in \operatorname{fil}(A)$ tal que $Ax = b$? Si la respuesta es afirmativa, hallar todas las soluciones del sistema $Ax = b$ pertenecientes a $\operatorname{fil}(A)$.

1.18 Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ dos matrices tales que:

$$AB = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & -2 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

donde $\operatorname{rango}(B) = 2$. Hallar una base de $\operatorname{nul}(B)$.

1.19 Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ dos matrices tales que

$$AB = \begin{bmatrix}10 & -10 & -5 & 5\\ 11 & -11 & -4 & 7\\ 11 & -11 & -5 & 6\end{bmatrix},$$

donde rango$(A) = 3$, y B satisface que

$$B\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & 3 & 1\end{bmatrix}^T, \quad B\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}5 & 7 & 6\end{bmatrix}^T.$$

Hallar todas las soluciones del sistema $Bx = \begin{bmatrix}5 & 1 & 4\end{bmatrix}^T$.

1.20 Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases de $\mathbb{R}^2$ definidas por

$$\mathcal{E} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\} \text{ y } \mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}\right\}.$$

(**a**) Determinar los siguientes vectores de coordenadas en las bases indicadas

$$\left[\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right]^{\mathcal{E}}, \left[\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right]^{\mathcal{B}}, \left[\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right]^{\mathcal{E}}, \left[\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right]^{\mathcal{B}}, \left[\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right]^{\mathcal{E}}, \left[\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right]^{\mathcal{B}}.$$

(**b**) Hallar las siguientes matrices de cambio de coordenadas $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$

1.21 Sea $\mathcal{B} = \left\{1 + 2x + x^2, p_1, p_2\right\}$ la base de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$[1 + x]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\end{bmatrix}^T \quad \text{y} \quad [2 + x + x^2]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-2 & -2 & 1\end{bmatrix}^T.$$

(**a**) Hallar el vector de coordenadas de $p = 3 + 2x + x^2$ en base $\mathcal{B}$

(**b**) Hallar $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$, la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica de $\mathbb{R}_2[x] = \left\{1,\, x,\, x^2\right\}$ en la base $\mathcal{B}$.

(**c**) Utilizar la matriz $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ para determinar el vector de coordenadas del polinomio $q = 3x^2 + x + 4$ en base $\mathcal{B}$.

1.22 Sea $\mathcal{B}_1$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B}_1 = \left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\right\},$$

y sea $\mathcal{B}_2$ la base de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}_1$ en la base $\mathcal{B}_2$ es

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\1 & 3 & 2\\2 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

Hallar el vector de coordenadas del vector $v = \begin{bmatrix}6 & 3 & 1\end{bmatrix}^T$ en base $\mathcal{B}_2$.

1.23 Sean $p_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$, $p_2(x) = -x(x-2)$ y $p_3(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$.

(**a**) Verificar que $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(**b**) Observar que para cualquier polinomio $p \in \mathbb{R}_2[x]$ el vector de coordenadas de p respecto de la base $\mathcal{B}$ es

$$[p]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}.$$

(**c**) Hallar el vector de coordenadas de $p(x) = x^2 - x + 1$ en la base $\mathcal{B}$.

1.24 Sea $\mathcal{X} = \{x_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de n números reales. Para cada $i \in \mathbb{I}_n$ sea $p_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ el polinomio de grado $n-1$ definido por

$$p_i(x) := \prod_{k \in \mathbb{I}_n : k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

(**a**) Demostrar que $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} := \{p_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. : *para cada polinomio p de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ estudiar el grado y la cantidad de raíces del polinomio*

$$r(x) = p(x) - \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \prod_{k \in \mathbb{I}_n : k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

(**b**) Observar que para cualquier polinomio $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ el vector de coordenadas de p respecto de la base $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ es $[p]^{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}} = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) e_i$, donde $\{e_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. En particular, se tiene que $[x^k]^{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}} = \begin{bmatrix} x_1^k & x_2^k & \cdots & x_n^k \end{bmatrix}^T$.

(**c**) Concluir que dados $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ el polinomio $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ definido por

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{k \in \mathbb{I}_n : k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k},$$

es el único polinomio de grado menor o igual que $n-1$ tal que su gráfico $\Gamma_p := \{(x, p(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ contiene al conjunto $\{(x_i, y_i) : i \in \mathbb{I}_n\}$.

1.25 Para las siguientes elecciones de subespacios $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, hallar una base del mayor subespacio contenido en ambos y otra del menor subespacio que los contiene.

(**a**) $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ son los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\},$$
$$\mathbb{S}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

(**b**) $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ son los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \right\},$$
$$\mathbb{S}_2 = \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

(**c**) $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ son los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 := \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\},$$

$$\mathbb{S}_2 := \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}4 & 2 & 2 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}2 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}^T\right\}.$$

1.26 Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : X \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} X\right\} \text{ y } \mathbb{S}_2 = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}.$$

Hallar una base de $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ que contenga una base de $\mathbb{S}_1$ y una base de $\mathbb{S}_2$.

1.27 STOP Sean $\mathbb{S}_1$, $\mathbb{S}_2$ y $\mathbb{S}_3$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_4 = 0,\ x_1 + x_3 + x_4 = 0\right\},$$

$$\mathbb{S}_2 = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}2 & 3 & 0 & 2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T\right\},$$

$$\mathbb{S}_3 = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

Hallar un subespacio $\mathbb{T}$ tal que $(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2) \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_3$.

1.28 [*miniatura*] Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^2$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\right\}, \quad \mathbb{S}_2 := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\right\}.$$

Hallar un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^2$. ¿Es único? Si la respuesta es negativa, construir otro.

1.29 STOP Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 := \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T\right\},$$

$$\mathbb{S}_2 := \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right\}.$$

Construir un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que

$$\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}.$$

¿Es único? Si la respuesta es negativa, construir otro.

1.30 Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 := \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\},$$

$$\mathbb{S}_2 := \left\{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0,\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\right\}.$$

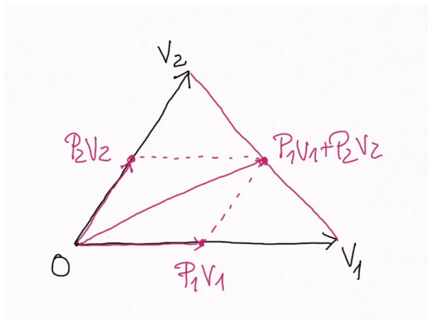
Hallar un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^4$. ¿Es único? Si la respuesta es negativa, construir otro.

