

Observe que todas las respuestas están debidamente justificadas.

No se muestran cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

En la resolución de integrales, si las hubiera, mostramos cada paso de integración indicando la primitiva y los límites correspondientes.

1. Polinomio de Taylor

Ejercicio 3:

Aproxime el valor de $(1.01)^{(1.98)}$ utilizando el polinomio de Taylor de primer orden (aproximación lineal) de una función adecuada, en el punto $A = (1,2)$

La función adecuada es $f(x, y) = x^y$, el punto en el cual debemos hallar el polinomio de Taylor de primer orden es $A = (1,2)$, y el incremento $(h, k) = (0.01, -0.02)$ (recuerde que el punto en el cual debe hallarse el polinomio de Taylor debe ser tal que se pueda calcular el valor de la función y sus derivadas, el punto $A = (1,2)$ satisface estas condiciones).

El polinomio de Taylor de primer orden de una $f(x, y)$ en un punto (a, b) es:

$$p(x, y) = f(a, b) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

Calculamos el valor de la función $f(x, y) = x^y$ y sus derivadas primeras en el punto $A = (1,2)$

$f(x, y) = x^y$	$f(1,2) = 1^2 = 1$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}$	$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2 \cdot 1^{2-1} = 2$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x$	$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1^2 \ln 1 = 0$

Luego el polinomio de primer orden es: $p(h, k) = 1 + h \cdot 2 + k \cdot 0 = 1 + 2h$

Finalmente: $f(1.01, 1.98) = f(1 + 0.01, 2 + (-0.02)) \cong p(0.01, -0.02) = 1.02$

Rta.: $(1.01)^{(1.98)} \cong 1,02$

Justificación: $f(x, y) = x^y$ es continua y con derivadas parciales continuas hasta el orden 2 en $E_{\delta(1,2)}$ con $\delta < 1$
 (en realidad la función es C^∞ en ese entorno, pero para escribir el Polinomio de Taylor de orden 1 necesitamos solo las derivadas parciales de orden 2: las de orden 1 para el polinomio y las de orden 2 para el término complementario o resto). Además, con el incremento $(h, k) = (0.01, -0.02)$ estamos dentro de ese entorno.

Ejercicio 4:

Demuestre que en un entorno del punto $(1,2)$ resulta $e^{x-1} \ln(y-1) \cong y-2$

La función es $f(x, y) = e^{x-1} \ln(y-1)$

El polinomio de primer orden es:

$$p(x, y) = f(a, b) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) ; \text{ siendo: } h = (x-1) ; k = (y-2)$$

Calculamos los valores de la función y sus derivadas en el punto $(1,2)$

$f(x, y) = e^{x-1} \ln(y-1)$	$f(1,2) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x-1} \ln(y-1)$	$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x-1} \cdot \frac{1}{(y-1)}$	$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1$

Luego, el polinomio de primer orden es: $p(h, k) = 0 + h \cdot 0 + k \cdot 1$

$$p(x-1, y-2) = 0 + (x-1) \cdot 0 + (y-2) \cdot 1 = (y-2)$$

Rta.: $e^{x-1} \ln(y-1) \cong y-2$

Justificación: $f(x, y) = e^{x-1} \ln(y-1)$ es continua y con derivadas parciales continuas hasta el orden 2 en $E_{\delta(1,2)}$ con $\delta < 1$

(en realidad la función es C^∞ en ese entorno, pero para escribir el Polinomio de Taylor de orden 1 necesitamos solo las derivadas parciales de orden 2: las de orden 1 para el polinomio y las de orden 2 para el término complementario o resto). Además, el incremento (h, k) para el cual el polinomio aproxima

la función debe estar dentro de ese entorno.

Ejercicio 5:

Sabiendo que la ecuación $y - z + e^{(z,x)} = 0$ define implícitamente a $z = f(x, y)$ cuyo gráfico pasa por el punto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, calcule un valor aproximado para $f(0.01, -0.02)$ mediante el polinomio de Taylor de 2° orden.

