

UNA FUNCIÓN DIFERENCIABLE QUE NO ES DE CLASE C^1

Como ejemplo de una función diferenciable que no es de clase C^1 vamos a considerar a la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la expresión:

$$F(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Haremos un análisis completo, incluyendo continuidad.

CONTINUIDAD

Fuera del origen, la continuidad se desprende de la expresión de la función. El argumento del seno es un cociente cuyo denominador no se anula, y luego el término con la función trigonométrica es una función continua. Fuera del origen entonces nuestra función F es continua ya que es producto de la función recién analizada y el polinomio $x^2 + y^2$.

Para verificar la continuidad en el origen, debemos verificar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y) = F(0, 0) = 0.$$

Pero esto se deduce inmediatamente de la forma de la función F ; el polinomio $x^2 + y^2$ tiende a 0 y el término restante es una función acotada.

DERIVADAS PARCIALES

El análisis de las derivadas parciales es necesario para lo que haremos luego. En vista de la simetría que presenta F solo será necesario hacer este análisis para una de las variables, ya que los cálculos para la otra serán idénticos, intercambiando las variables donde haga falta hacerlo.

Nuevamente comencemos analizando fuera del origen; calculemos la derivada respecto de x en un punto arbitrario $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \frac{(-2x)}{(x^2+y^2)^2} \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \\ &= 2x_0 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_0^2+y_0^2}\right) - \frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2} \cos\left(\frac{1}{x_0^2+y_0^2}\right).\end{aligned}\tag{1}$$

Para hallar dicha derivada en el origen tenemos que recurrir a la definición:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h, 0) - F(0, 0)}{h} \\ &= \frac{h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

ya que la expresión está compuesta por una función que tiende a cero multiplicada por otra función que está acotada. La misma cuenta sirve para la derivada respecto de y . Luego

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0.\tag{2}$$

DIFERENCIABILIDAD

Para verificar la diferenciabilidad en el origen, debemos verificar que el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| F(x,y) - F(0,0) - A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|}{\|(x,y)\|}\tag{3}$$

es igual a cero, donde A es la matrix (vector fila en este caso) dada por

$$A = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \right) = (0, 0).$$

Haciendo los reemplazos necesarios, la expresión (3) se transforma en

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{x^2 + y^2}$ llegamos a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0$$

ya que nuevamente tenemos una función que tiende a cero por otra acotada. Luego, la función F es diferenciable en el origen.

LAS DERIVADAS NO SON CONTINUAS

Para verificar que la función no es de clase C^1 , las derivadas parciales no deberían ser continuas. Veamos que efectivamente este es el caso cuando miramos el origen.

Tenemos que comprobar entonces que alguna de las derivadas parciales no es continua en el origen. Vamos a enfocarnos en la derivada respecto de x (las cuentas para la derivada respecto de y son iguales, intercambiando las variables).

Llamemos $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a la función derivada respecto de x , es decir $\delta(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$. De (1) y (2) tenemos entonces que

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Veamos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \delta(x, y)$ no existe (para ser continua, debería existir y ser cero).

Por simplicidad, vamos a escribir a la rama de δ definida fuera del origen como $\delta = \delta_1 - \delta_2$, donde

$$\begin{aligned} \delta_1(x, y) &= 2x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) \\ \delta_2(x, y) &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right). \end{aligned}$$

Para δ_1 no hay problema; nuevamente la propiedad del «cero por acotado» nos da

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \delta_1(x,y) = 0.$$

La situación es completamente diferente para δ_2 .

Tengamos en cuenta primero que lo único que aseguraría la continuidad es que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \delta_2(x,y) = 0$. Cualquier otro resultado resultaría en la no continuidad de δ .

Consideremos primero la función $\frac{2x}{x^2+y^2}$; acercándonos al origen por trayectorias del tipo $y = mx$, obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(1 + m^2)x}.$$

Este límite claramente no existe (es $+\infty$ o $-\infty$ según nos acerquemos por derecha o izquierda al origen). Pero la función δ_2 tiene otro término, para el cual este análisis no termina de ser concluyente por el comportamiento de la función trigonométrica.

Podemos hacer una simplificación que también contemple el término con el coseno. Para eso, vamos a acercarnos al origen por el eje x ; es decir, consideramos $y = 0$. Para el eje x , en lugar de considerar una trayectoria continua, vamos a acercarnos al cero por medio de una sucesión; las conclusiones son también válidas y esto además nos permitirá lidiar más fácilmente con el término de la función trigonométrica.

Consideramos entonces la sucesión $x_k = \frac{1}{\sqrt{2k\pi}}$, donde $k \in \mathbb{N}$. Nos acercamos entonces al origen por medio de los puntos $(x_k, 0)$. Si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_2(x_k, 0) \neq 0,$$

entonces habremos demostrado que la derivada no es continua.¹

Tenemos

$$\begin{aligned} \delta_2(x_k, y) &= \frac{2x_k}{x_k^2 + 0^2} \cos\left(\frac{1}{x_k^2 + 0^2}\right) \\ &= \frac{2}{x_k} \cos\left(\frac{1}{x_k^2}\right) \\ &= 2\sqrt{2k\pi} \cos(2k\pi) \\ &= 2\sqrt{2k\pi}. \end{aligned}$$

¹Si el límite fuera igual a cero, el resultado no sería concluyente.

Luego podemos concluir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_2(x_k, 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2\sqrt{2k\pi} = +\infty.$$

Esto muestra que el límite no puede ser cero, y luego las derivadas parciales no pueden ser continuas en el origen.