Guía 2

Preliminares y notación

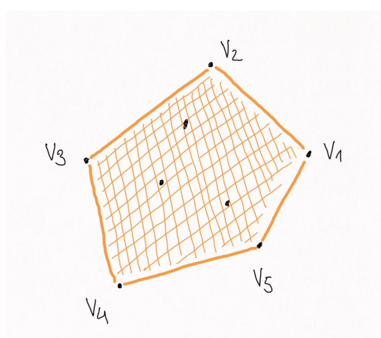
1. Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dos conjuntos. Una *aplicación* (o *función*) $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$, es una relación entre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ que a cada elemento $x \in \mathcal{X}$ le asigna un único elemento del conjunto $\mathcal{Y}$ que se denota mediante $f(x)$.
2. Con $\mathrm{id}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ se denota la aplicación identidad de $\mathcal{X}$:
$$\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(x) = x \;\text{ cualquiera sea } x \in \mathcal{X}.$$
3. Sea $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una aplicación de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$.
   - Dados $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$, si $f(x) = y$ se dice que *y es la imagen de x por f* y que *x es imagen inversa de y*. El conjunto de todas las imágenes inversas de y por f, se denomina *la preimagen de y en $\mathcal{X}$* y se designa con $f^{-1}(y)$
   $$f^{-1}(y) := \{x \in \mathcal{X} : f(x) = y\}.$$
   - Se dice que f es *inyectiva* si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$ cualesquiera sean $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, o equivalentemente si $f(x_1) \neq f(x_2)$ cada vez que $x_1 \neq x_2$. Notar que f es inyectiva si, y sólo si para cualquier $y \in \mathcal{Y}$, la ecuación $f(x) = y$ admite como máximo una solución en $\mathcal{X}$.
   - Se dice que f es *sobreyectiva* si para todo $y \in \mathcal{Y}$ existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) = y$. Notar que f es sobreyectiva si, y sólo si para cualquier $y \in \mathcal{Y}$, la ecuación $f(x) = y$ admite como mínimo una solución en $\mathcal{X}$.
   - Se dice que f es *biyectiva* si f es inyectiva y sobreyectiva. Notar que f es biyectiva si, y sólo si para cualquier $y \in \mathcal{Y}$, la ecuación $f(x) = y$ admite exactamente una solución en $\mathcal{X}$.
   - Si $X \subseteq \mathcal{X}$, el conjunto de todas las imágenes de elementos de X por f se designa por $f(X)$
   $$f(X) := \{f(x) : x \in X\} = \{y \in \mathcal{Y} : \text{ existe } x \in X \text{ tal que } f(x) = y\}$$
   y se denomina *el conjunto imagen de X por f*.
   - *La imagen de f* es el conjunto $f(\mathcal{X})$. Notar que f es sobreyectiva si, y sólo si $f(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$.
   - Si $Y \subseteq \mathcal{Y}$, el conjunto de todos aquellos elementos de $\mathcal{X}$ cuyas imágenes pertenecen a Y se designa con $f^{-1}(Y)$
   $$f^{-1}(Y) := \{x \in \mathcal{X} : f(x) \in Y\}$$
   y se denomina *la preimagen de Y en $\mathcal{X}$*.
4. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ conjuntos. Sean $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ y $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ dos aplicaciones. La *composición de g con f* es la aplicación
$$g \circ f : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$$
definida por $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ para todo $x \in \mathcal{X}$.
5. Los símbolos $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ están reservados para designar $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.

6. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y sea $\mathcal{V} = \{v_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{V}$ un conjunto de n puntos de $\mathbb{V}$. Se dice que $v \in \mathbb{V}$ es una *combinación lineal convexa* de elementos de $\mathcal{V}$ si
$$v = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i$$
para algunos $p_1, p_2, \ldots p_n \in \mathbb{R}^+$ tales que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.



Combinaciones lineales convexas de $\{v_1, v_2\}$. Los puntos de la forma $v = p_1 v_1 + p_2 v_2$, con $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$ y $p_1 + p_2 = 1$ constituyen los puntos del segmento de recta que unen a los puntos v_1 y v_2. En el ejemplo, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

7. El conjunto $C(\mathcal{V})$ de todas las combinaciones lineales convexas de elementos de $\mathcal{V}$
$$C(\mathcal{V}) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i v_i : p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$
se llama la *cápsula convexa* del conjunto $\mathcal{V}$.



Forma de la cápsula convexa $C(\mathcal{V})$ de un conjunto de puntos $\mathcal{V}$ contenidos en un plano: se trata de la región encerrada por un polígono cuyos vértices son algunos de los puntos de $\mathcal{V}$.

8. El conjunto de todas las transformaciones lineales de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ se denota por $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Cuando $\mathbb{W} = \mathbb{V}$, escribimos $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ en lugar de $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$.
9. Con $\mathbf{0} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ denotamos la transformación lineal nula de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$.

10. Con $I_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ denotamos la transformación lineal identidad de $\mathbb{V}$. Cuando el contexto sea inequívoco escribiremos I en lugar de $I_{\mathbb{V}}$.
11. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ se dice que
    - *T es un monomorfismo* cuando T es inyectiva,
    - *T es un epiformismo* cuando T es sobreyectiva,
    - *T es un isomorfismo* cuando T es biyectiva.
12. $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ se dicen *isomorfos* cuando existe un isomorfismo de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$.
13. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.
    - La preimagen de $0_{\mathbb{W}}$ en $\mathbb{V}$ se llama *el núcleo de T* y se denota por $\mathrm{Nu}(T)$
    $$\mathrm{Nu}(T) := \{v \in \mathbb{V} : T(v) = 0_{\mathbb{W}}\}.$$
    - La imagen de T se denota por $\mathrm{Im}(T)$
    $$\mathrm{Im}(T) := \{T(v) : v \in \mathbb{V}\}.$$
14. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Los símbolos T^k con $k \in \mathbb{N}_0$ se utilizan para denotar las transformaciones lineales definidas por: $T^0 := I$, $T^1 := T$, $T^2 := T \circ T$, $T^3 := T \circ T^2$, etcétera.
15. Cuando las letras del abecedario no son suficientes se recurre a las letras griegas. He aquí la equivalencia con el abecedario de las letras griegas que usamos a lo largo de esta guía.

Figura	Nombre	Equivalencia	Figura	Nombre	Equivalencia
A α	Alfa	A	Π π	Pi	P
B β	Beta	B	Σ σ	Sigma	S
Δ δ	Delta	D	Φ ϕ	Phi	Ph (f)
Θ θ	Theta	Th (t)	Ω ω	Omega	O larga
Λ λ	Lambda	L			

16. En todo lo que sigue $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
17. Dado $v \in \mathbb{K}^n$, v^* es el traspuesto conjugado del vector v. Esto es, $v^* = \overline{v^T}$. Observar que cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $v^* = v^T$.
18. Dada $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $A^* \in \mathbb{K}^{n\times m}$ es la matriz traspuesta conjugada de A. Esto es, $A^* = \overline{A^T}$. Observar que cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A^* = A^T$.
19. Dados $i \in \mathbb{I}_m$ y $j \in I_n$, la matriz de $\mathbb{K}^{m\times n}$ con 1 en la entrada ij y ceros en cualquier otra entrada, $E_{ij} := [\delta_{pi}\delta_{qj}]_{\substack{p\in\mathbb{I}_m \\ q\in\mathbb{I}_n}}$ se llama *la matriz ij de la base canónica de $\mathbb{K}^{m\times n}$*. Por ejemplo, las matrices E_{ij} de la base canónica de $\mathbb{K}^{2\times 2}$ son
$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
20. El conjunto $\{E_{ij} : i \in \mathbb{I}_m, j \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{K}^{m\times n}$ se llama la base canónica de $\mathbb{K}^{m\times n}$.
21. El conjunto $\{x^j : j \in \{0, 1, \ldots, n\}\} \subset \mathbb{K}_n[x]$ se llama la base canónica de $\mathbb{K}_n[x]$, y el conjunto $\{x^j : j \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{K}[x]$ se llama la base canónica de $\mathbb{K}[x]$.