El enunciado afirma la existencia de $z = f(x, y)$, al decir que $F(x, y, z) = 0$ la define implícitamente un entorno de $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Por lo tanto podemos desarrollar $z = f(x, y)$, por un polinomio de Taylor de 2° orden en torno a $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

Es decir

$$z \cong f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2} [f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \cdot f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2]$$

$$f(0, 0) = 1$$

$$f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}; \quad f'_x(x, y) = -\frac{z \cdot e^{zx}}{(-1 + x \cdot e^{zx})} \quad f'_x(0, 0) = -\frac{1 \cdot e^0}{-1 + 0} \quad \mathbf{f'_x(0, 0) = 1}$$

$$f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}; \quad f'_y(x, y) = -\frac{1}{(-1 + x \cdot e^{zx})} \quad f'_y(0, 0) = -\frac{1}{(-1 + 0)} \quad \mathbf{f'_y(0, 0) = 1}$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \right]; \quad f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{z \cdot e^{zx}}{(-1 + x \cdot e^{zx})} \right]$$

$$z'_x = f'_x(x, y)$$

$$f''_{xx} = -\frac{\{[z'_x \cdot e^{zx} + z \cdot (z'_x \cdot x + z) \cdot e^{zx}] \cdot [-1 + x \cdot e^{zx}] - [z \cdot e^{zx} \cdot (e^{zx} + x \cdot (z'_x \cdot x + z) \cdot e^{zx})]\}}{(-1 + x \cdot e^{zx})^2}$$

$$f''_{\{xx\}}(0,0) = -\frac{\{[1.1 + 1.(1.0 + 1).1].[-1 + 0] - [1.(1 + 0)1]\}}{1}$$

$$f''_{xx}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = -\frac{[(1 + 1).(-1) - 1]}{1} = \mathbf{3}$$

$$f''_{xy} = -\frac{\{[z'_y.e^{zx} + z.z'_y.x.e^{zx}.[-1 + x.e^{zx}] - [z.e^{zx}.(x.z'_y.x.e^{zx})]\}}{(-1 + x.e^{xz})^2}$$

$$f''_{xy}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = -\frac{[1.(-1) - 1.0]}{1} = \mathbf{1}$$

$$f''_{yy} = -\frac{(-1).1.(x.x.z'_y.e^{zx})}{(-1 + x.e^{xz})^2}$$

$$f''_{yy}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$z \cong f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0).(x - x_0) + f'_y.(y - y_0) + \frac{1}{2}[f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2.f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2]$$

$$z \cong 1 + 1.(x - 0) + 1.(y - 0) + \frac{1}{2}[3(x - 0)^2 + 2.1.(x - 0)(y - 0) + 0.(y - 0)^2]$$

$$f(0.01, -0.02) \cong 1 + 1.\left(\frac{1}{100} - 0\right) + 1.\left(\frac{-2}{100} - 0\right) + \frac{1}{2}\left[3\left(\frac{1}{100} - 0\right)^2 + 2.1.\left(\frac{1}{100} - 0\right)\left(\frac{-2}{100} - 0\right) + 0.\left(\frac{-2}{100} - 0\right)^2\right]$$

$$f(0.01, -0.02) \cong 1 + 1.\left(\frac{1}{100}\right) + 1.\left(\frac{-2}{100}\right) + \frac{1}{2}\left[3\left(\frac{1}{100}\right)^2 + 2.1.\left(\frac{1}{100}\right)\left(\frac{-2}{100}\right)\right]$$

$$f(0.01, -0.02) \cong 1 - \frac{1}{100} + \frac{1}{2}\left(\frac{3 - 4}{10000}\right)$$

$$f(0.01, -0.02) \cong \frac{19799}{20000}$$

Rta.: $f(0.01, -0.02) \cong 0.98995$

Ejercicio 6:

Sabiendo que $p(x, y) = x^2 - 3xy + 2x + y - 1$ es el polinomio de Taylor de 2° orden de f en el punto $(2, 1)$, halle una ecuación cartesiana para el plano tangente a la gráfica de f en $(2, 1, z_0)$.

