Esta síntesis <u>no es un apunte</u> de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

Continuación de la Síntesis S-3A

Conceptos previos (*para recordar*)

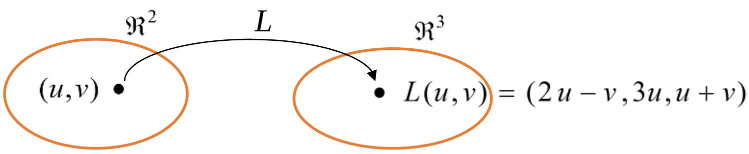
Dada la función $L:\Re^n \to \Re^m$, se dice que L es una transformación lineal cuando se cumplen las siguientes dos propiedades:

1. $L(k\,X) = k\,L(X) \quad \forall\ k \in \Re,\ \forall\ X \in \Re^n$.
2. $L(X+Y) = L(X) + L(Y) \quad \forall\ X, Y \in \Re^n$.

En forma equivalente, puede definirse que L es una transformación lineal cuando se cumple que $L(a\,X + b\,Y) = a\,L(X) + b\,L(Y)\ \ \forall a,b \in \Re,\ \forall\ X, Y \in \Re^n$.

Toda transformación lineal tiene una matriz constante M asociada tal que, en forma matricial, puede expresarse $L(X) = M\ X$.

<u>Ejemplo</u>: $L:\Re^2 \to \Re^3\ /\ L(u,v) = (L_1(u,v),\, L_2(u,v),\, L_3(u,v))$



Expresando cada vector como una matriz columna, el formato matricial es:

$$\begin{pmatrix} L_1(u,v) \\ L_2(u,v) \\ L_3(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u-v \\ 3u \\ u+v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dado que la matriz M es constante, las componentes de $L(u,v)$ sólo pueden ser combinaciones lineales de las variables.

Es decir, las expresiones siempre serán del tipo "combinación lineal de variables". Salvo para una variable que necesariamente será "constante$\cdot$variable".

<u>Ejemplos</u>:

- $L:\Re^2 \to \Re\ /\ L(x,y) = 5x + 2y$.
- $L:\Re \to \Re\ /\ L(x) = 4x$.
- $L:\Re \to \Re^2\ /\ L(u) = (5u, u)$.

<u>Ejercicio</u>: Exprese en forma matricial las transformaciones lineales de los últimos tres ejemplos.

DIFERENCIABILIDAD

Sea $f : D \subset \Re^n \to \Re^m$. Se dice que f es **diferenciable** en un punto A interior a su dominio, cuando para todo $A + H$ perteneciente a un entorno de A se puede expresar:

$$\boxed{f(A+H) = f(A) + L(H) + \| H \| \, \mu(H), \text{ con } L \text{ transformación lineal y } \lim_{H \to 0} \mu(H) = 0} \qquad (1)$$

Análogamente, despejando $\mu(H)$ de la anterior, f es diferenciable en A cuando:

$$\boxed{\lim_{H \to 0} \frac{f(A+H) - f(A) - L(H)}{\|H\|} = 0, \text{ con } L \text{ transformación lineal}} \qquad (2)$$

Dado que un límite es nulo si, y sólo si, el límite de su norma es nulo, también puede indicarse que f es diferenciable en A cuando:

$$\boxed{\lim_{H \to 0} \frac{\| f(A+H) - f(A) - L(H) \|}{\|H\|} = 0, \text{ con } L \text{ transformación lineal}} \qquad (3)$$

(1), (2) y (3) son formas equivalentes de expresar la condición de diferenciabilidad.

Observe que A, H y $A + H$ son puntos de un $E(A) \subset D$, mientras que $f(A), f(A+H), L(H)$ y $\mu(H)$ son puntos de $\Re^m$. Entonces $L : \Re^n \to \Re^m$.

<u>Teorema</u>: Una función vectorial es diferenciable en un punto si, y sólo si, sus componentes son diferenciables en dicho punto.

<u>Teorema</u>: Si f es diferenciable en el punto A, entonces f es continua A.