Ejercicios

2.1 Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$T_2\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} -3x_2 + 2x_3 & 3x_1 - x_3 \end{bmatrix}^T.$$

(**a**) Verificar que T es una transformación lineal.

(**b**) Calcular $T(e_1)$, $T(e_2)$ y $T(e_3)$.

(**c**) Hallar $A_T \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ tal que $T\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T\right) = A_T \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$.

:*¿Qué representan las columnas de A_T?*

2.2 Sea $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ es la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar una base del núcleo de T.

(**b**) Hallar una base de la imagen de T.

(**c**) Hallar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a la base del núcleo de T encontrada en el inciso (**a**) y, usando esa base, determinar una base de la imagen de T.

(**d**) Comprobar que el vector $b = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$ pertenece a la imagen de T y resolver la ecuación $T(x) = b$.

2.3 Sea $T:\mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) \end{bmatrix}^T.$$

(**a**) Explicar por qué T es una transformación lineal.

(**b**) Hallar una base del núcleo de T.

(**c**) Mostrar que para cada $j \in \mathbb{I}_3$, la ecuación $T(p) = e_j$ admite solución y hallar todas las soluciones de la misma.

(**d**) Resolver la ecuación $T(p) = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 36 \end{bmatrix}^T$.

2.4 Sea $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ la aplicación definida por

$$T(p)=p+(1-x)p'.$$

(**a**) Explicar por qué T está bien definida y es una transformación lineal.

(**b**) Hallar una base del núcleo de T.

(**c**) Hallar una base de $\mathbb{R}_3[x]$ que contenga a la base del núcleo de T encontrada en el inciso (**a**) y, usando esa base, determinar una base de la imagen de T.

(**d**) Comprobar que el polinomio $q=1+x+x^2-x^3$ pertenece a la imagen de T y resolver la ecuación $T(p)=q$.

2.5 Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida en el **Ejercicio 2.1**. Hallar y graficar la imagen por T de los siguientes conjuntos:

(**a**) el segmento de recta que une los puntos $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$,

(**b**) el segmento de recta que une los puntos $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$,

(**c**) el triángulo de vértices $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$,

(**d**) el triángulo de vértices $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$.

2.6 Hallar todos los $a\in\mathbb{R}$ para los cuales existe una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\a\\1\end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5\\1\\a^2\end{bmatrix}.$$

2.7 Sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}^T,\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T,\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T\right\},$$

y sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una transformación lineal que actúa sobre la base $\mathcal{B}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}T\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}^T\right)&=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\end{bmatrix}^T,\\ T\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T\right)&=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T,\\ T\left(\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T\right)&=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\end{bmatrix}^T.\end{aligned}$$

(**a**) Hallar una base del núcleo de T y describirlo geométricamente.

(**b**) Hallar una base de la imagen de T y describirla geométricamente.

(**c**) Hallar todas las soluciones de la ecuación $T(x) = \begin{bmatrix}2 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$.

(**d**) Hallar todas las soluciones de la ecuación $T(x) = \begin{bmatrix}2 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$ que pertenecen al subespacio $\mathbb{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\right\}$.

2.8 Sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T\right\},$$

y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal que actúa sobre la base $\mathcal{B}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\right) &= 1 - x, \\ T\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right) &= 1 + x^2, \\ T\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T\right) &= x + x^2. \end{aligned}$$

Comprobar que el polinomio $p = 2+x+3x^2$ pertenece a la imagen de T y determinar $T^{-1}(p) := T^{-1}(\{p\})$.

2.9 STOP Sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & -2 & 2\end{bmatrix}^T\right\},$$

y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que actúa sobre la base $\mathcal{B}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix}2 & -1 & -1\end{bmatrix}^T, \\ T\left(\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\end{bmatrix}^T, \\ T\left(\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

(**a**) Hallar la imagen por T del conjunto $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 1 & 5\end{bmatrix}^T\right\}$.

(**b**) Hallar la imagen por T del subespacio $\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 1 & 5\end{bmatrix}^T\right\}$.

(**c**) Hallar la imagen por T del segmento de extremos $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 1 & 5\end{bmatrix}^T$.

(**d**) Hallar la preimagen por T del subespacio $\left\{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 - y_3 = 0, y_1 + y_2 + y_3 = 0\right\}$.

2.10 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, donde $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son algunos de los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{R}_n[x]$. Hallar, para cada uno de los siguientes casos, la matriz de T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, y analizando las propiedades de dicha matriz determinar las propiedades de T.

(**a**) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

(**b**) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

(**c**) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^4$ es la transformación lineal definida por

$$T(p) := \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(10) & p(100) \end{bmatrix}^T.$$

(**d**) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ es la transformación lineal definida por

$$T(p) := \begin{bmatrix} p(0) & p(1) \\ p'(0) & p'(1) \end{bmatrix}.$$

2.11 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \left\{1 + x^2, 1 + x, x + x^2\right\},$$
$$\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}.$$

(**a**) Hallar una base del núcleo de T.

(**b**) Hallar una base de la imagen de T.

(**c**) Calcular $T(1 + x + x^2)$.

(**d**) Hallar $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right)$.

2.12 Sean $\mathbb{V} = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^T = A\}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices simétricas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde es la matriz de T con respecto a las bases $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{V}$ y $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$ de $\mathbb{R}^3$. Hallar el conjunto solución de la ecuación $T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

2.13 [ver **Ejercicio 1.23**] Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2}x(x-1), -x(x-2), \frac{1}{2}(x-1)(x-2) \right\},$$
$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

(**a**) Analizar las propiedades de T.

(**b**) Hallar la matriz de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

(**c**) Hallar la matriz de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(**d**) Hallar la matriz de T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$.

(**e**) Hallar la imagen por T del subespacio gen $\{2 + 3x + 2x^2, 5 + 5x + 4x^2\}$.

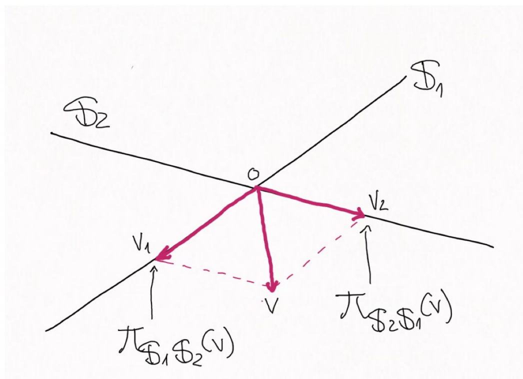
2.14 Sea $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[x])$ la transformación lineal definida por

$$T_2\left(\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T\right) := (a+b) + (a+c)x + (b+c)x^2.$$

(**a**) Hallar las matriz de T_2 con respecto a las bases canónicas que correspondan.

