

Esta síntesis no es un apunte de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

DERIVADAS

Derivada de función de una variable

Dada $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ y un punto a interior a D , si existe y tiene norma finita el límite que se indica,

$$f'(a) \doteq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ es la derivada de } f \text{ en } a.$$

Para funciones escalares las propiedades de las derivadas son las que se han estudiado en un primer curso de Análisis Matemático (función real de una variable real).

Sólo para recordar

En el gráfico de la derecha se observa una curva en color rojo de ecuación

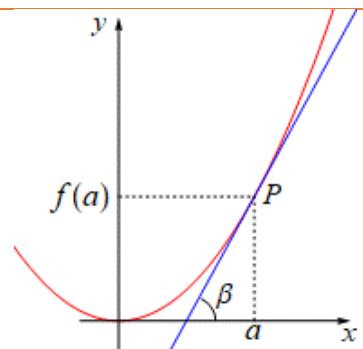
$$y = f(x) \text{ con } x \in D$$

y, en color azul, su recta tangente en $P = (a, f(a))$ con a interior a D .

La ecuación de esta recta puede expresarse en la forma:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

donde $f'(a)$ es la pendiente de la recta. Cuando en ambos ejes se utiliza la misma escala resulta $f'(a) = \operatorname{tg}(\beta)$.



Teorema: Dada $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $m > 1$,

$$\exists \vec{f}'(a) \Leftrightarrow \exists f'_k(a), k = 1, \dots, m$$

$$\text{siendo } \vec{f}'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_m(a))$$

Un vector es derivable si, y sólo si, sus componentes son derivables.

La derivada del vector se obtiene derivando sus componentes.

De esta manera, si sabemos derivar funciones escalares, también podemos derivar las vectoriales (componente a componente).

Ejemplos:

(1) Dada $f(x) = x^2 + \operatorname{sen}(x)$, resulta $f'(x) = 2x + \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(2) Dada $f(x) = \ln(x)$, resulta $f'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R} / x > 0$.

(3) Dada $\vec{f}(u) = (u^2 + \operatorname{sen}(u), \ln(u))$, resulta $\vec{f}'(u) = (2u + \cos(u), 1/u) \quad \forall u \in \mathbb{R} / u > 0$.

(4) Dada $g(t) = e^{\operatorname{sen}(t)}$, resulta $g'(t) = e^{\operatorname{sen}(t)} \cos(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

En estos ejemplos, ¿por qué no aplicamos la definición de derivada planteando un límite? No lo hacemos porque –aplicando la definición– se pueden demostrar las expresiones y propiedades que se utilizaron para funciones escalares de una variable. Sin importar cómo se denomina la variable $(x, u, t, \dots)$.

- expresiones: son las de las derivadas de las funciones conocidas, por ejemplo:

$$(\sin(x))' = \cos(x) \quad , \quad (\cos(x))' = -\sin(x) \quad , \quad (e^x)' = e^x \quad , \quad \text{etc.}$$

- propiedades: son las relacionadas a operaciones entre funciones, en particular:

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \quad , \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad , \quad (f/g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \leftarrow g \neq 0$$

$$(k)' = 0 \quad , \quad k : \text{constante} .$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{derivada de la composición, } f(g(x)) \equiv (f \circ g)(x) .$$

En estos casos se dice que se deriva aplicando **reglas prácticas de derivación**. Se supone que las operaciones entre funciones están definidas y que las funciones son derivables.

Casos en los que no se debe aplicar la regla práctica. Son tres casos:

1. En puntos que no pertenecen al dominio de la función.
2. En puntos donde está partida la definición de la función.
3. En puntos tales que, al evaluar el resultado de la regla práctica se llega a una expresión sin sentido algebraico.

- Ejemplo de “1.”: $f(x) = \ln(x)$, $D = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$.

Por regla práctica $f'(x) = 1/x$.

Entonces: $f'(1/2) = 2$, $f'(4) = 1/4$, pero no está definida la derivada en -1 , pues $-1 \notin D$.

No derivemos donde no está definida la función

- Ejemplo de “2.”: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } x > 0, f'(x) = 2x \\ \text{Para } x < 0, f'(x) = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = 2x \quad \text{para } x \neq 0 .$$

¿Por qué no incluimos $x = 0$?, porque **en ese punto está partida** la definición de la función.

Vamos a analizar si f es derivable en 0 aplicando la definición de derivada:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(h+0)}^{f(h)} - \overbrace{f(0)}^{0^2=0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2+1}{h} = -\infty \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h = 0 \end{array} \right.$$

Como los límites laterales son distintos, no existe $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$.

Conclusión: La función no es derivable en el origen, sólo lo es para $x \neq 0$.

- Ejemplo para “3.”: $f(x) = \sqrt{x^4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Por regla práctica $f'(x) = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4}}$ que permite calcular para $x \neq 0$. En $x = 0$ la expresión no tiene sentido algebraico porque no está definida la división por 0 (la calculadora indica error).