<u>Teorema</u>: Si f es diferenciable en el punto A, entonces f es derivable en A.
Esto significa que:

- Cuando f es función de una variable, queda definida $f'(A)$, siendo $f'(A) = L(1)$. (4)
- Cuando f es un campo, queda definida $f'(\vec{A}, \vec{r})$, siendo $f'(\vec{A}, \vec{r}) = L(\vec{r}) \;\; \forall \vec{r} \in \Re^n$. (5)

Esquemáticamente,

diferenciabilidad $\Rightarrow$ continuidad
diferenciabilidad $\Rightarrow$ derivabilidad

Las funciones diferenciables son continuas y derivables

Sólo <u>las funciones derivables **de una variable**</u>, también son diferenciables

Las de <u>varias variables, aun siendo continuas y derivables, pueden **no ser diferenciables**</u>

<u>Teorema</u>: Sea $f : D \subset \Re^n \to \Re^m$ con $n > 1$, si $f \in C^1(E(\vec{A}))$ entonces f es diferenciable en $\vec{A}$.

Las funciones de varias variables que tienen derivadas parciales de 1º orden continuas en el entorno de un punto, son diferenciables en dicho punto.

Ejercicios: Calcule las derivadas parciales de 1º orden y justifique que siendo …

- … $f(x,y) = x^2 + 3xy$, f es diferenciable en $\Re^2$.
- … $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 + 2x + y)$, f es diferenciable en $\Re^2$.
- … $f(x,y,z) = 2ze^{\operatorname{sen}(xy)}$, f es diferenciable en $\Re^3$.
- … $f(u,v) = \ln(v - u^2)$, f es diferenciable en su dominio natural.

Consecuencias:

Cuando $f : D \subset \Re^n \to \Re^m$ es diferenciable en un punto *A*, la transformación lineal *L* tiene una matriz asociada que denotaremos $Df(A) \in \Re^{m\times n}$ y se denomina **matriz jacobiana** de f en el punto *A*.

- Si $n > 1$ y $m > 1$, campo vectorial, $D\vec{f}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{A}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{A}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{A}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{A}) \end{pmatrix}$
- Si $n > 1$ y $m = 1$, campo escalar, $Df(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{A}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{A}) \end{pmatrix}$
- Si $n = 1$ y $m > 1$, función vectorial de una variable, $D\vec{f}(A) = \begin{pmatrix} f_1'(A) \\ \vdots \\ f_m'(A) \end{pmatrix}$
- Si $n = 1$ y $m = 1$, función escalar de una variable, $Df(A) = \big(f'(A)\big)$

El uso de $Df(A)$ es importante cuando se trabaja con funciones de varias variables (campos).

Ejemplos:

- Sea $\vec{f}(u,v) = (u^2 v,\, 2u + 3v,\, 2v^3)$ definida $\forall (u,v) \in \Re^2$.

  Su matriz jacobiana es $D\vec{f}(u,v) = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 6v^2 \end{pmatrix}$ $\forall (u,v) \in \Re^2$.

  En la primera fila de la matriz figuran las derivadas de la primera componente de $\vec{f}$, tomadas –de izquierda a derecha– en el orden que se indican las variables como argumento de la función, es decir, primero respecto de *u* y luego de *v*.
  Lo mismo se repite para las siguientes filas, 2º fila para 2º componente, etc.
  En este caso vemos que todos los elementos de la matriz son funciones continuas, en ese caso se dice que "$D\vec{f}$ es continua".

- Sea $f(x,y) = x\operatorname{sen}(y)$ definida en $\Re^2$.
  Entonces $Df(x,y) = (\operatorname{sen}(y)\ \ x\cos(y))$ en $\Re^2$, ahora la matriz tiene una sola fila y también es una matriz continua.

$$\boxed{D\vec{f} \text{ continua en un conjunto } H \text{ es equivalente a } \vec{f} \in C^1(H) \;\Rightarrow\; \vec{f} \text{ diferenciable en } H}$$