(**b**) Comprobar que T_2 es un isomorfismo y hallar la matriz de T_2^{-1} con respecto a las bases canónicas que correspondan.

2.15 ☢ Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ dos subespacios suplementarios de $\mathbb{V}$, esto es, todo vector $v \in \mathbb{V}$ se escribe de manera única como $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in \mathbb{S}_1$ y $v_2 \in \mathbb{S}_2$.



La proyección de $\mathbb{V}$ *sobre* $\mathbb{S}_1$ *en la dirección de* $\mathbb{S}_2$, denotada por $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$, es la transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ definida por

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) := v_1.$$

Análogamente, se define $\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}$ por $\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v) := v_2$.

(**a**) Explicar por qué $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ es la única transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ tal que

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in \mathbb{S}_1, \\ 0 & \text{si } v \in \mathbb{S}_2, \end{cases}$$

y comprobar que $\mathbb{V} = \operatorname{Im}(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}) \oplus \operatorname{Nu}(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2})$.

(**b**) Comprobar que $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ posee la propiedad de *idempotencia*: $\Pi^2_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$.

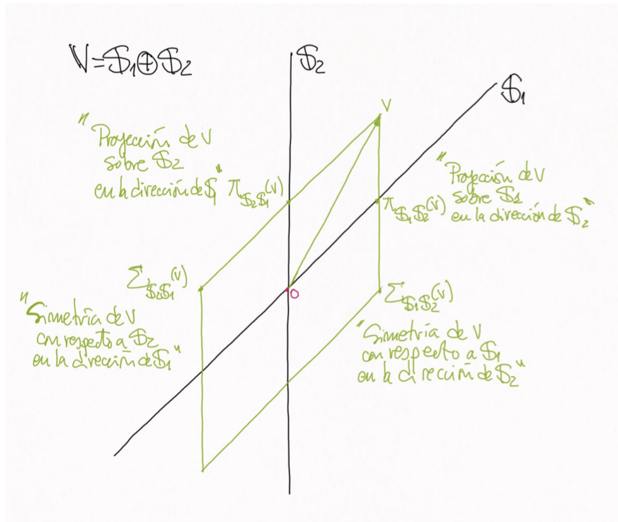
(**c**) Observar que $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} + \Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} = I_{\mathbb{V}}$.

(**d**) Mostrar que $\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} := I_{\mathbb{V}} - 2\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}$ es la única transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ tal que

$$\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in \mathbb{S}_1, \\ -v & \text{si } v \in \mathbb{S}_2, \end{cases}$$

razón por la cual $\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ de denomina *la simetría de* $\mathbb{V}$ *con respecto a* $\mathbb{S}_1$ *en la dirección de* $\mathbb{S}_2$.

(**e**) Explicar por qué $\Sigma^2_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} = I_{\mathbb{V}}$.



Proyecciones y simetrías inducidas por una partición de $\mathbb{V}$ en suma directa de dos subespacios $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$.

2.16 Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{V}$, $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{V}$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \text{gen}\{v_1 - 2v_2, v_1 + v_3\}, \quad \mathbb{S}_2 = \text{gen}\{v_2 - v_3\}.$$

(**a**) Comprobar que $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$.

(**b**) Hallar las matrices con respecto a la base $\mathcal{B}$ de las proyecciones y simetrías inducidas por la partición $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$.

2.17 Sea Π la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\}$ en la dirección de la recta generada por $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$.

(**a**) Hallar la imagen por Π del plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0\}$.

(**b**) Hallar la preimagen por Π de la recta $\{y \in \mathbb{R}^3 : 2y_1 - y_3 = 0, y_2 = 0\}$.

(**c**) Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $\Pi(x) = \Pi\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right)$.

(**d**) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[\Pi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

2.18 Sea $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $\Pi \circ \Pi = \Pi$ y

$$\Pi\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \; \Pi\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T.$$

(**a**) Hallar la imagen por Π del segmento de extremos $\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$.

(**b**) Hallar la imagen por Π del segmento de extremos $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$.

(**c**) Hallar la imagen por Π del triángulo de vértices $\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$.

(**d**) Hallar la imagen por Π del triángulo de vértices $\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$.

2.19 Sea Σ la simetría de $\mathbb{R}^3$ respecto del plano $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\right\}$ en la dirección de la recta generada por $\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}^T$.

(**a**) Hallar la imagen por Σ del triángulo de vértices $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\end{bmatrix}^T$.

(**b**) Hallar la imagen por Σ de la recta generada por $\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$.

(**c**) Hallar la preimagen por Σ del plano $\{y \in \mathbb{R}^3 : 2y_1 - y_3 = 0\}$.

(**d**) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[\Sigma]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

2.20 Sea $\Sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $\Sigma \circ \Sigma = I_{\mathbb{R}^3}$ y

$$\Sigma\left(\begin{bmatrix}4 & 0 & -3\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \; \Sigma\left(\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}5 & 1 & -4\end{bmatrix}^T.$$

Hallar la imagen por Σ del subespacio $\mathbb{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}$.

Guía 3

Preliminares

Sobre espacios métricos y normados

1. Una *distancia*, o una *métrica*, en un conjunto $\mathcal{X}$ es una función $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+$ que posee las tres propiedades siguientes:
   a) Para $x, y \in \mathcal{X}$: $d(x, y) = 0$ si, y sólo si $x = y$.
   b) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in \mathcal{X}$ (*simetría*).
   c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{X}$ (*desigualdad triangular*).
   La expresión $d(x, y)$ se lee *la distancia entre los puntos x e y*. El par $(\mathcal{X}, d)$, constituido por el conjunto $\mathcal{X}$ munido de una distancia, se denomina *espacio métrico*.
2. La noción de distancia permite introducir la noción de límite: se dice que *la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x*, o que *x_n tiende a x*, cuando
$$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0.$$
   En tal caso x se llama *el límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* y se denota por $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
3. En todo lo que sigue, y salvo que se diga lo contrario, $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
4. Una *norma* en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^+$ que posee las tres propiedades siguientes:
   a) $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.
   b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{V}$.
   c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{V}$ (*desigualdad triangular*).
   Al número no negativo $\|x\|$ se le denomina *la norma de x* y el par $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ se llama *espacio normado*. La norma de x representa la longitud del segmento de recta $[0, x] := \{tx : t \in [0, 1]\}$ que une a los puntos 0 y x. Notar que si $x \neq 0$, entonces $u_x := \|x\|^{-1}x$ pertenece al subespacio generado por x y $\|u_x\| = 1$.
5. Todo espacio normado $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ se convierte en un espacio métrico, si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{V}$ se define
$$d(x, y) := \|x - y\|.$$
   Notar que la distancia inducida por una norma posee las siguientes propiedades adicionales:
   a) $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ (*invarianza por traslaciones*: la distancia entre x e y no cambia si ambos puntos se someten a una misma traslación).
   b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$ (*cambio de escala por dilataciones*: al dilatar ambos puntos por un mismo factor λ, la distancia queda multiplicada por $|\lambda|$).
   c) En particular, $d(x, y) = d(x - y, 0)$, de modo que las distancias al origen son suficientes para conocer todas las demás.

