Análisis Matemático II y II “A”

Ejemplos y ejercicios de la unidad III con links a videos explicativos

Autor: Martín Maulhardt

Análisis Matemático II y II “A”
Facultad de Ingeniería - U.B.A.

Una Resolución de Ejercicios

Primer cuatrimestre de 2020.

Ejercicio 1.

Sea $f : R^2 \to R$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \ sen(y)}{x^2 + y^2} & si \ (x, y) \neq (0{,}0) \\ 0 & si \ (x, y) = (0{,}0) \end{cases}.$$

Analice la derivabilidad según distintas direcciones en $(0{,}0)$.

Solución.

Para analizar la derivabilidad según distintas direcciones sea $\breve{v} = (a, b)$ con $a^2 + b^2 = 1$. Entonces, por definición de derivada direccional, de existir y ser finito el límite, tenemos

$$f'((0{,}0), \breve{v}) = \frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0{,}0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(ha,\ hb) - f(0{,}0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(ha)^2 \; sen(hb)}{(ha)^2 + (hb)^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 a^2 \; sen(hb)}{h^3(a^2 + b^2)}$$

es decir

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^2 \; sen(hb)}{h} .$$

Debemos ahora considerar dos casos, a saber:

$a = 0 \;\vee\; b = 0$ y $a \neq 0 \;\wedge\; b \neq 0$.

Caso 1: Si $a = 0 \;\vee\; b = 0$ tenemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^2 \; sen(hb)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Caso 2 : Si $a \neq 0 \;\wedge\; b \neq 0$ tenemos, aplicando la regla de L'Hospital

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^2 \; sen(hb)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^2 \; cos(hb) \, . \, b}{1} = a^2 b.$$

Por lo tanto

$$f'((0,0),\breve{v}) = \frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0) = \begin{cases} a^2b & si \quad a \neq 0 \ \wedge \ b \neq 0 \\ 0 & si \quad a = 0 \ \vee \ b = 0 \end{cases}.$$

Observación. Como a^2b *es igual a cero si* $a = 0 \ \vee \ b = 0$ *se podría escribir el resultado más sintéticamente así:*

$$f'((0,0),\breve{v}) = \frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0) = a^2b$$

o más aún recordando que $a^2 + b^2 = 1$

$$f'((0,0),\breve{v}) = \frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0) = (1 - b^2)b.$$

Ver video on-line

Ejercicio 2.

Sea C una curva cuyos puntos pertenecen a la superficie de ecuación $x^2z - y^2 + z = 4$. Sabiendo que la proyección ortogonal de C sobre el plano xy tiene ecuación $y = x^2$ analice si la recta tangente a C en el punto $(2,4,z_0)$ interseca en algún punto al eje z.

Solución.

Si la proyección de C sobre el plano xy tiene ecuación $y = x^2$ podemos parametrizar C en la forma

$$\vec{\gamma}(t) = (t, t^2, z(t)) \qquad\qquad t \in R.$$

Por estar C contenida en la superficie de ecuación

$$x^2z - y^2 + z = 4$$

tenemos $z(1+x^2)=4+y^2$ entonces $z=\dfrac{4+y^2}{1+x^2}$.

Luego

$$\vec{\gamma}(t)=\left(t,\ t^2,\ \frac{4+t^4}{1+t^2}\right) \qquad\qquad t\in R$$

es una posible parametrización regular de C.

El valor del parámetro t para el cual $\vec{\gamma}(t)=(2,4,z_0)$ es evidentemente $t=2$ de modo que debemos analizar si la recta tangente en $\vec{\gamma}(2)=(2,4,4)$ interseca al eje z.