Caso de campo escalar diferenciable

Un campo escalar $f : D \subset \Re^n \to \Re$ con $n > 1$ diferenciable en $\vec{A}$ tiene derivada en $\vec{A}$ respecto de cualquier vector $\vec{r} \in \Re^n$ que, aplicando (5), dado que f es escalar resulta:

$$\left(f'(\vec{A},\vec{r})\right) = \left(L(\vec{r})\right) = Df(\vec{A})\left(\vec{r}\right) = \left(f'_{x_1}(\vec{A}) \ \cdots \ f'_{x_n}(\vec{A})\right)\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \left(f'_{x_1}(\vec{A})\, r_1 + \cdots + f'_{x_n}(\vec{A})\, r_n\right)$$

Es decir:

$$f'(\vec{A},\vec{r}) = L(\vec{r}) = f'_{x_1}(\vec{A})\, r_1 + \cdots + f'_{x_n}(\vec{A})\, r_n = \underbrace{(f'_{x_1}(\vec{A}), \cdots, f'_{x_n}(\vec{A}))}_{\nabla f(\vec{A})} \cdot \underbrace{(r_1, \cdots, r_n)}_{\vec{r}},$$

donde $\boxed{\nabla f(\vec{A}) = (f'_{x_1}(\vec{A}), \cdots, f'_{x_n}(\vec{A}))\ \text{se denomina } \textbf{gradiente} \text{ de } f \text{ en } \vec{A}}$.

En síntesis, siendo $f : D \subset \Re^n \to \Re$ con $n > 1$ diferenciable en $\vec{A}$,

$$\boxed{f'(\vec{A},\vec{r}) = \nabla f(\vec{A}) \cdot \vec{r} \ \text{ para todo } \vec{r} \in \Re^n} \qquad (6)$$

Esta es la fórmula práctica de cálculo de la derivada de un campo escalar respecto de un vector.

Para el caso que se calcule la derivada direccional de una función diferenciable, de (6) usando versor, se tiene que:

$$\boxed{f'(\vec{A},\breve{r}) = \nabla f(\vec{A}) \cdot \breve{r}}\ ,\ \forall \breve{r} \in \Re^n \qquad (7)$$

Entonces: $$|f'(\vec{A},\breve{r})| \le \|\nabla f(\vec{A})\|\, \underbrace{\|\breve{r}\|}_{=1} \quad (\textit{desigualdad de Cauchy-Schwarz})$$

$$|f'(\vec{A},\breve{r})| \le \|\nabla f(\vec{A})\| \quad \Rightarrow \quad -\|\nabla f(\vec{A})\| \le f'(\vec{A},\breve{r}) \le \|\nabla f(\vec{A})\|.$$

Cuando $\nabla f(\vec{A}) \ne \vec{0}$, la máxima derivada direccional es:

$$\boxed{f'(\vec{A},\breve{r}_{\text{máx}}) = \|\nabla f(\vec{A})\| \ \text{ con } \breve{r}_{\text{máx}} = \frac{\nabla f(\vec{A})}{\|\nabla f(\vec{A})\|}}\ , \qquad (8)$$

mientras que la mínima derivada direccional es:

$$\boxed{f'(\vec{A},\breve{r}_{\text{mín}}) = -\|\nabla f(\vec{A})\| \ \text{ con } \breve{r}_{\text{mín}} = -\breve{r}_{\text{máx}}}. \qquad (9)$$

Por otra parte, se $\boxed{\text{obtiene derivada direccional nula para todo } \breve{r} \perp \nabla f(\vec{A})}$. (10)

Las direcciones (versores) de máxima, mínima y nula se pueden verificar aplicando (7).

También de (7) se deduce que $\boxed{\text{si } \nabla f(\vec{A}) = \vec{0},\ \ f'(\vec{A},\breve{r}) = 0 \ \ \forall \breve{r} \in \Re^n}$.

<u>Ejemplo</u>: Dada $f(x,y)=x^2y+y^2$ definida en $\Re^2$, determine las direcciones de derivadas direccionales máxima, mínima y nula en el punto $\vec{A}=(1,2)$ y calcule los valores de dichas derivadas.