Sobre espacios euclídeos

6. Un *producto interno* en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{K}$ que posee las las siguientes propiedades:
   (i) Para cada $\lambda\in\mathbb{K}$ y $x,y,z\in\mathbb{V}$
      1) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$,
      2) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$.
   (ii) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ $\forall x,y\in\mathbb{V}$.
   (iii) $\langle x,x\rangle > 0$ si $x\neq 0$.
7. Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ munido de un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se llama *espacio euclídeo* y se denota por $(\mathbb{V},\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Cuando $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ se dice que $(\mathbb{V},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un *espacio euclídeo real* y cuando $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ se dice que $(\mathbb{V},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un *espacio euclídeo complejo*.
8. La tabla de multiplicación de una colección de vectores $\mathcal{X}=(x_i : i\in\mathbb{I}_n)$ se llama *la matriz de Gram de* $\mathcal{X}$ y se denota por $G_{\mathcal{X}}$
$$G_{\mathcal{X}} := [\langle x_i,x_j\rangle]_{\substack{i\in\mathbb{I}_n\\ j\in\mathbb{I}_n}} = \begin{bmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle\\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle & \cdots & \langle x_2,x_n\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \langle x_n,x_1\rangle & \langle x_n,x_2\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle\end{bmatrix}.$$
El *Gramiano de* $\mathcal{X}$, denotado por $G(\mathcal{X})$, es el determinante de la matriz $G_{\mathcal{X}}$.
9. La matriz de Gram de una base $\mathcal{B}=\{v_i : i\in\mathbb{I}_n\}$ de $\mathbb{V}$ determina unívocamente al producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y se llama *la matriz del producto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *respecto de la base* $\mathcal{B}$.
10. Todo espacio euclídeo $(\mathbb{V},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ se convierte en un espacio normado, si para cualquier $x\in\mathbb{V}$ se define
$$\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$
La función $\|\cdot\| : \mathbb{V}\to\mathbb{R}^+$ así definida es una norma en $\mathbb{V}$ y se llama la *norma inducida* por el producto interno.
11. La *desigualdad de Cauchy-Schwarz* establece que
$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \text{ para todo } x,y\in\mathbb{V}.$$
12. Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial el *ángulo* θ *entre dos vectores no nulos* x *e* y se define mediante la fórmula
$$\cos\theta := \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|},$$
donde $\theta\in[0,\pi]$. Notar que $\cos\theta = \langle u_x,u_y\rangle$.
13. Si $\langle y,x\rangle = 0$ se dice que *los vectores* x *e* y *son ortogonales* y se denota por $y\perp x$. El conjunto de todos los vectores ortogonales a x se denota por $x^{\perp}$, y se llama el *subespacio ortogonal a* x
$$x^{\perp} := \{y\in\mathbb{V} : \langle y,x\rangle = 0\}.$$
En los espacios euclídeos reales la condición $\langle y,x\rangle = 0$ implica que $\theta=\frac{\pi}{2}$ salvo que $x=0$ o $y=0$.
14. Obsérvese que si $x\neq 0$, entonces para todo $y\in\mathbb{V}$ vale que
$$y = \langle y,u_x\rangle\, u_x + (y - \langle y,u_x\rangle\, u_x).$$

15. El *teorema de Pitágoras* establece que si x e y son ortogonales, vale que
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$
16. Un sistema de vectores $\mathcal{S} = \{v_i : i \in \mathbb{I}\} \subset \mathbb{V} \setminus \{0\}$ se llama *ortogonal*, cuando
$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \;\text{ para todo } i \neq j.$$
Obsérvese que $\mathcal{S}$ es un sistema ortogonal si, y sólo si, las matrices de Gram de todos los subconjuntos finitos de $\mathcal{S}$ son diagonales.
17. Un sistema ortogonal de vectores $\{u_i : i \in \mathbb{I}\}$ se llama *ortonormal*, cuando
$$\|u_i\| = 1 \;\text{ para todo }\; i \in \mathbb{I}.$$
18. Si $\mathcal{V}$ es un conjunto no vacío de vectores, el *subespacio ortogonal a* $\mathcal{V}$, denotado por $\mathcal{V}^\perp$, se define por
$$\mathcal{V}^\perp := \{x \in \mathbb{V} : \langle x, v \rangle = 0 \;\text{ para todo } v \in \mathcal{V}\}$$
19. El *producto interno canónico en* $\mathbb{K}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ se define por
$$\langle x, y \rangle := y^* x,$$
donde $y^* := \overline{y^T}$ es el traspuesto conjugado del vector y. Notar que $y^* x = x^T \overline{y}$.
20. El *producto interno canónico en* $\mathbb{K}^{m\times n}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^{m\times n} \times \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}$ se define por
$$\langle X, Y \rangle := \operatorname{tr}(Y^* X),$$
donde $Y^* := \overline{Y^T}$ es la matriz traspuesta conjugada de Y. Notar que $\operatorname{tr}(Y^*X) = \operatorname{tr}(X^T\overline{Y})$.

Ejercicios

3.1 En cada uno de los siguientes casos, verificar que la fórmula

$$\langle x, y\rangle := y^T G x$$

define un producto interno en $\mathbb{R}^2$:

(**a**) $G \in \mathcal{G}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(**b**) $G \in \mathcal{G}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{bmatrix} : \theta \in (0, \pi) \right\}.$

(**c**) $G \in \mathcal{G}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} \ell_1^2 & \ell_1\ell_2\cos\theta \\ \ell_1\ell_2\cos\theta & \ell_2^2 \end{bmatrix} : \theta \in (0, \pi),\ \ell_1 > 0,\ \ell_2 > 0 \right\}.$

(**d**) $G \in \mathcal{G}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a > 0,\ \det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} > 0 \right\}.$

: *observar que $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_4$ y decidir en qué orden se resolverá el problema. ¿Se podrán definir otros productos internos en $\mathbb{R}^2$? ¿Qué significado geométrico tienen los coeficientes de las matrices G? ¿Qué efectos tiene la elección de cada uno de esos productos internos sobre los lados y el área del triángulo de vertices $0, e_1, e_2$? ¿Qué significado geométrico tiene el determinante de G?*

3.2 En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico calcular el área del triángulo de vértices $e_1, e_2, 2e_3$.

3.3 Hallar todos los productos internos en $\mathbb{R}^2$ que convierten al triángulo de vértices $0, e_1$ y e_2 en un triángulo equilátero. Utilizar alguno de ellos para calcular el ángulo entre los vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ y $v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$. ¿Cuál es el valor del área del triángulo de vértices $0, v_1$ y v_2? ¿Cómo depende del producto interno elegido?

3.4 Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Calcular el área del triángulo de vértices $p_1 = 6$, $p_2 = 2x(x+1) + 6$, $p_3 = 3x(x-1) + 6$.

3.5 Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo de dimensión 3 y sea

$$\mathcal{B} = \{u_i : i \in \mathbb{I}_3\} \subset \{u \in \mathbb{V} : \|u\| = 1\}$$

una base de $\mathbb{V}$ tal que $\|u_i + u_j\|^2 = 2 + \sqrt{3}$ y $\|u_i - u_j\|^2 = 2 - \sqrt{3}$ para $i \neq j$.