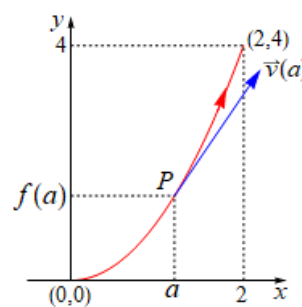
Aquí, desde el enunciado, puede hacer $f(x) = \sqrt{x^4} = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ con lo cual “se terminaron los problemas”.

¿Lo podría haber hecho desde la expresión de $f'(x)$ obtenido por regla práctica? Sí, pero no valdría para $x = 0$ (¿por qué?).

Se invita a analizar la derivabilidad de f en $x = 0$ aplicando la definición.

- Ejemplo: La posición de un punto material en el plano xy queda definida en cada instante t por $\vec{X} = \underbrace{(t, f(t))}_{\vec{g}(t)}$ con $0 \leq t \leq 2$.

La línea roja indica la forma de la ruta que recorre el punto, que se desplaza desde $\vec{g}(0) = (0,0)$ hasta $\vec{g}(2) = (2,4)$. La orientación de dicho movimiento se indica con la flecha de color rojo (sentido de los arcos crecientes).



La velocidad del punto en cada instante viene dada por $\vec{v}(t) \doteq \vec{g}'(t) = (1, f'(t))$.

En el esquema se representa el punto material en la posición $P = (a, f(a))$, en la cual tiene la velocidad $\vec{v}(a) = (1, f'(a))$ representada con el vector de color azul aplicado en dicho punto.

Este ejemplo muestra una de las posibles aplicaciones de la derivada de una función vectorial de una variable.

- Ejercicio: Dada $f(u) = \begin{cases} 3+u^2 & \text{si } u \geq 0 \\ 3-u^3 & \text{si } u < 0 \end{cases}$, analice si f es derivable $\forall u \in \mathbb{R}$.

¿Para qué valor de u necesitó analizar la derivabilidad por definición?

Conceptos adicionales sobre curvas

Dada una curva $C \subset \mathbb{R}^m$ de ecuación $\vec{X} = \vec{g}(t)$ con $t \in I^{(1)}$, interesa definir los siguientes conceptos.

- Un punto $\vec{A} = \vec{g}(t_0) \in C$ es **punto regular de la curva** cuando $\vec{g}$ es derivable en t_0 y $\vec{g}'(t_0) \neq \vec{0}$.

Una curva es regular cuando todos sus puntos lo son.

- Un punto $\vec{A} \in C$ es **punto simple de la curva** cuando, a través de $\vec{g}$, es imagen de un único $t_0 \in I$.

Un punto que no es simple se denomina múltiple.

Una curva es simple cuando todos sus puntos lo son (carece de puntos múltiples).

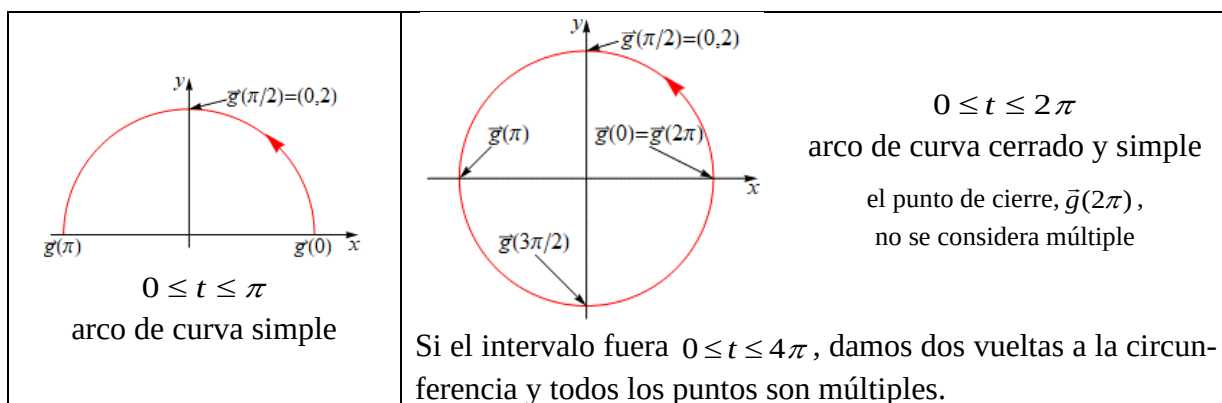
- Un **arco de curva** es una curva de ecuación $\vec{X} = \vec{g}(t)$ con $t \in [a, b]$, es decir, el intervalo I es cerrado y acotado.

Un **arco de curva cerrado** es aquel para el cual se cumple que $\vec{g}(a) = \vec{g}(b)$.

Es decir, en el sentido de los arcos crecientes, el punto final ($\vec{g}(b)$) coincide con el inicial ($\vec{g}(a)$).

Un **arco de curva cerrado es simple** cuando lo es la curva de ecuación $\vec{X} = \vec{g}(t)$ con $t \in [a, b]$.

Ejemplos: Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ de ecuación $\vec{X} = (2\cos(t), 2\sin(t))$ con $0 \leq t \leq b$. Veamos qué ocurre para distintos valores de b , en un plano de puntos genéricos $\vec{X} = (x, y)$.