Como $\vec{\gamma}(t)=\left(t,\ t^2,\ \dfrac{4+t^4}{1+t^2}\right)$ tenemos derivando que

$$\vec{\gamma}\,'(t)=\left(1,2t,\frac{4t^3\ (1+t^2)-(4+t^4)\ 2t}{(1+t^2)^2}\right).$$

Luego

$$\vec{\gamma}'(2) = \left(1,\ 4,\ \frac{16}{5}\right).$$

Por lo tanto, los puntos del espacio xyz que pertenecen a la recta tangente recta tangente en $\vec{\gamma}(2) = (2,4,4)$ son

$$(x, y, z) = (2,4,4) + u\left(1,\ 4,\ \frac{16}{5}\right) \qquad \forall u \in R$$

es decir

$$(x, y, z) = \left(2 + u,\ 4 + 4u,\ 4 + \frac{16}{5}u\right) \qquad \forall u \in R.$$

Si queremos que dicha recta interseque al eje z, cuyos puntos son del tipo $(0,\ 0,\ z_0)$, debemos tener simultáneamente

$$\begin{cases} 2 + \ \ u = 0 \Longrightarrow u = -2 \\ 4 + 4u = 0 \Longrightarrow u = -1 \end{cases}.$$

Absurdo! Luego la recta tangente a C en el punto $(2,4,4)$ no interseca al eje z.

Ver video on-line

Ejercicio 3.

Sea $f : R^2 \to R : f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$. Analice si f admite derivada parcial de primer orden respecto de x en todo punto de su dominio.

Solución.

Evidentemente el dominio de f es $D_f = R^2$.

Calculando tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + y^4}} \qquad \text{si} \qquad (x, y) \neq (0,0).$$

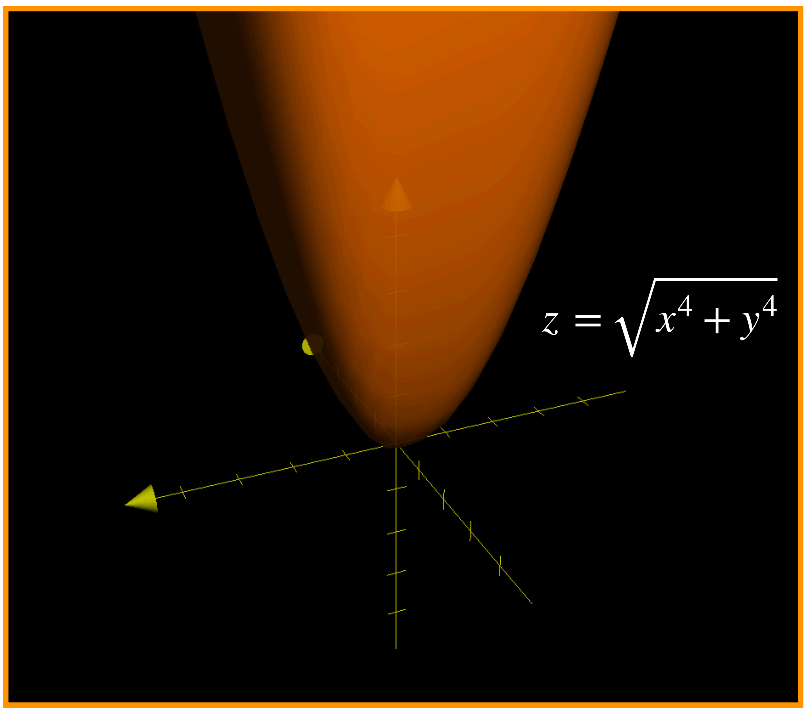
Si $(x, y) = (0,0)$ debemos usar la definición de derivada parcial. Tenemos que, si el límite existe y es finito,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0.$$

Luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^4}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$



Ver video on-line

Ejercicio 4.

Dada la curva C definida como la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 cuyas ecuaciones son

$$\Sigma_1 : z = x^2 + y + 1 \quad \text{con} \quad (x, y) \in R^2$$

$$\Sigma_2 : \overrightarrow{X} = (u, u^2, v) \quad \text{con} \quad (u, v) \in R^2.$$

Analice si la recta tangente a C en $(2, y_0, z_0)$ tiene algún punto en común con el plano xz.

Solución.

De la definición de Σ_2 obtenemos que sus puntos satisfacen la condición $y = x^2$, $z = v$ con $v \in R$, es decir $z \in R$.