(**a**) Hallar la matriz del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

(**b**) Hallar la matriz $\Theta := [\arccos(\langle u_i, u_j \rangle)]_{\substack{i\in\mathbb{I}_3\\ j\in\mathbb{I}_3}}$.

(**c**) Construir un triángulo rectángulo cuyos vértices sean $0, u_1, u_2 - \lambda u_1$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿Es único?

(**d**) Calcular el área del triángulo de vértices $0, u_1, u_2$.

(**e**) Calcular el área del triángulo de vértices u_1, u_2 y u_3.

3.6 En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico.

(**a**) Hallar una esfera que contenga al conjunto de puntos

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

¿Es única? Si la respuesta es afirmativa explicar por qué, sino hallar otra.

(**b**) Hallar la esfera de radio mínimo que contiene al conjunto de puntos

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

3.7 [ver **Ejercicio 2.15**] En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera el subespacio

$$\mathbb{S} = \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

(**a**) Escribir cada vector $x \in \mathbb{R}^3$ en la forma $x = x_{\mathbb{S}} + x_{\mathbb{S}^\perp}$ con $x_{\mathbb{S}} \in \mathbb{S}$ y $x_{\mathbb{S}^\perp} \in \mathbb{S}^\perp$ y comprobar que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^\perp$.

(**b**) Hallar la matriz con respecto a la base canónica de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{S}$.

(**c**) Calcular la distancia al subespacio $\mathbb{S}$ de cada uno de los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(**d**) Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $P_{\mathbb{S}}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ cuya distancia a $\mathbb{S}$ sea igual a $\sqrt{3}$.

(**e**) Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $P_{\mathbb{S}}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ cuya distancia al origen sea igual a 5.

(**f**) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que sean equidistantes a los puntos $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}^T$.

3.8 En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle x, y \rangle = y^T \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} x$$

se consideran los subespacios

$$\mathbb{S}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \;\text{ y }\; \mathbb{S}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0 \right\}.$$

(**a**) Hallar las matrices con respecto a la base canónica de las proyecciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{S}_1^\perp$ y sobre $\mathbb{S}_2^\perp$.

(**b**) Sea $b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$. Hallar la distancia de b al subespacio $\mathbb{S}_1^\perp$ y la distancia de b al subespacio $\mathbb{S}_2$.

(**c**) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3$ cuya distancia a $\mathbb{S}_1$ coincide con su distancia a $\mathbb{S}_2$.

3.9 Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo de dimensión 3 y sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{V}$ cuya matriz de Gram es

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar la matriz con respecto a la base $\mathcal{B}$ de la proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathbb{S} = \text{gen}\{v_1, v_2\}$.

(**b**) Hallar la proyección ortogonal de v_3 sobre el subespacio $\mathbb{S}$.

(**c**) Calcular la distancia de v_3 al subespacio $\mathbb{S}$.

(**d**) Hallar el conjunto de todos los $v \in \mathbb{V}$ cuya distancia a v_1 coincide con su distancia a v_2.

3.10 Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx.$$

Sea $p = 3x^2 - 5x + 3$.

(**a**) Hallar el polinomio del subespacio $\mathbb{S} = \text{gen}\left\{3x^2 - 2x, 2x^2 + 3x\right\}$ más cercano al polinomio p.

(**b**) Calcular

$$\min_{a,b \in \mathbb{R}} \int_{-1}^{1} \left(p - ax^2 - bx\right)^2 dx.$$

3.11 Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Sean $\mathbb{S} = \text{gen}\left\{1 - x, x - x^2\right\}$ y $P_{\mathbb{S}} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ la proyección ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ sobre $\mathbb{S}$. Hallar todos los $q \in \mathbb{R}_2[x]$ tales que $P_{\mathbb{S}}(q) = x - x^2$ cuya distancia a $\mathbb{S}$ es $\sqrt{3}$.

3.12 [ver **Ejercicio 1.17**] Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar las matrices con respecto a la base canónica de las proyecciones ortogonales de $\mathbb{R}^4$ sobre $\text{col}(A)$ y sobre $\text{nul}(A^T)$.

(**b**) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^4$ cuya distancia al $\text{col}(A)$ es igual 1.

3.13 [*herramienta*] Sean $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $(\mathbb{R}^m, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ los $\mathbb{R}$-espacios euclídeos canónicos de dimensiones n y m, respectivamente, sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Por definición, resolver la ecuación $Ax = b$ por mínimos cuadrados significa determinar el conjunto $\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$ de todos los $x \in \mathbb{R}^n$ cuyas imágenes por A minimizan la distancia al vector b.

(**a**) Explicar por qué

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \left\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = P_{\text{col}(A)}(b)\right\}.$$

(**b**) Observar que $\left\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = P_{\text{col}(A)}(b)\right\} \neq \emptyset$. Motivo por el cual para cualquier $b \in \mathbb{R}^m$ existe al menos una solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$.

(**c**) Verificar que $\text{nul}(A^T) = \text{col}(A)^\perp$.

(**d**) Utilizando que $b - P_{\text{col}(A)}(b) \perp \text{col}(A)$, concluir que

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \left\{x \in \mathbb{R}^n : A^TAx = A^Tb\right\}.$$

(**e**) Verificar que $\text{nul}(A) = \text{fil}(A)^\perp$.

(**f**) Utilizando que todo $x \in \mathbb{R}^n$ se descompone de manera única en la forma

$$x = x_f + x_h, \text{ con } x_f \in \text{fil}(A), \text{ y } x_h \in \text{nul}(A),$$

deducir que la aplicación $x_f \mapsto Ax_f$ es una biyección de $\text{fil}(A)$ en $\text{col}(A)$.

(**g**) Concluir que para cada $b \in \mathbb{R}^m$ existe un único $x_f(b) \in \text{fil}(A)$ tal que

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \{x_f(b) + x_h : x_h \in \text{nul}(A)\}.$$

Utilizando el Teorema de Pitágoras observar que de todas las soluciones por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$, la solución $x_f(b)$ es la que tiene norma mínima.

(**h**) Observar que cuando $\dim(\mathrm{col}(A)) = n$ la matriz $A^T A$ es inversible y que por lo tanto, $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$ es la única solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$. Como $A\hat{x} = P_{\mathrm{col}(A)}(b)$ se deduce que $A(A^T A)^{-1} A^T$ es la matriz en base canónica de la proyección ortogonal sobre $\mathrm{col}(A)$.

3.14 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En cada uno de los siguientes casos, hallar las soluciones por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$, determinar la de norma mínima, y calcular el error cuadrático $\min_{x \in \mathbb{R}^3} \|b - Ax\|^2$

(**a**) $b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

(**b**) $b = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

3.15 Sean $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ y $b \in \mathbb{R}^4$ definidos por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Hallar la solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$ y calcular el error cuadrático $\|b - A\hat{x}\|^2$.