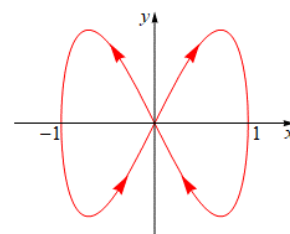


El punto es simple cuando, al ir dibujando la curva en el sentido de los arcos crecientes, pasamos una sola vez por él.

Por último, a la derecha se muestra la curva C de ecuación:

$$\vec{X} = \underbrace{(\sin(t), \sin(2t))}_{\vec{g}(t)} \text{ con } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

El único punto múltiple de C es $\vec{g}(0) = \vec{g}(\pi) = \vec{g}(2\pi) = (0, 0)$, que este punto es múltiple es evidente porque en él la curva se cruza sobre sí misma.



⁽¹⁾ El concepto de curva está definido en la síntesis S-2, pág. 6/9. Recuerde que $\vec{g}$ es continua en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Recta tangente a una curva

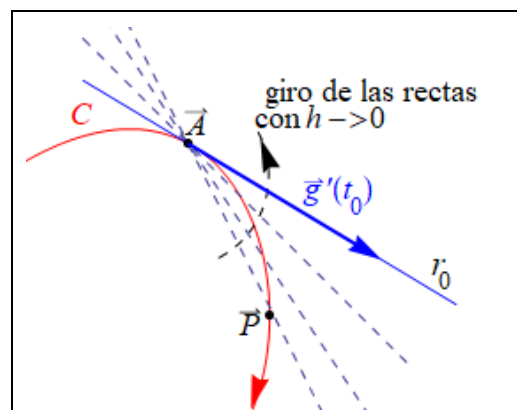
Sea la curva $C \subset \mathbb{R}^m$ de ecuación $\vec{X} = \vec{g}(t)$ con $t \in I$.

En todo punto simple y regular $\vec{A} = \vec{g}(t_0) \in C$, la curva admite recta tangente de ecuación:

$$\vec{X} = \vec{A} + u \vec{g}'(t_0) \text{ con } u \in \mathbb{R}.$$

Dicha recta r_0 es la que pasa por $\vec{A} = \vec{g}(t_0)$ y está dirigida por $\vec{g}'(t_0)$, como se observa en el dibujo de la derecha.

Observe que $\vec{g}'(t_0)$ es tangente a C en $\vec{A}$ y está orientado en el sentido de los arcos crecientes (flecha roja sobre la curva).



Nota: Siendo $\vec{A} = \vec{g}(t_0)$, el punto $\vec{P} = \vec{g}(t_0 + h)$ con $h \neq 0$ no coincide con $\vec{A}$, porque $\vec{A}$ es punto simple.

Entonces el vector $\vec{P} - \vec{A} = \vec{g}(t_0 + h) - \vec{g}(t_0)$ permite dirigir la recta que pasa por $\vec{A}$ y $\vec{P}$. La idea es analizar qué ocurre con esa recta cuando $\vec{P}$ se desplaza sobre la curva acercándose al punto $\vec{A}$. Para ello se toma h cada vez más pequeño. Como la función $\vec{g}$ es continua, se cumple que $\vec{P} = \vec{g}(t_0 + h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \vec{g}(t_0) = \vec{A}$. Por supuesto que entonces $\vec{P} - \vec{A} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \vec{0}$ que, por ser el vector nulo, ya no puede dirigir a la recta.

En cambio, usando $\frac{\vec{P} - \vec{A}}{h} = \frac{\vec{g}(t_0 + h) - \vec{g}(t_0)}{h}$, este vector también dirige a la recta que pasa por $\vec{A}$ y $\vec{P}$ cumpliéndose

que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{g}(t_0 + h) - \vec{g}(t_0)}{h} = \vec{g}'(t_0)$ existente y no nula porque se supone que $\vec{A}$ es punto regular de C .

Entonces la recta gira alrededor del punto $\vec{A}$ y termina convirtiéndose en r_0 , que se denomina recta tangente a C en $\vec{A}$.⁽²⁾

Es común decir que r_0 pasa por $\vec{A}$ y por un punto de la curva *infinitamente próximo* a $\vec{A}$.

Ejemplo: Sea la curva de ecuación $y = \overbrace{x^2 + 1}^{f(x)}$ con $x \in \mathbb{R}$, en el plano xy . Halle la ecuación de su recta tangente en el punto $\vec{A} = (2, 5)$.

1º método: Ecuación de la recta pedida $y - \overbrace{f(2)}^{2^2+1} = \overbrace{f'(2)}^{[2x]_{x=2}=4} (x - 2) \rightarrow \boxed{y - 5 = 4(x - 2)}$.
¿Ya está? Claro, es Análisis Matemático I, terminó el ejercicio.