La curva C se puede definir entonces por el sistema de ecuaciones cartesianas

$$\begin{cases} x^2 + y + 1 - z = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}.$$

Del sistema que define a la curva C deducimos entonces que $(2,y_0,z_0) = (2,4,9)$.

Definamos ahora las funciones $F, G \in C^\infty(R^2)$ siguientes:

$$F(x,y,z) = x^2 + y + 1 - z \qquad \text{y} \qquad G(x,y,z) = x^2 - y.$$

Un vector tangente a C en el punto $(2,4,9)$ es entonces

$$\nabla F\ (2,4,9)\ \times\ \nabla G\ (2,4,9).$$

Calculando vemos que

$$\nabla F(x,y,z) = (2x,1,-1) \quad \text{y} \quad \nabla G(x,y,z) = (2x,-1,0)$$

y evaluando en $(2,4,9)$ tenemos

$$\nabla F(2,4,9) = (4,1,-1) \quad \text{y} \quad \nabla G(2,4,9) = (4,-1,0).$$

El producto vectorial de estos dos vectores es

$$\nabla F(2,4,9) \times \nabla G(2,4,9) = (-1, -4, -8).$$

Este vector permite dirigir la recta tangente a la curva. El método que hemos hallado es válido pues el punto $(2,4,9)$ pertenece a ambas superficies $\nabla F(x, y, z)$ y $\nabla G(x, y, z)$ son funciones continuas en un entorno del punto $(2,4,9)$ y el producto vectorial $\nabla F(2,4,9) \times \nabla G(2,4,9) = (-1, -4, -8)$ resultó no nulo.

Luego, una ecuación para la recta tangente a C en el punto $(2,4,9)$ es

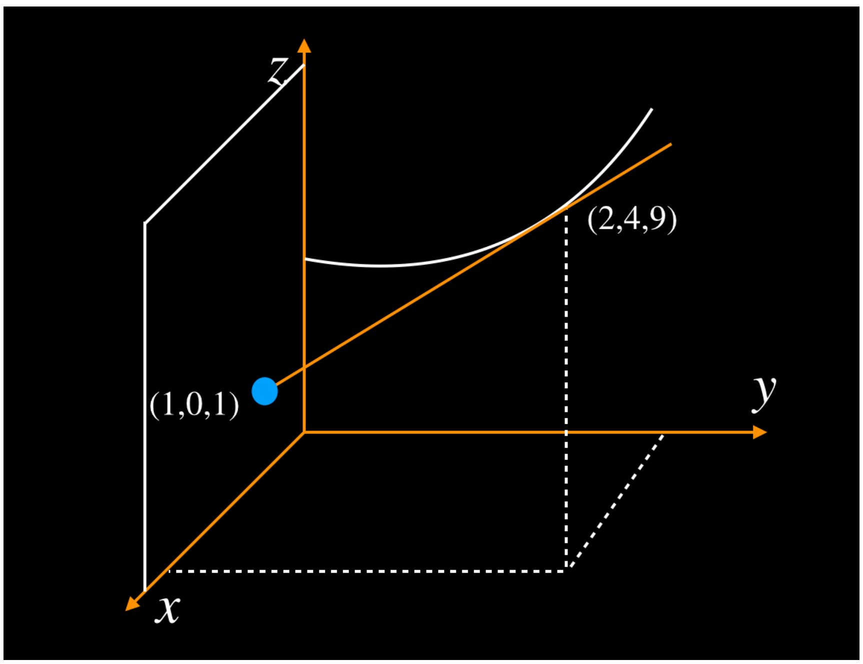
$$\vec{r}(t) = (2,4,9) + t(-1, -4, -8) \qquad \forall t \in R.$$

Si esta recta va a intersecar al plano xz cuyos puntos son del tipo $(x_0, 0, z_0)$ su segunda componente debe ser 0, es decir

$$4 - 4t = 0 \Longrightarrow t = 1.$$

Por lo tanto, el punto de intersección en el que la recta tangente en el punto $(2,4,9)$ a la curva intersección de las superficies dadas es común con el plano xz es el punto

$$\vec{r}(1) = (1,0,1).$$



Ver video on-line