Vemos que $\nabla f(x,y)=(2xy,\, x^2+2y)$ tiene componentes continuas (polinómicas) con lo cual $f\in C^1(\Re^2)$.
Entonces f es diferenciable en todo punto, en particular en $\vec{A}$.

Podemos aplicar la regla práctica: $f'(\vec{A},\breve{r})=\nabla f(\vec{A})\cdot\breve{r}\quad \forall \breve{r}\in\Re^2$

En este caso $\nabla f(\vec{A})=\nabla f(1,2)=(4,5) \;\Rightarrow\; \|\nabla f(\vec{A})\|=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$.

$$\breve{r}_{\text{máx}}=\frac{\nabla f(\vec{A})}{\|\nabla f(\vec{A})\|}=\frac{(4,5)}{\sqrt{41}}$$

Con esto obtenemos:

<u>Derivada direccional máxima</u>: $\boxed{\text{dirección } \breve{r}_{\text{máx}}=\frac{(4,5)}{\sqrt{41}}\text{, valor: } f'(\vec{A},\breve{r}_{\text{máx}})=\nabla f(\vec{A})\cdot\breve{r}_{\text{máx}}=\sqrt{41}}$.

<u>Derivada direccional mínima</u>: $\boxed{\text{dirección } \breve{r}_{\text{mín}}=-\frac{(4,5)}{\sqrt{41}}\text{, valor: } f'(\vec{A},\breve{r}_{\text{mín}})=\nabla f(\vec{A})\cdot\breve{r}_{\text{mín}}=-\sqrt{41}}$.

<u>Derivada direccional nula</u>:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{direcciones } \breve{r}_{\text{nula}_1}=\frac{(-5,4)}{\sqrt{41}},\ \breve{r}_{\text{nula}_2}=\frac{(5,-4)}{\sqrt{41}},\\ \text{valor: } f'(\vec{A},\breve{r}_{\text{nula}_1})=\nabla f(\vec{A})\cdot\breve{r}_{\text{nula}_1}=0\ ,\ f'(\vec{A},\breve{r}_{\text{nula}_2})=\nabla f(\vec{A})\cdot\breve{r}_{\text{nula}_2}=0\end{array}}$$

<u>Ejercicio</u>: Dada $f(x,y)=x^2\,y+2\,y$, calcule la derivada direccional de f en $\vec{A}=(1,2)$, en la dirección que va desde $\vec{A}$ hacia $\vec{B}=(3,7)$.
Compare el resultado con el obtenido en S-3A pág. 9/13 y 10/13, donde el mismo ejercicio está resuelto aplicando la definición de derivada direccional.

<u>Ejercicio</u>: Sea $f\in C^1(\Re^2)$, tal que $f'(\vec{A},\,(2,3))=1$ y $f'(\vec{A},\,(4,5))=5$. Calcule la derivada direccional de f en $\vec{A}$, en la dirección que va hacia el punto $\vec{B}=\vec{A}+(4,3)$.

Ayuda: Dadas las dos derivadas respecto de vector que se indican, se puede calcular el $\nabla f(\vec{A})$.

Repuesta: $f'(\vec{A},\breve{r})=11/5$.

Conceptos adicionales sobre superficies

Sea Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = \vec{F}(u,v)$ con $(u,v) \in D$ [(1)], interesa definir los siguientes conceptos.

- Un punto $\vec{A} = \vec{F}(u_0,v_0) \in \Sigma$ es **punto regular** de la superficie cuando $\vec{F}$ es diferenciable en (u_0,v_0) y $\vec{n}_0 = \vec{F}'_u(u_0,v_0) \times \vec{F}'_v(u_0,v_0) \neq \vec{0}$. *Una superficie es regular cuando todos sus puntos lo son.*

- Un punto $\vec{A} \in \Sigma$ es **punto simple** de la superficie cuando, a través de $\vec{F}$, es imagen de un único $(u_0,v_0) \in D$. *Una superficie es simple cuando todos sus puntos lo son.*

Plano tangente y recta normal a una superficie

Sea Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = \vec{F}(u,v)$ con $(u,v) \in D$, en todo punto $\vec{A} = \vec{F}(u_0,v_0)$ simple y regular de Σ, la superficie admite plano tangente π_0 y recta normal n_0.

La recta normal pasa por $\vec{A}$ y está dirigida por $\vec{n}_0 = \vec{F}'_u(u_0,v_0) \times \vec{F}'_v(u_0,v_0)$, una ecuación para ella es:

$$\textit{recta normal} \text{ a } \Sigma \text{ en } \vec{A}: \quad \boxed{\vec{X} = \vec{A} + t\,\vec{n}_0 \ \text{ con } t \in \Re} \tag{11}$$

El plano tangente en $\vec{A}$ es perpendicular a la recta normal en dicho punto, una ecuación cartesiana es:

$$\textit{plano tangente} \text{ a } \Sigma \text{ en } \vec{A}: \quad \boxed{(\vec{X} - \vec{A}) \cdot \vec{n}_0 = 0} \quad \textit{ecuación cartesiana} \tag{12}$$

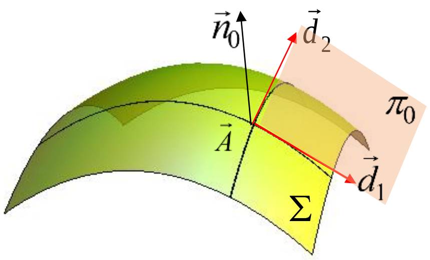
El esquema de la derecha muestra a Σ en el espacio de puntos $\vec{X} = (x,y,z)$ y las líneas coordenadas[(2)] de Σ que pasan por $\vec{A}$.

$$C_{v_0} \ : \ \vec{X} = \vec{F}(u,v_0) \ \text{ con } (u,v_0) \in D$$

que admite recta tangente en $\vec{A}$ dirigida por $\vec{d}_1 = \vec{F}'_u(u_0,v_0)$ y

$$C_{u_0} \ : \ \vec{X} = \vec{F}(u_0,v) \ \text{ con } (u_0,v) \in D$$

que admite recta tangente en $\vec{A}$ dirigida por $\vec{d}_2 = \vec{F}'_v(u_0,v_0)$.



Dado que $\vec{A}$ es punto regular de Σ, los vectores $\vec{d}_1$ y $\vec{d}_2$ quedan definidos y son l.i. ($\vec{n}_0 = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 \neq \vec{0}$). El vector $\vec{n}_0$ es perpendicular a ambos y también a ambas líneas coordenadas que están en Σ.

De esto surgen las ecuaciones (11) y (12). Podemos escribir una ecuación vectorial para el plano tangente en $\vec{A}$ mediante la combinación lineal de $\vec{d}_1$ y $\vec{d}_2$, por ejemplo, usando *a* y *b* como parámetros, resulta:

$$\textit{plano tangente} \text{ a } \Sigma \text{ en } \vec{A}: \quad \boxed{\vec{X} = \vec{A} + a\,\vec{d}_1 + b\,\vec{d}_2 \ \text{ con } (a,b) \in \Re^2} \quad \textit{ecuación vectorial} \tag{13}$$

Se puede demostrar que para toda línea $C \subset \Sigma$ que admite recta tangente r_C en $\vec{A}$, $\vec{n}_0$ es perpendicular a r_C. Por lo tanto, r_C está incluida en el plano tangente a Σ en $\vec{A}$.

[(1)] El concepto de superficie está definido en la síntesis S-2 pág. 8/9, recuerde que $\vec{F}$ es continua en *D* conexo.
[(2)] Las líneas coordenadas se definieron en S-2, pág. 8/9, con ejemplo en pág. 9/9.

Ejemplo: Sea Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = (u\,v^2, u+v, 2u-v)$ con $(u,v) \in \Re^2$.

a) Verifique que quedan definidos la recta normal y el plano tangente a Σ en $\vec{A} = (12,5,4)$ y halle sus ecuaciones.
b) Analice si la recta normal interseca en algún punto al plano de ecuación $x+y+z=4$.
c) Analice si la curva de ecuación $\vec{X} = (\lambda^2, \lambda, 5\lambda - 9)$ con $\lambda \in \Re$ tiene algún punto en común con el plano tangente.

a) Denotando $\vec{F}(u,v) = (u\,v^2, u+v, 2u-v)$, comenzamos por hallar (u_0,v_0) tal que

$$\vec{F}(u_0,v_0) = \vec{A} \;\Leftrightarrow\; (u_0\,v_0^2, u_0+v_0, 2u_0-v_0) = (12,5,4) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} u_0\,v_0^2 = 12 & (\alpha) \\ u_0 + v_0 = 5 & (\beta) \\ 2u_0 - v_0 = 4 & (\gamma) \end{cases}$$

De $(\beta)+(\gamma) \to 3u_0 = 9 \to u_0 = 3 \xrightarrow{(\beta)} v_0 = 2$. Con estos valores también se cumple (α).

Obtuvimos un único $(u_0,v_0) = (3,2)$, tal que $\vec{F}(u_0,v_0) = \vec{A}$, por lo tanto $\vec{A}$ es punto simple de la superficie.

Como las componentes de $\vec{F}$ son polinómicas, $\vec{F}$ es diferenciable en todo punto, en particular en $\vec{A}$, además,

$$\vec{n}_0 = \vec{F}_u'(u_0,v_0) \times \vec{F}_v'(u_0,v_0) = \left.\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ v^2 & 1 & 2 \\ 2uv & 1 & -1 \end{vmatrix}\right|_{(3,2)} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 4 & 1 & 2 \\ 12 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 28, -8) \neq \vec{0}.$$

Con esto verificamos que $\vec{A}$ es punto regular de Σ. Como $\vec{A}$ es simple y regular, concluimos que la superficie admite recta normal y plano tangente en dicho punto.
Aplicando las expresiones (11) y (12) obtenemos:

Recta normal: $\vec{X} = \vec{A} + t\,\vec{n}_0 = (12,5,4) + t\,(-3,28,-8) \to \boxed{\vec{X} = (12-3t,\, 5+28t,\, 4-8t),\ t \in \Re}$

Plano tangente: $(\underbrace{(x,y,z)}_{\vec{X}} - \underbrace{(12,5,4)}_{\vec{A}}) \cdot \underbrace{(-3,28,-8)}_{\vec{n}_0} = 0 \to \boxed{-3(x-12) + 28(y-5) - 8(z-4) = 0}$

b) La recta interseca al plano dado si sus puntos cumplen con la ecuación del plano, es decir:

$$(12-3t) + (5+28t) + (4-8t) = 4 \;\to\; t = -1$$

Como existe valor de t que cumple, existe punto. Lo hallamos reemplazando $t=-1$ en la ecuación de la recta. Con esto se obtiene el punto $\boxed{(15,-23,12)}$ que pertenece a ambos.

c) La curva intersecará al plano tangente si alguno de sus puntos cumple con la ecuación del plano, es decir:

$$-3(\lambda^2 - 12) + 28(\lambda - 5) - 8(5\lambda - 9 - 4) = 0 \;\to\; 3\lambda^2 + 12\lambda = 0 \to \lambda = 0 \;\vee\; \lambda = -4$$

Como se cumple para dos valores de λ, existen dos puntos de intersección, que los obtenemos reemplazando esos valores de λ en la ecuación de la curva dato.

Los puntos que resultan son: $\boxed{(0,0,-9) \text{ y } (16,-4,-29)}$.

Caso particular

Consideremos una función escalar de dos variables f, diferenciable y definida en un conjunto D abierto y conexo. La ecuación cartesiana de su gráfica es:

$$z = f(x,y) \text{ con } (x,y) \in D$$

y admite la ecuación vectorial:

$$\vec{X} = \underbrace{(x, y, f(x,y))}_{\vec{F}(x,y)} \text{ con } (x,y) \in D.$$

Es claro que esta es la ecuación de una superficie Σ, que todos sus puntos son simples por construcción (cada punto se corresponde con un único (x,y) de D) y $\vec{F}$ es diferenciable por serlo sus componentes.