2º método: Parametrizamos la curva, $\vec{X} = \underbrace{(x, x^2 + 1)}_{\vec{g}(x)}$ con $x \in \mathbb{R}$, donde $\vec{A} = \vec{g}(2) = (2, 5)$

$$\text{Recta tangente: } \vec{X} = \underbrace{(2, 5)}_{\vec{A}} + u \underbrace{(1, 2x)}_{\vec{g}'(2)} \Big|_{x=2} = (1, 4) \rightarrow \boxed{\vec{X} = (2 + u, 5 + 4u), u \in \mathbb{R}}.$$

También terminó el ejercicio.

Veamos si obtuvimos algo equivalente, los puntos del plano son $\vec{X} = (x, y)$.

⁽²⁾ En el dibujo se representó el caso de $h > 0$, el mismo resultado se obtiene razonando con $h < 0$.

Entonces los puntos de la recta son:

$$\overrightarrow{\tilde{X}}(x, y) = (2 + u, 5 + 4u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

De donde resulta: $\begin{cases} x = 2 + u \\ y = 5 + 4u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}.$

Despejando u de la primera y reemplazándolo en la segunda, tenemos:

$$y = 5 + 4(x - 2) \text{ con } x \in \mathbb{R} \text{ pues } u \in \mathbb{R},$$

de donde surge:

$$\boxed{y - 5 = 4(x - 2)},$$

la ecuación obtenida con el primer método.

Por supuesto que, para este caso, aplicaría el primer método sin duda alguna.

Ejemplo: Dada la curva C definida por la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 de ecuaciones:

$$\Sigma_1 : z = x^2 + 3y \quad y \quad \Sigma_2 : y = x + 2,$$

halle una ecuación para la recta tangente a C en el punto $\vec{A} = (1, 3, 10)$ de la misma.

$$\text{En este caso } C = \begin{cases} z = x^2 + 3y \\ y = x + 2 \end{cases}.$$

Es decir, los puntos $\vec{X} \in C$ cumplen con:

$$\vec{X} = \underbrace{\left(x, \overbrace{x+2}^y, \overbrace{x^2+3x+6}^{x^2+3y} \right)}_{\vec{g}(x)} \text{ con } x \in \mathbb{R},$$

donde $\vec{A} = (1, 3, 10) = \vec{g}(1)$. La recta tangente tiene ecuación:

$$\vec{X} = \underbrace{\vec{g}(1) = (1, 3, 10)}_{\vec{A}} + u \underbrace{(1, 1, 2x+3)}_{\vec{g}'(1)} \Big|_{x=1} = (1, 3, 10) + u (1, 1, 5) \text{ con } u \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\vec{X} = (1 + u, 3 + u, 10 + 5u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio: Verifique que, con la parametrización usada en cada caso, en los dos ejemplos anteriores el punto $\vec{A}$ de la curva es simple y regular.

Si no lo fuera, no se cumplirían las hipótesis supuestas para asegurar la existencia de recta tangente y establecer la ecuación de la misma. Lo hecho no sería correcto.

Curva plana en $\mathbb{R}^2$, recta normal

Supongamos por ejemplo la curva C de ecuación es $\vec{X} = \vec{g}(t)$ con $t \in I$, en el plano xy .

De acuerdo a lo visto, si $\vec{A} = \vec{g}(t_0)$ es punto simple y regular de C , tenemos la siguiente ecuación.

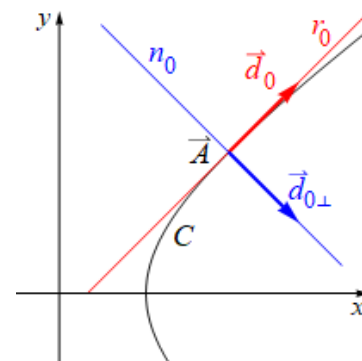
$$\text{recta tangente } r_0 \text{ en } \vec{A}: \boxed{\vec{X} = \vec{A} + u \vec{g}'(t_0) \text{ con } u \in \mathbb{R}},$$

donde $\vec{d}_0 = \vec{g}'(t_0) \neq \vec{0}$ es un vector director de r_0 .

La **recta normal** n_0 a la curva en $\vec{A}$, es la perpendicular a r_0 en dicho punto. Para dirigirla debemos elegir un vector no nulo $\vec{d}_{0\perp}$ que sea ortogonal a $\vec{d}_0$, es decir, tal que $\vec{d}_{0\perp} \cdot \vec{d}_0 = 0$.

Con ello tenemos la siguiente ecuación.

$$\text{recta normal } n_0 \text{ en } \vec{A}: \boxed{\vec{X} = \vec{A} + v \vec{d}_{0\perp} \text{ con } v \in \mathbb{R}}.$$



Cuando la curva viene dada mediante una ecuación cartesiana del tipo $y = f(x)$ con $x \in I$, con que f sea derivable en x_0 es suficiente para que tenga recta tangente en $\vec{A} = (x_0, f(x_0))$.

Si la parametrizamos mediante la ecuación $\vec{X} = \underbrace{(x, f(x))}_{\vec{g}(x)}$ con $x \in I$, el vector director r_0 es:

$$\vec{d}_0 = \vec{g}'(x_0) = (1, \underbrace{f'(x_0)}_{m_0}).$$

Donde $m_0 = f'(x_0)$ es la pendiente de r_0 , que admite ecuación cartesiana $\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$.