Recordando que una función f y su polinomio de Taylor p en un punto (x_0, y_0) cumplen en ese punto la condición de tener iguales los valores de la función y del polinomio y de sus derivadas parciales hasta el orden del polinomio, podemos plantear:

Ecuación del plano tangente: $z = f(2, 1) + (x - 2) \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) + (y - 1) \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) \quad (I)$

$$\begin{cases} f(2, 1) = p(2, 1) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = \frac{\partial p}{\partial x}(2, 1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = \frac{\partial p}{\partial y}(2, 1) \end{cases}$$

$$f(2, 1) = p(2, 1) = 4 - 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 - 1 = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = \frac{\partial p}{\partial x}(2, 1) = (2x - 3y + 2)|_{(2, 1)} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 2 = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = \frac{\partial p}{\partial y}(2, 1) = (-3x + 1)|_{(2, 1)} = -3 \cdot 2 + 1 = -5$$

Reemplazamos estos valores en la ecuación (I), y resulta:

$$\pi_t: z = 2 + (x - 2) \cdot 3 + (y - 1) \cdot (-5)$$

Rta.: $\pi_t: 3x - 5y - z = -1$

2.0 Extremos

Ejercicio 8:

Analice la existencia de extremos locales (o relativos) de f en su dominio natural. ¿Se puede determinar si alguno de los extremos hallados es absoluto en dicho dominio?

d) $f(x, y) = \sqrt{\ln(2 - x^2 - y^2)}$

Primero hallamos el dominio natural de la función: debe ser $\ln(2 - x^2 - y^2) \geq 0$ por lo tanto debe ser $(2 - x^2 - y^2) \geq 1$ luego resulta: $D_f: x^2 + y^2 \leq 1$ el dominio es un conjunto compacto, la función en ese conjunto compacto es continua, luego tiene máximo y mínimo absolutos en ese compacto.

Hallamos los puntos críticos o estacionarios:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = (0, 0)$$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{-x}{(2 - x^2 - y^2)\sqrt{\ln(2 - x^2 - y^2)}}, \frac{-y}{(2 - x^2 - y^2)\sqrt{\ln(2 - x^2 - y^2)}} \right) = (0, 0)$$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Único punto crítico: $P(0, 0)$

$$f(0, 0) = \sqrt{\ln 2}$$

Analizamos la frontera del D_f , que es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

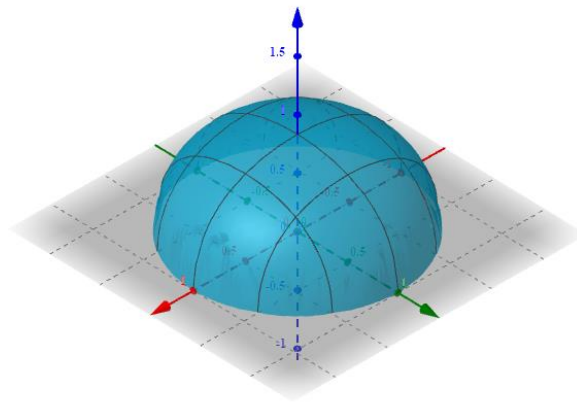
La función evaluada sobre la circunferencia frontera del dominio, de radio $r = 1$:

$$f(r) = \sqrt{\ln(2 - r^2)} \quad ; \quad f(1) = \sqrt{\ln(2 - 1)} = \sqrt{\ln 1} = 0$$

Luego, en todo punto de la frontera el valor de la función es 0

Como la función es continua en su dominio, que es un conjunto compacto, debe tener máximo absoluto y mínimo absoluto en ese compacto, luego no es necesario realizar análisis adicionales para asegurar que:

Rta.:	Máximo absoluto: en $(0,0)$ y su valor es $M = \sqrt{\ln 2} \cong 0,8325$
	Mínimo absoluto: en la frontera $x^2 + y^2 = 1$, y su valor es $m = 0$



Ejercicio 11:

Dada $f(x, y) = ax^3 + bxy + cy^2$, halle todos los valores de a, b, c de manera que $(0, 0, 0)$ sea un punto silla de la gráfica de f y que $f(1,1)$ sea un mínimo local de los valores de f . ¿Es $f(0,0)$ un extremo local?