Por su parte $\vec{n} = \vec{F}'_x(x,y) \times \vec{F}'_y(x,y) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x,y) \\ 0 & 1 & f'_y(x,y) \end{vmatrix} = (-f'_x(x,y), -f'_y(x,y), 1) \neq \vec{0}$.

Con esto podemos decir que la gráfica de f es una superficie que admite plano tangente y recta normal en todos sus puntos.

Interesa, en particular, la ecuación cartesiana del plano tangente en un punto $\vec{A} = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ de la gráfica de f. Aplicando (12) resulta:

$$((x,y,z) - (x_0, y_0, f(x_0,y_0)) \cdot (-f'_x(x_0,y_0), -f'_y(x_0,y_0), 1) = 0,$$

de donde, operando y despejando z se obtiene:

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\,(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)\,(y - y_0)} \tag{14}$$

Ejemplo: Halle la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z = 2x^2 + y^3$ con $(x,y) \in \Re^2$, en el punto $\vec{A} = (1,2,z_0)$ de la misma.

Dado que $2x^2 + y^3$ es una expresión polinómica, es diferenciable.

El valor de $z_0 = 2x_0^2 + y_0^3 = 2\,1^2 + 2^3 = 10$, de donde $\vec{A} = (1,2,10)$.

Denotando $f(x,y) = 2x^2 + y^3 \rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y) = 4x \\ f'_y(x,y) = 3y^2 \end{cases}$.

Dado que $(x_0, y_0) = (1,2)$, resultan:

$$f(1,2) = z_0 = 10,\quad f'_x(1,2) = 4,\quad f'_y(1,2) = 12$$

Entonces, aplicando (14) obtenemos:

$$\boxed{z = 10 + 4(x-1) + 12(y-2)},$$

que es la ecuación pedida.

Ejercicio: Halle la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $y = 4x^2$ en el punto (1,4,6) de la misma.

Respuesta: $y = 8x - 4$.

Aproximación lineal: "únicamente para funciones escalares"

Dada $f : D \subset \Re^n \to \Re$ diferenciable en *A*, entonces según (1),

$$f(A+H) = f(A) + L(H) + \|H\|\,\mu(H), \text{ con } L \text{ transformación lineal y } \lim_{H\to 0} \mu(H) = 0$$

para todo $A+H$ en un $E(A)$.

Considerando puntos "$A+H$ muy próximos a *A*", o sea "*H* cercano a 0", es claro que el término $\|H\|\mu(H)$ se hace cada vez más pequeño. Además de estar multiplicado por $\|H\|$, $\mu(H) \xrightarrow[H\to 0]{} 0$.

Si aceptamos despreciar el valor de $\|H\|\mu(H)$, de la expresión anterior surge que:

$$f(A+H) \cong f(A) + L(H) \quad \text{cuando "}H\text{ es cercano a } 0\text{".}$$

En esta última expresión conviene denotar $X = A+H$ con lo cual $H = X - A$ y, reemplazando queda:

$$f(X) \cong f(A) + L(X-A) \quad \text{cuando "}X\text{ es cercano a }A\text{",}$$

para que "$H = X - A$ resulte cercano a 0". Se acostumbra indicar:

$$\begin{matrix} \textit{forma general de} \\ \textit{aproximación lineal} \end{matrix} \qquad f(X) \cong f(A) + L(X-A)\ ,\ X \in E(A) \qquad (15)$$

donde, si bien un entorno no tiene que ser pequeño, en este contexto $X \in E(A)$ se interpreta que X es cercano a A. Cuanto más cercano, mejor es la aproximación.

Caso de* 1 *variable

En esta situación, $L(X-A) = (X-A)\,L(1) \overset{\text{por (4)}}{=} (X-A)\,f'(A)$, con lo cual, reemplazando en (15) se tiene:

$$f(X) \cong f(A) + f'(A)\,(X-A)\ ,\ X \in E(A)$$

que es la expresión de aproximación por Taylor de 1º orden, para funciones de una variable. La cual se verá más conocida si reemplazamos *X* por x y A por x_0, es decir:

$$\begin{matrix} \textit{aproximación lineal} \\ \text{función de 1 variable} \end{matrix} \qquad \boxed{f(x) \cong \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)}_{r(x)}\ ,\ x \in E(x_0)} \qquad (16)$$

Donde $y = r(x)$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$.