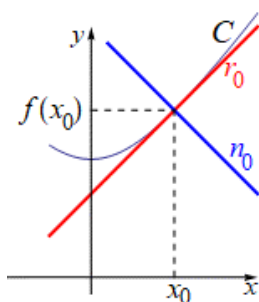
Si existe un vector $\vec{d}_{0\perp} = (1, m_{0\perp})$ debe cumplir con:

$$\vec{d}_{0\perp} \cdot \vec{d}_0 = 0 \Leftrightarrow (1, m_{0\perp}) \cdot (1, m_0) = 0 \Leftrightarrow 1 + m_{0\perp} m_0 = 0 \Rightarrow m_{0\perp} = -\frac{1}{m_0},$$

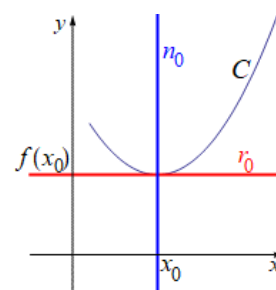
que sólo tiene sentido si $m_0 \neq 0$. En ese caso la ec. de la recta normal es $\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$.

Cuando $m_0 = f'(x_0) = 0$, la recta tangente es horizontal de ecuación $y = f(x_0)$, el vector $\vec{d}_0 = (1, 0)$ y un vector ortogonal es $\vec{d}_{0\perp} = (0, 1)$. Con lo cual la recta normal es vertical, de ecuación $x = x_0$.

Gráficos asociados a los casos de curva dada mediante ecuación cartesiana con y en función de x .



$$\begin{aligned} C &: y = f(x) \text{ con } x \in I \\ r_0 &: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \\ n_0 &: y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} C &: y = f(x) \text{ con } x \in I \\ r_0 &: y = f(x_0) \\ n_0 &: x = x_0 \end{aligned}$$

Curva en $\mathbb{R}^3$, plano normal

Supongamos por ejemplo la curva C de ecuación es $\vec{X} = \vec{g}(t)$ con $t \in I$, en el espacio xyz .

De acuerdo a lo visto, si $\vec{A} = \vec{g}(t_0)$ es punto simple y regular de C , tenemos la siguiente ecuación.

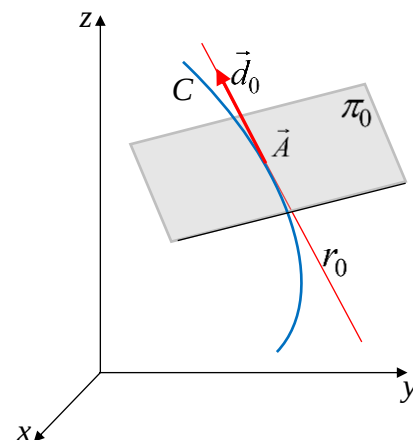
recta tangente r_0 en $\vec{A}$: $\vec{X} = \vec{A} + u \vec{g}'(t_0)$ con $u \in \mathbb{R}$,

donde $\vec{d}_0 = \vec{g}'(t_0) \neq \vec{0}$ es un vector director de r_0 .

El **plano normal** π_0 a la curva en $\vec{A}$, es perpendicular a r_0 en dicho punto.

Entonces $\vec{d}_0$ es ortogonal al plano (ver gráfico), de donde, una ecuación cartesiana para dicho plano normal es:

$$\text{plano normal } \pi_0 \text{ en } \vec{A}: \boxed{(\vec{X} - \vec{A}) \cdot \vec{d}_0 = 0}.$$



Ejemplo: Dada la curva C definida por la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 de ecuaciones:

$$\Sigma_1: x^2 + y^2 = 8 \quad \text{y} \quad \Sigma_2: z = 2x + 1,$$

halle ecuaciones para la recta tangente y el plano normal a C en $\vec{A} = (2, 2, 5)$.

Comenzamos parametrizando la curva, en este caso podemos usar el parámetro $t \in [0, 2\pi]$ con

$$x = \sqrt{8} \cos(t) \quad \text{e} \quad y = \sqrt{8} \sin(t), \quad \text{con lo cual resulta } x^2 + y^2 = 8, \\ \text{esto impone } z = \underbrace{2\sqrt{8} \cos(t)}_x + 1.$$

La ecuación de la curva C queda:

$$\vec{X} = \underbrace{(\sqrt{8} \cos(t), \sqrt{8} \sin(t), 2\sqrt{8} \cos(t) + 1)}_{\vec{g}(t)} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ahora debemos hallar t_0 tal que $\vec{g}(t_0) = \vec{A}$, es decir:

$$(\sqrt{8} \cos(t_0), \sqrt{8} \sin(t_0), 2\sqrt{8} \cos(t_0) + 1) = (2, 2, 5)$$

$$\text{esto impone } \begin{cases} \cos(t_0) = 2/\sqrt{8} = 1/\sqrt{2} \\ \sin(t_0) = 2/\sqrt{8} = 1/\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t_0 \leq 2\pi \Leftrightarrow t_0 = \pi/4,$$

vamos bien, hallamos un único t_0 . Con lo cual, con esta parametrización, $\vec{A}$ es punto simple.