El punto $(0,0,0)$ pertenece al gráfico de la función $f(x, y)$ pues $f(0,0) = 0$

Calculamos el gradiente de la función:

$$\nabla f(x, y) = (3ax^2 + by, \quad bx + 2cy)$$

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0) \quad \text{luego } P_1(0, 0) \text{ es un punto estacionario de } f(x, y)$$

El Hessiano de $f(x, y)$ es:

$$= \begin{vmatrix} 6ax & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 12acx - b^2$$

Evaluamos el Hessiano en $P_1(0, 0)$: $H(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = -b^2 < 0, \forall b \in \mathbb{R} - \{0\}$

Luego, $f(x, y)$ tiene un punto de ensilladura en $P_1(0, 0)$, $\forall b \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\forall a \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$

Ahora verificamos que condiciones deben cumplir a, b, c para que $f(x, y)$ tenga además un mínimo local en $(1, 1)$:

Debe ser $\nabla f(1, 1) = (0, 0) \wedge H(1, 1) > 0$ para que exista extremo local en $(1, 1)$

$$\nabla f(1, 1) = (3a + b, b + 2c) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{b}{3} \wedge c = -\frac{b}{2}$$

$$H(1, 1) = \begin{vmatrix} 6a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 12ac - b^2 = 12\left(-\frac{b}{3}\right)\left(-\frac{b}{2}\right) - b^2 = 2b^2 - b^2 = b^2 > 0$$

Luego $f(x, y)$ tiene en $(1, 1)$ un extremo relativo pues el Hessiano es mayor que cero, para que sea un mínimo relativo debe ser $6a > 0$, por lo tanto, como $a = -\frac{b}{3}$, deberá ser $b < 0$

Resumiendo, para que se cumplan las condiciones del problema deberá ser:

$\text{Rta.: } b < 0 \wedge a = -\frac{b}{3} \wedge c = -\frac{b}{2}$

Ejercicio 14.a

Halle una ecuación para el plano tangente en $(1, 2, 4)$ a la superficie de ecuación $z = f(x, y) + x^2$, sabiendo que f es C^2 y que $f(1, 2) = 3$ es un máximo relativo de los valores de f .

La ecuación vectorial del plano tangente:

Un vector normal al plano tangente es:

$$\nabla(f(x, y) + x^2 - z)_{(1, 2, 4)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + 2x, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right)_{(1, 2, 4)} = (2, 0, -1) = \vec{n}$$

Donde: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 0$ pues en $(1, 2)$ la $f(x, y)$ tiene un extremo relativo

Luego: $\pi_t : \vec{n} \cdot (x - 1, y - 2, z - 4) = 0$

$$\pi_t : (2, 0, -1) \cdot (x - 1, y - 2, z - 4) = 0$$

Finalmente resulta:

Rta.: $\pi_t: 2x - z + 2 = 0$

3.0 Extremos condicionados

Ejercicio 22:

Halle los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y - 1$ en:

- a) La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$
- b) El círculo $x^2 + y^2 \leq 1$

a) Utilizamos Multiplicadores de Lagrange

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla (x^2 + y^2 - 1) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x - 1, 2y - 1) = \lambda(2x, 2y,) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 1 = \lambda 2x & ec. (i) \\ 2y - 1 = \lambda 2y & ec. (ii) \\ x^2 + y^2 = 1 & ec. (iii) \end{cases}$$

De las ecuaciones (i) y (ii):

$$\begin{cases} 2x(1-\lambda) = 1 \\ 2y(1-\lambda) = 1 \end{cases}$$

Debe ser $\lambda \neq 1$ pues de lo contrario nos queda un absurdo: $0 = 1$

Siendo $\lambda \neq 1$ resulta $x = y$, reemplazando esto en la ec. (iii) resulta:

$$x^2 + x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad |x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Luego los puntos críticos son: $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $P_2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

Por ser $f(x, y)$ una función continua, definida en un compacto (la circunferencia es un compacto pues es un conjunto cerrado y acotado) tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese compacto.

Rta.: $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} \quad \text{mínimo absoluto de la función sobre la circunferencia}$ $f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \quad \text{Máximo absoluto de la función sobre la circunferencia}$

Otra forma de resolver el ejercicio:

Parametrizamos la circunferencia: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} ; 0 \leq t \leq 2\pi$

Reemplazamos en la función y resulta una función de una variable:

$$f(t) = \cos^2 t + \sin^2 t - \cos t - \sin t - 1 = -\cos t - \sin t$$

Y es ahora un estudio de funciones de una variable

$$f(t) = -\cos t - \sin t$$

$$f'(t) = \sin t - \cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin t = \cos t \quad \Rightarrow \quad \tan t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \vee t = \frac{5\pi}{4}$$

$$f''(t) = \cos t + \sin t$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 0 \quad \text{luego en } t = \frac{\pi}{4} \text{ la función tiene un mínimo relativo.}$$

$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0$ luego en $t = \frac{5\pi}{4}$ la función tiene un máximo relativo.