***Caso de varias variables* (*campo escalar*)**

Ahora por (6) y texto asociado, como $L(\vec{X} - \vec{A}) = f'(\vec{A}, \vec{X} - \vec{A}) = \nabla f(\vec{A}) \cdot (\vec{X} - \vec{A})$, de (15) se obtiene que:

$$\begin{matrix} \textit{aproximación lineal} \\ \textit{campo escalar} \end{matrix} \qquad \boxed{f(\vec{X}) \cong f(\vec{A}) + \nabla f(\vec{A}) \cdot (\vec{X} - \vec{A}),\ \ \vec{X} \in E(\vec{A})} \qquad (17)$$

Un caso particular es para $f(x,y)$, con $\vec{X} = (x,y)$ y $\vec{A} = (x_0, y_0)$, reemplazando en (17) se obtiene:

$$f(x,y) \cong \underbrace{f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)}_{p(x,y)}\ ,\ \ (x,y) \in E((x_0,y_0)) \qquad (18)$$

Donde $z = p(x,y)$ es la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

<u>Ejemplo</u>: Dada $f(x,y) = x^2 e^{4x+y-6}$, calcule aproximadamente $f(1.02,1.99)$ mediante una aproximación lineal.

Comenzamos eligiendo el punto $\vec{A} = (1,2)$ del cual $(1.02,1.99)$ "es cercano".

Calculando $\nabla f(x,y) = (2xe^{4x+y-6} + 4x^2 e^{4x+y-6},\, x^2 e^{4x+y-6})$. Como resulta continuo, la función es diferenciable en particular en $\vec{A}$.

Evaluamos $f(\vec{A}) = 1$ y $\nabla f(\vec{A}) = (6,1)$. Como la función es de dos variables, aplicamos la expresión (18) de aproximación lineal

$$f(x,y) \cong f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\,(y-y_0).$$

donde reemplazamos por los valores correspondientes a este caso, es decir,

$$f(x,y) \cong \underbrace{f(1,2)}_{1} + \underbrace{f'_x(1,2)}_{6}\,(x-1) + \underbrace{f'_y(1,2)}_{1}\,(y-2),$$

con lo cual queda:

$$f(x,y) \cong 1 + 6\,(x-1) + (y-2) \text{ , con } (x,y) \in E(\vec{A}).$$

Por último, evaluamos en el punto de interés:

$$f(1.02,1.99) \cong 1 + 6\,\underbrace{(1.02-1)}_{0.02} + \underbrace{(1.99-2)}_{-0.01} = 1.11$$

Respuesta: $\boxed{f(1.02,1.99) \cong 1.11}$.

Comentario final

¿Cuál es el error que cometemos al hacer una aproximación lineal? Observando la definición de diferenciabilidad según la forma (3),

$$\lim_{H\to 0} \frac{\| f(A+H) - f(A) - L(H)\|}{\|H\|} = 0 \text{, con } L \text{ transformación lineal,}$$

tratándose de una función escalar tendremos:

$\Delta f = f(A+H) - f(A)$ es el incremento de f

$L(H) = df(A,H)$ se denomina diferencial total de f

En el numerador la norma ($\|\bullet\|$) es el valor absoluto ($|\bullet|$)

Reemplazando queda $\lim_{H\to 0} \frac{|\Delta f - df(A,H)|}{\|H\|} = 0$. Como el límite resulta 0 y el denominador tiende a 0, el numerador es un infinitésimo respecto del denominador.

Es común decir que el numerador "tiende a 0 más rápido que el denominador", o bien que la distancia entre Δf y $df(A,H)$ se mantiene menor que la distancia $\|H\|$ entre $A+H$ y H con $\|H\|$ "cercana a 0".

Aceptando que $\Delta f \cong df(A,H) \to f(A+H) \cong f(A) + df(A,H)$, de donde sigue –según el caso– la obtención de las expresiones (16) y (17).