Por su parte, $\vec{g}'(t_0) = (-\sqrt{8} \sin(t_0), \sqrt{8} \cos(t_0), -2\sqrt{8} \sin(t_0)) = (-2, 2, -4) \neq \vec{0}$. Como queda definida $\vec{g}'(t_0)$ y no es nula, $\vec{A}$ es punto regular de C .

Entonces, una ecuación de la recta r_0 tangente a C en $\vec{A}$ es:

$$\vec{X} = \underbrace{\vec{A}}_{(2,2,5)} + u \underbrace{\vec{g}'(t_0)}_{(-2,2,-4)} \rightarrow \boxed{\vec{X} = (2 - 2u, 2 + 2u, 5 - 4u) \text{ con } u \in \mathbb{R}}.$$

Para el plano normal π_0 : $\underbrace{((x, y, z) - (2, 2, 5))}_{\vec{X} - \vec{A}} \cdot \underbrace{(-2, 2, -4)}_{\vec{g}'(t_0)} = 0$. De donde, operando, obtenemos

$$\text{una ecuación cartesiana: } \boxed{-2(x - 2) + 2(y - 2) - 4(z - 5) = 0}.$$

Derivada de función de varias variables

Dada $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $n > 1$, un punto $\vec{A}$ interior a D y un vector $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$, si existe y tiene norma finita el límite que se indica,

$$f'(\vec{A}, \vec{r}) \doteq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{A} + h \vec{r}) - f(\vec{A})}{h} \text{ es la derivada de } f \text{ en } \vec{A} \text{ según } \vec{r}.$$

Cuando $\|\vec{r}\| = 1$ denotaremos $\check{r}$ (versor o vector unitario), en ese caso $f'(\vec{A}, \check{r})$ se denomina **derivada direccional** de f en $\vec{A}$ según $\check{r}$.

En particular, cuando se trabaja con uno de los versores canónicos $\check{e}_k$ con $k = 1, \dots, n$,

$$f'(\vec{A}, \check{e}_k) \equiv f'_{x_k}(\vec{A}) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{A})$$

también se la denomina **derivada parcial** de f en $\vec{A}$ respecto de la variable x_k .

De existir, calcular la derivada parcial de f en $\vec{A} = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)$ respecto de la variable x_k equivale a calcular $\varphi'(a_k)$ con $\varphi(x_k) = f(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n)$.

Es decir, derivar f respecto de x_k suponiendo las otras variables constantes. Con lo cual, para las derivadas parciales se pueden aplicar las reglas prácticas de derivación de las funciones de una variable.

Ejemplo: Dada $f(x, y) = x^2 y + \sin(xy - 2x)$, calcule $f'_x(1, 2)$ y $f'_y(1, 2)$.

Aplicando reglas prácticas de derivación:

$$f'_x(x, y) = 2xy + \cos(xy - 2x)(y - 2) \Rightarrow f'_x(1, 2) = 4.$$

$$f'_y(x, y) = x^2 + \cos(xy - 2x)x \Rightarrow f'_y(1, 2) = 1 + \cos(0) = 2.$$

Teorema: Las funciones vectoriales de una o más variables son derivables en un punto si, y sólo si, todas sus componentes son derivables en dicho punto. La derivada de la función vectorial se arma con las derivadas de cada una de sus componentes.

Ejemplos:

- Dada $f(x, y) = x^2 y + 2y$, calcule la derivada direccional de f en $\vec{A} = (1, 2)$, en la dirección que va desde $\vec{A}$ hacia $\vec{B} = (3, 7)$.

Debemos plantear el $f'(\vec{A}, \check{r}) \doteq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{A} + h \check{r}) - f(\vec{A})}{h}$, para ello comencemos obteniendo el versor y los puntos donde debemos evaluar la función.

Usamos $\check{r}$ porque se pide la derivada direccional.

Síntesis de definiciones y enunciados: S-3A, versión 1.1

El versor: $\vec{r} = \frac{\vec{B}-\vec{A}}{\|\vec{B}-\vec{A}\|}$, dado que $\vec{B}-\vec{A} = (3-1, 7-2) = (2, 5) \Rightarrow \|\vec{B}-\vec{A}\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$,
entonces $\vec{r} = \frac{(2, 5)}{\sqrt{29}}$.

Los puntos: $\vec{A} = (1, 2)$, $\vec{A} + h\vec{r} = (1 + h\frac{2}{\sqrt{29}}, 2 + h\frac{5}{\sqrt{29}})$.

El límite a analizar:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{A} + h\vec{r}) - f(\vec{A})}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2h/\sqrt{29}, 2 + 5h/\sqrt{29}) - f(1, 2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + 2h/\sqrt{29})^2 (2 + 5h/\sqrt{29}) + 2(2 + 5h/\sqrt{29}) - 6}{h} = (*) \end{aligned}$$

Se produce una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, como es límite de una variable (h) y tanto numerador como denominador son derivables, podemos aplicar L'Hospital.

Entonces:

$$(*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1 + 2h/\sqrt{29}) \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} (2 + 5h/\sqrt{29}) + (1 + 2h/\sqrt{29})^2 \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} + 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{29}}}{1} = \frac{8}{\sqrt{29}} + \frac{15}{\sqrt{29}} = \frac{23}{\sqrt{29}}$$

Dado que el límite existe y es finito, $\boxed{f'(\vec{A}, \vec{r}) = \frac{23}{\sqrt{29}}}$.

- Dada $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \operatorname{sen}(xy)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, analice si f es derivable en distintas direcciones en el origen de coordenadas.

Como no se especifica el versor, adoptamos por ejemplo $\vec{r} = (u, v)$ con $u^2 + v^2 = 1$, con lo cual podremos analizar en forma general $\forall \vec{r} \in \mathbb{R}^2$.

Los puntos son: $\vec{A} = (0, 0)$ y $\vec{A} + h\vec{r} = (0, 0) + h(u, v) = (hu, hv)$, entonces planteamos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{0} + h\vec{r}) - \overbrace{f(\vec{0})}^=0}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hu, hv)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{hu \operatorname{sen}(hu hv)}{(hu)^2 + (hv)^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u \operatorname{sen}(h^2 uv)}{h^2 \underbrace{(u^2 + v^2)}_{=1}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u \operatorname{sen}(h^2 uv)}{h^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } u \cdot v = 0 \\ (*) & \text{si } u \cdot v \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Para el caso en que $u \cdot v \neq 0$ queda:

$$(*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u \operatorname{sen}(h^2 uv)}{h^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u \cos(h^2 uv) 2huv}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u^2 v \cos(h^2 uv)}{1} = u^2 v$$

Síntesis de definiciones y enunciados: S-3A, versión 1.1

Resumiendo: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{0} + h \vec{r}) - f(\vec{0})}{h} = \begin{cases} 0 & \text{si } u \cdot v = 0 \\ u^2 v & \text{si } u \cdot v \neq 0 \end{cases}.$

Con lo cual existe el límite y es finito para todo $\vec{r} = (u, v)$. Podemos usar solamente la expresión $u^2 v$, pues también produce el resultado 0 para $u \cdot v = 0$.

Conclusión, la función es derivable en toda dirección en el origen, resultando:

$$f'((0,0), \vec{r}) = u^2 v \quad \forall \vec{r} = (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Nota: Es claro que cuando se indica $\vec{r} = (u, v)$ se trata de un versor, con lo cual $u^2 + v^2 = 1$.

Dado que en este ejemplo disponemos de la expresión de la derivada direccional para cualquier dirección, de ella -si lo necesitáramos- podríamos calcular los valores de las derivadas parciales en el origen.

$$f'_x(0,0) = f'((0,0), \underbrace{(1,0)}_{\vec{e}_1 = \vec{i}}) = 1^2 \cdot 0 = 0$$

$$f'_y(0,0) = f'((0,0), \underbrace{(0,1)}_{\vec{e}_2 = \vec{j}}) = 0^2 \cdot 1 = 0$$

Ejercicio: Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}.$

Con un procedimiento similar al del ejemplo anterior verifique que:

$$f'((0,0), \vec{r}) = \begin{cases} u^2/v & \text{si } v \neq 0 \\ 0 & \text{si } v = 0 \end{cases} \quad \forall \vec{r} = (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

también demuestre que f no es continua en $(0,0)$. Por ejemplo, acercándose al origen por parábolas del tipo $y = kx^2$.

Las funciones de 2 o más variables pueden ser derivables en un punto, incluso en toda dirección, y no ser continuas en dicho punto.

Interpretación geométrica de derivadas y otros ejemplos, se sugiere leer el texto M-3 del T.P. III, redactado por la Lic. Silvia Seminara.

Derivadas parciales sucesivas

Suponiendo que las derivadas quedan definidas, partiendo de f con variables x e y , podemos calcular f'_x y f'_y . Con estas nuevas funciones, también si son derivables, ...

- ... de f'_x obtendríamos $(f'_x)'_x \equiv f''_{xx}$ y $(f'_x)'_y \equiv f''_{xy}$
- ... de f'_y obtendríamos $(f'_y)'_x \equiv f''_{yx}$ y $(f'_y)'_y \equiv f''_{yy}$

f''_{xx} , f''_{xy} , f''_{yx} y f''_{yy} son las derivadas parciales de 2º orden de f respecto de sus variables x e y .

Veamos un ejemplo particular:

$f(x, y) = x^3 y + y^2$	$f'_x(x, y) = 3x^2 y$	$f''_{xx}(x, y) = 6xy$	podríamos seguir...
		$f''_{xy}(x, y) = 3x^2$	
	$f'_y(x, y) = x^3 + 2y$	$f''_{yx}(x, y) = 3x^2$	
		$f''_{yy}(x, y) = 2$	
función (derivada de orden 0)	derivadas parciales de 1º orden	derivadas parciales de 2º orden	...

En este ejemplo observamos que $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$, esto no siempre se cumple. Enseguida veremos las condiciones que aseguran esa igualdad (igualdad de las *derivadas cruzadas*: $\bullet_{xy}$ y $\bullet_{yx}$).

Suponiendo que existen, para una función de n variables tendremos n^k derivadas de orden k . En el caso anterior (con dos variables) vemos $2^1 = 2$ de 1º orden, $2^2 = 4$ de 2º orden, etc.

¿Cuáles son los límites que definen las derivadas de 1º orden de $f(x, y)$ en el punto $\vec{A} = (a, b)$?

- Para $f'_x(\vec{A}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{A} + h \vec{e}_1) - f(\vec{A})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$
- Para $f'_y(\vec{A}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{A} + h \vec{e}_2) - f(\vec{A})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$

Ahora, sólo para mostrar, ¿cómo definiríamos $f''_{xx}(a, b)$ y $f''_{xy}(a, b)$? Usamos las mismas expresiones, pero ahora la función que derivamos se llama f'_x . Entonces:

$$f''_{xx}(\vec{A}) \equiv (f'_x)'_x(\vec{A}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(a+h, b) - f'_x(a, b)}{h} \quad \text{y} \quad f''_{xy}(\vec{A}) \equiv (f'_x)'_y(\vec{A}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(a, b+h) - f'_x(a, b)}{h}$$

Si bien el principal objetivo no es analizar derivadas sucesivas por definición, una cosa es que no lo hagamos con frecuencia, otra muy diferente es que no sepamos de qué estamos hablando.

En las aplicaciones típicas alcanzará con calcular las derivadas sucesivas usando reglas prácticas de derivación. En este caso vale la pena saber de ante mano -si se puede- cuáles van a resultar iguales, sólo para no hacer cálculos de más.

Teorema de Schwarz: Dada $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y el punto $\vec{A} = (x_0, y_0)$ interior a D , si existen f'_x , f'_y y f''_{xy} , en un entorno de $\vec{A}$ y f''_{xy} es continua en $\vec{A}$, entonces existe $f''_{yx}(\vec{A})$ resultando $f''_{yx}(\vec{A}) = f''_{xy}(\vec{A})$.

Este teorema es muy útil desde el punto de vista teórico, pero carece de utilidad práctica. Si tenemos que analizar el cumplimiento de todas esas hipótesis para asegurar la igualdad de las derivadas cruzadas, es preferible calcularlas por separado y resultará lo que resulte (pueden o no existir y, si existen, pueden o no ser iguales).

Sin embargo, el teorema permite demostrar criterios más prácticos.

Para función de dos variables es muy práctico decir que si $f \in C^2(E(\vec{A}))$, entonces $f''_{yx}(\vec{A}) = f''_{xy}(\vec{A})$.

Donde $f \in C^2(E(\vec{A}))$ cuando f tiene derivadas parciales de 2º orden continuas en un $E(\vec{A})$.

En el ejemplo inicial f era polinómica, sus derivadas sucesivas también son polinómicas. Entonces las derivadas de 2º orden son continuas (por ser polinómicas) y se obtuvo que $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Conviene incluso enunciar el siguiente criterio, muy práctico a la hora de calcular, que contempla los casos de funciones de 2 o más variables y derivadas sucesivas de 2º orden o más.

Si $f \in C^k(E(\vec{A}))$ los valores de las derivadas sucesivas de f en $\vec{A}$, hasta el orden k inclusive, sólo dependen de cuántas veces se deriva respecto de cada variable pero no dependen del orden en que se toman las variables para realizar las derivadas.

Ahora se pide derivadas parciales continuas de orden k en un entorno de $\vec{A}$.

Ejemplo: Sea $f(x, y, z) = x^2 \sin(2x + z^3)$ definida en $\mathbb{R}^3$.

Es claro que f es continua porque su expresión es producto de funciones continuas, polinomio (x^2) multiplicado por composición de polinomio ($2x + z^3$) con trigonométrica (seno).

Las derivadas parciales sucesivas, por razones similares, también van a resultar continuas.

Entonces: $f''_{xy} = f''_{yx}$, $f''_{xz} = f''_{zx}$ y $f''_{yz} = f''_{zy}$ en todo punto.

También: $f_{xyz} = f_{xzy} = f_{yxz} = f_{zyx} = f_{yzx} = f_{zyx}$ en todo punto.

A veces no se ponen las primas (f'''), si como subíndice figuran 3 variables es de 3º orden.

También: $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ en todo punto.

También: $f_{xxyz} = f_{yxxz} = \dots$ en todo punto, hay 60 derivadas de este tipo, note que en todas deben figurar “tres x”, “dos y”, “una z”, sólo que en distinta posición (orden).

*Luego de este ejemplo, para reforzar su interpretación,
le sugerimos leer nuevamente la propiedad recuadrada más arriba.*

LOS TEMAS CORRESPONDIENTES AL T.P. III SE COMPLETAN EN LA SÍNTESIS S3-B