$t = \frac{\pi}{4}$ corresponde al punto de coordenadas $(x, y) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

y el valor del mínimo relativo es: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$

$t = \frac{5\pi}{4}$ corresponde al punto de coordenadas $(x, y) = \left(\cos\frac{5\pi}{4}, \sin\frac{5\pi}{4}\right) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

y el valor del máximo relativo es: $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} = \sqrt{2}$

Además $f(t)$ es una función continua y definida en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$, luego Debe tener máximo absoluto y mínimo absoluto en ese intervalo, por lo tanto los Extremos relativos son además absolutos.

- b) Para hallar los extremos absolutos en el círculo debemos analizar el interior del círculo y la circunferencia frontera. El análisis de la frontera ya lo hicimos en el punto anterior. Procedemos a analizar la existencia de extremos en el interior del círculo:

$$\nabla f(x, y) = (2x - 1, 2y - 1) = (0, 0) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \wedge y = \frac{1}{2}$$

Punto estacionario: $P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$H(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ El Hessiano es positivo, independientemente de los valores de x e y

En $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ la función tiene un extremo relativo, que además es un mínimo pues $f_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) > 0$

El valor de este mínimo relativo es: $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{2}$

Comparamos los extremos en el interior del círculo y en la frontera del círculo para hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto en el círculo:

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{2} \quad ; \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} \quad ; \quad f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

Rta.: Luego: el Máximo Absoluto en el círculo es: $M = \sqrt{2}$, en $(x, y) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

el mínimo Absoluto en el círculo es: $m = \frac{-3}{2}$, en $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Ejercicio 23:

Halle los extremos de $f(x, y, z) = xz - yz$ evaluada en puntos de la curva intersección de las superficies de ecuaciones: $x^2 + z^2 = 2$; e $yz = 2$

a) Lo resolvemos por Multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla(f(x, y, z) = \gamma \nabla(x^2 + z^2 - 2) + \delta \nabla(yz - 2) \\ x^2 + z^2 - 2 = 0 \\ yz - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (z, -z, x - y) = \gamma(2x, 0, 2z) + \delta(0, z, y) \\ x^2 + z^2 - 2 = 0 \\ yz - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1) & z = \gamma 2x \\ 2) & -z = \delta z \\ 3) & x - y = \gamma 2z + \delta y \\ 4) & x^2 + z^2 - 2 = 0 \\ 5) & yz - 2 = 0 \end{cases}$$

De la ecuación 2): $z = 0 \quad \vee \quad \delta = -1$

De la ecuación 5) no puede ser $z = 0$ pues sería: $-2 = 0$ Absurdo

Reemplazamos $\delta = -1$ en la ecuación 3) y resulta: $x - y = \gamma 2z - y$

Luego: 3) $x = 2\gamma z$

Reemplazando 3) en 1) queda: $z = \gamma 2.2\gamma z$

Por ser $z \neq 0$ resulta: $z = \gamma 2.2\gamma z$ luego: $\gamma^2 = \frac{1}{4} \rightarrow |\gamma| = \frac{1}{2}$

En la ecuación 1), si $\gamma = \frac{1}{2} \rightarrow z = x \rightarrow$ en la ecuación 4) $2x^2 = 2 \rightarrow |x| = 1$

Luego: Si $x = 1 \rightarrow z = 1 \rightarrow$ de la ecuación 5) $y = 2$ Punto $P_1(1, 2, 1)$

Si $x = -1 \rightarrow z = -1 \rightarrow$ de la ecuación 5) $y = -2$ Punto $P_2(-1, -2, -1)$

En la ecuación 1), si $\gamma = -\frac{1}{2} \rightarrow z = -x \rightarrow$ en la ecuación 4) $2x^2 = 2 \rightarrow |x| = 1$

Luego: Si $x = 1 \rightarrow z = -1 \rightarrow$ de la ecuación 5) $y = -2$ Punto $P_3(1, -2, -1)$

Si $x = -1 \rightarrow z = +1 \rightarrow$ de la ecuación 5) $y = 2$ Punto $P_4(-1, 2, 1)$