3.16 Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

x	-1	0	1	2	3
y	-14	-5	-4	1	22

mediante una recta $y = a_0 + a_1 x$, mediante una cuadrática $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, y mediante una cúbica $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. ¿Cuál de esas tres curvas se ajusta mejor a los datos?

3.17 Después de estudiar el comportamiento de un cierto tipo de enfermedad virósica, un investigador plantea la hipótesis de que, a corto plazo, la cantidad, x, de individuos infectados en una población particular crece exponencialmente con el tiempo, t, medido en días. Es decir, postula un modelo de la forma $x = ae^{bt}$. Estimar, mediante la técnica de mínimos cuadrados, los parámetros a y b, utilizando para ello los siguientes datos observados por el investigador:

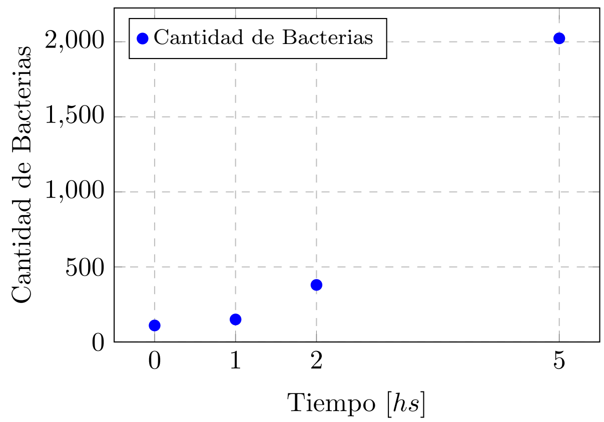
t	1	2	3	4	5
x	16	27	45	74	122

Utilizar la estimación obtenida para predecir la cantidad de individuos infectados al cabo de una semana.

: *¿Qué transformación convierte una función exponencial en una función lineal?*

3.18 Se observa que cierta población de bacterias crece de acuerdo con los siguientes datos

Tiempo	Cantidad de Bacterias
0 horas	110
1 hora	150
2 horas	380
5 horas	2023



Estimar, a criterio propio, la cantidad de bacterias a las 3 horas e indicar, justificando cuantitativamente, por qué se considera que la estimación realizada es mejor que otras estimaciones posibles.

3.19 [ver **Ejercicio 1.23**] Se considera el $\mathbb{R}$-espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q\rangle := p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Comprobar que

$$\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{2}(x-1)(x-2),\ -x(x-2),\ \frac{1}{2}x(x-1)\right\}$$

es una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], \langle\cdot,\cdot\rangle)$, y utilizar ese resultado para hallar el vector de coordenadas del polinomio $p = 1 + x + x^2$ en base $\mathcal{B}$.

3.20 Se considera $\mathbb{R}^2$ con el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definido por

$$\langle x, y\rangle = y^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x.$$

(**a**) Describir el significado geométrico del conjunto

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 4\}.$$

(**b**) Hallar dos vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\begin{aligned}\Sigma &= \left\{y_1 v_1 + y_2 v_2 : y_1, y_2 \in \mathbb{R},\, y_1^2 + y_2^2 = 4\right\} \\ &= \left\{2\cos(\theta) v_1 + 2\,\mathrm{sen}(\theta) v_2 : \theta \in [0, 2\pi)\right\},\end{aligned}$$

y representar gráficamente el resultado obtenido.

3.21 Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Comprobar que $b = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}^T \in \mathrm{col}(A)$.

(**b**) Mostrar que existen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2 \in \mathrm{col}(A)$ tales que

$$\{y \in \mathrm{col}(A) : d(b, y) = 1\} = \{(a_1 + \cos(\theta)) v_1 + (a_2 + \mathrm{sen}(\theta)) v_2 : \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

¿Son únicos? Si la respuesta es afirmativa, determinarlos. Si la respuesta es negativa, exhibir dos ejemplos.

3.22 Sea $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ el espacio euclídeo canónico. En cada uno de los siguientes casos, utilizar el algoritmo de Gram-Schmidt para producir un sistema ortonormal $\mathcal{U}_i$ a partir del conjunto linealmente independiente $\mathcal{L}_i$ dado.

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\},\ \mathcal{L}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\},\ \mathcal{L}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}.$$

3.23 Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenga una base de $\mathrm{col}(A)$.

(**b**) Hallar la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathrm{col}(A)$.

(**c**) Calcular la distancia del vector $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ a $\mathrm{col}(A)$.

Guía 4

Preliminares

En todo lo que sigue

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ designa el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ definido por $\langle x, y \rangle := y^T x$, y $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ designa su norma inducida.
2. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Obsérvese que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ vale que
$$\langle Ax, y \rangle = \left\langle x, A^T y \right\rangle .$$
Consecuentemente,
    a) $\mathrm{nul}(A^T) = \mathrm{col}(A)^\perp$;
    b) $\mathrm{col}(A^T) = \mathrm{nul}(A)^\perp$;
    c) $\mathrm{nul}(A) = \mathrm{col}(A^T)^\perp$;
    d) $\mathrm{col}(A) = \mathrm{nul}(A^T)^\perp$.
3. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es
    - *ortogonal* si $A^T A = AA^T = I$.
    - *simétrica* si $A = A^T$.

Definiciones

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. $\lambda \in \mathbb{R}$ se llama un *autovalor de* A, cuando existe un vector no nulo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = \lambda x$. En tal caso, el vector x se llama un *autovector de* A *correspondiente al autovalor* λ.
2. El conjunto de todos los autovalores de A se llama *el espectro de* A, y se lo denota mediante $\sigma(A)$.
3. Si $\lambda \in \sigma(A)$, el subespacio $\mathbb{S}_\lambda := \mathrm{nul}(A - \lambda I)$ se llama el *autoespacio correspondiente a* λ. La dimensión de $\mathbb{S}_\lambda$ se llama la *multiplicidad geométrica de* λ y la se denotaremos mediante $\mu(\lambda)$.
4. El polinomio $\chi_A(x) = \det(A - xI)$ se denomina *el polinomio característico de* A. Nótese que $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \chi_A(\lambda) = 0\}$.
5. La *multiplicidad algebraica* de $\lambda \in \sigma(A)$ es su multiplicidad como raíz del polinomio característico de A y la designaremos mediante $m(\lambda)$:
$$m(\lambda) = \text{máx}\left\{k \in \mathbb{N} : \chi_A(x) = (x - \lambda)^k q(x),\ \text{con } q \in \mathbb{R}[x]\right\}.$$
6. Si $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, decimos que A *es semejante a* B cuando existe una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $A = PBP^{-1}$.
7. Decimos que A es diagonalizable cuando A es semejante a una matriz diagonal.
8. Dados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, utilizaremos la notación $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ para designar a la matriz diagonal
$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

Matrices diagonalizables.

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:
   a) A es diagonalizable.
   b) Existe una base $\mathbb{R}^n$ compuesta por autovectores de A.
   c)
   $$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{nul}(A-\lambda I).$$
   d)
   $$\chi_A(x) = \prod_{\lambda\in\sigma(A)} (x-\lambda)^{\mu(\lambda)}.$$
2. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ compuesta por autovectores de A correspondientes a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ vale que
   $$A^k\left(\sum_{j=1}^{n} c_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^k v_j,$$
   donde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Caracterización de las matrices ortogonales.

Sea $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. U es ortogonal.
2. U^T es ortogonal.
3. U es inversible y $U^{-1} = U^T$.
4. U preserva el producto escalar:
   $$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$
5. Si $\{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{Uv_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ también lo es.
6. Las columnas de U constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
7. Las filas de U constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
8. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, vale que $\|Ux\| = \|x\|$ (i.e., la transformación lineal $T(x) = Ux$ es una *isometría*.)

Caracterización de las matrices simétricas.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Son equivalentes:

- A es simétrica.
- $\mathbb{R}^n$ tiene una base ortonormal constituida por autovectores de A.
- A es ortogonalmente equivalente a una matriz diagonal.

Ejercicios

4.1 En cada uno de los siguientes casos, hallar el polinomio característico de la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, analizar si la misma es diagonalizable, y en caso de serlo hallar una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y una matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $A = P\Lambda P^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.2 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & a+3 \\ 5 & 0 & a^2 \end{bmatrix}.$$

Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que A tiene un autovalor doble y es diagonalizable.

4.3 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que tiene autovalores $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 5$ con autovectores asociados

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \; v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T, \; v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T,$$

respectivamente.

(**a**) Hallar una base de $\text{nul}(A)$ y una base de $\text{col}(A)$.

(**b**) Hallar todas las soluciones de la ecuación $Ax = v_2 + v_3$.

(**c**) Hallar las soluciones de la ecuación $A^4 x = v_3$.

(**d**) Calcular $A^6(v_2 + 2v_3)$ y $A^7(v_2 + 2v_3)$.

(**e**) Determinar el espectro de $A^7 - A^6$.

(**f**) Explicar por qué la ecuación $Ax = v_1$ no tiene solución.

: *Si se halla la expresión de A, el ejercicio pierde su valor de uso.*

4.4 Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz diagonalizable tal que $\sigma(A^2 - 6A) = \{0, -8\}$ y $\text{traza}(A) = 2$. Hallar $\sigma(A^3)$.

4.5 Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que posea las siguientes propiedades:

(**a**) $A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ y $\det(A) = -1$.

(**b**) $A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ y $\text{tr}(A) = 6$.

4.6 Comprobar que las siguientes matrices son ortogonales

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & -6 & 3\\ -6 & -3 & -2\\ 3 & -2 & -6\end{bmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{bmatrix}-1 & 8 & 4\\ 4 & 4 & -7\\ 8 & -1 & -4\end{bmatrix}.$$

4.7 Explicar por qué las siguientes matrices son diagonalizables ortogonalmente

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

y en cada caso hallar una matriz ortogonal U y una matriz diagonal Λ tales que $A = U\Lambda U^T$.

: *¿A ojo?*

4.8 Una partícula se encuentra, en el instante $t = 0$, en la posición $x_0 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$. Cada diez segundos, la partícula recibe un impacto que la desplaza de la posición x a la posición Ax, donde

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Calcular la posición de la partícula luego de transcurridos dos minutos.

4.9 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que

$$v_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T, \; v_2 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T, \; v_3 = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T,$$

es una base de autovectores de A asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, respectivamente. Probar que A es simétrica si y solo si $\lambda_2 = \lambda_3$.

4.10 Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que posea las siguientes propiedades:

(**a**) $\sigma(A) = \{1, 1/4\}$ y $\mathrm{nul}(A - I) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$.

(**b**) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T \in \mathrm{nul}(A - I)$, $\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T \in \mathrm{nul}(A - 2I)$ y $\det(A) = 12$.

(**c**) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}^T$ son autovectores de A, $\det(A) = 18$, $\mathrm{tr}(A) = 8$, y $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$.

(**d**) $\mathrm{traza}(A) = 1$, $\mathrm{rango}(A) = 2$, $A\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & 0 & 2\end{bmatrix}^T$ y $A\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T \in \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\right\}$.

(**e**) A^3-5A^2 es singular, rango$(A-3I)=1$, el plano $\left\{x\in\mathbb{R}^3 : 2x_1-x_2+2x_3=0\right\}$ es un autoespacio de A, y $\sigma(A)\subset(0,+\infty)$.

: *¿A es única? ¿Por qué?*

4.11 En cada uno de los siguientes casos, hallar una descomposición en valores singulares de la matriz A, determinar bases ortonormales de sus cuatro subespacios fundamentales y sus respectivas matrices de proyección:

$$A=\begin{bmatrix}6 & -18 & 9\\ -12 & -6 & -4\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}6 & -12\\ -18 & -6\\ 9 & -4\end{bmatrix}.$$

4.12 Sean

$$U=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},\quad \Sigma=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\end{bmatrix}.$$

Comprobar que $A=U\Sigma V^T$ es una descomposición en valores singulares de A y, a partir de ella, hallar la seudoinversa de Moore-Penrose de A; la matriz de proyección sobre fil(A) y la matriz de proyección sobre col(A).

4.13 En cada uno de los siguientes casos, hallar $A^\dagger$, la seudoinversa de Moore-Penrose de A, y determinar la solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax=b$.

(**a**) $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -1 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}$ y $b=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$.

(**b**) $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ es la matriz de rango 2 tal que $\begin{bmatrix}2 & -6 & 3\end{bmatrix}^T\in\text{nul}(A)$ y

$$A\begin{bmatrix}6 & -3\\ 3 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 0\\ 0 & \frac{2}{9}\end{bmatrix}$$

y $b=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$.

(**c**) $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ es la matriz definida por

$$A=\frac{2}{9}\begin{bmatrix}-1\\ 8\\ 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -6 & 3\end{bmatrix}+\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4\\ 4\\ -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

y $b=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$.

4.14 Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -18 & -6 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$$

(**a**) Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que maximizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\max\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

(**b**) Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que minimizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\min\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

4.15 Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

(**a**) $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 25\sqrt{2}$, $\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 15$, y $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(**b**) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{nul}(A)$, $v = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T$ es un autovector de $A^T A$ tal que $Av = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$, y $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 3\sqrt{2}$.

(**c**) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T \in \operatorname{nul}(A)$, $A \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & 12 \end{bmatrix}^T$ y $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 12$.

: *¿A, es única?*

4.16 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ la transformación definida por $T(x) = Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Graficar y caracterizar geométricamente la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

: *en cada caso, ¿qué significación geométrica tienen los $x \in S_1$ que maximizan (o minimizan) $\|T(x)\|$?, ¿qué representan los valores $\max\limits_{x \in S_1} \|T(x)\|$ y $\min\limits_{x \in S_1} \|T(x)\|$?*

4.17 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ la transformación definida por $T(x) = Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} 6 & -18 & 9 \\ -12 & -6 & -4 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

: *en cada caso, si $A = U\Sigma V^T$ es una descomposición en valores singulares de A, ¿qué significación geométrica tienen las columnas de U?, ¿qué representan los valores singulares de A?*

4.18 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la transformación definida por $T(x) = Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\right\}$:

(**a**) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A = 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

(**c**) $A = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$.