Resumiendo: $P_1(1, 2, 1)$; $P_2(-1, -2, -1)$; $P_3(1, -2, -1)$; $P_4(-1, 2, 1)$

Evaluamos $f(x, y, z) = xz - yz$ en cada uno de esos puntos:

- | | | |
|------|------------------------|----------------------|
| i) | En $P_1(1, 2, 1)$: | $f(1, 2, 1) = -1$ |
| ii) | En $P_2(-1, -2, -1)$: | $f(-1, -2, -1) = -1$ |
| iii) | En $P_3(1, -2, -1)$: | $f(1, -2, -1) = -3$ |
| iv) | En $P_4(-1, 2, 1)$: | $f(-1, 2, 1) = -3$ |

Luego: En $P_1(1, 2, 1)$ y en $P_2(-1, -2, -1)$ hay Máximo, de valor $M = -1$

En $P_3(1, -2, -1)$ y en $P_4(-1, 2, 1)$ hay mínimo, de valor $m = -3$

Nota: Hay que probar que son extremos pues las ecuaciones de condición definen una curva abierta. Ver la resolución incorporando las condiciones en la función cuyos extremos queremos hallar

Otra resolución: incorporando las condiciones a la función cuyos extremos queremos hallar:

La curva intersección entre el cilindro circular recto $\sigma_1: x^2 + z^2 = 2$ y el cilindro parabólico $\sigma_2: yz = 2$ es:

$$\vec{r}(t) = \left(\sqrt{2} \cos t, \frac{2}{\sqrt{2} \sin t}, \sqrt{2} \sin t \right) ; t \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$$

(las componentes x, z corresponden a la parametrización del cilindro circular y la componente y corresponde al cilindro hiperbólico)

La función $f(x, y, z) = xz - yz$ sobre esa curva es:

$$f(t) = \sqrt{2} \cos t \sqrt{2} \sin t - \frac{2}{\sqrt{2} \sin t} \sqrt{2} \sin t$$

$$f(t) = 2 \sin t \cos t - 2$$

$$f(t) = \sin 2t - 2$$

Al incorporar las condiciones a la función f , se convierte en una función de una variable.

Hallamos los puntos críticos:

$$f'(t) = 2 \cos 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} ; t = \frac{3}{4}\pi ; t = \frac{5}{4}\pi ; t = \frac{7}{4}\pi \quad \text{Puntos críticos}$$

$f''(t) = -4 \sin 2t$ evaluamos la derivada segunda en cada punto crítico:

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 < 0 \quad \text{luego hay Máximo en } t = \frac{\pi}{4} \text{ de valor } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

y corresponde al punto $P_1(1, 2, 1) = \vec{r}_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$$f''\left(3\frac{\pi}{4}\right) = 4 > 0 \quad \text{luego hay mínimo en } t = 3\frac{\pi}{4} \text{ de valor } f\left(3\frac{\pi}{4}\right) = -3$$

y corresponde al punto $P_4(-1, 2, 1) = \vec{r}_{\left(3\frac{\pi}{4}\right)}$

$$f''\left(5\frac{\pi}{4}\right) = -4 < 0 \quad \text{luego hay Máximo en } t = 5\frac{\pi}{4} \text{ de valor } f\left(5\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

y corresponde al punto $P_3(-1, -2, -1) = \vec{r}_{\left(5\frac{\pi}{4}\right)}$

$$f''\left(7\frac{\pi}{4}\right) = +4 > 0 \quad \text{luego hay mínimo en } t = 7\frac{\pi}{4} \text{ de valor } f\left(7\frac{\pi}{4}\right) = -3$$

y corresponde al punto $P_2(1, -2, -1) = \vec{r}_{\left(7\frac{\pi}{4}\right)}$

Podemos además determinar si son extremos absolutos además de relativos:

La curva es una curva abierta, que tiene dos ramas. Debemos analizar que ocurre con la función cuando: $t \rightarrow 0^+$; $t \rightarrow \pi^-$; $t \rightarrow \pi^+$; $t \rightarrow 2\pi^-$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\sin 2t - 2) = -2$$

.

Análogamente, los otros tres límites valen también -2

Luego los extremos hallados son además absolutos.

Graficamos las dos superficies condición para visualizar la curva:

