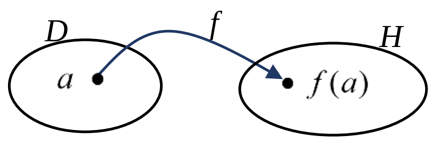
Esta síntesis no es un apunte de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

INTRODUCCIÓN Y NOMENCLATURA BÁSICA

- $a \in A$ se lee "a **pertenece** A", significa que el elemento a forma parte del conjunto A.
- El símbolo $\doteq$ se lee "igual por definición".
- El símbolo $\Re$ representa al conjunto de los números reales.
- El símbolo $\Re^+$ representa al conjunto de los números reales positivos, es decir, $\Re^+ \doteq \{x \in \Re \ / \ x > 0\}$.
- $A \subset B$ se lee "A i**ncluido** en B", significa que todos los elementos de A pertenecen a B.
- $A \cup B$ se lee "A **unión** B" y es el conjunto que contiene los elementos de ambos.
- $A \cap B$ se lee "A **intersección** B" y es el conjunto que contiene los elementos comunes a ambos.
- ϕ representa al **conjunto vacío**.
- A y B son **conjuntos disjuntos** cuando $A \cap B = \phi$ (no tienen elementos comunes).
- El **producto cartesiano** entre dos conjuntos A y B se representa $A \times B$ y es el conjunto de pares ordenados cuyo primer elemento pertenece a A y el segundo a B. Es decir:
$$A \times B \doteq \{(a,b) \ / \ a \in A \wedge b \in B\}$$
Si se tratara del producto cartesiano de n conjuntos $A_1, \cdots, A_n$:
$$A_1 \times \cdots \times A_n \doteq \{(a_1, \cdots, a_n) \ / \ a_k \in A_k, \ k = 1, \cdots, n\},$$
donde $(a_1, \cdots, a_n)$ se denomina ***n–upla*** ordenada de los elementos que se indican en ella.

- $f : D \to H$ se lee "f es función de D en H", significando que para cada elemento $a \in D$ la función f le hace corresponder un único elemento $f(a) \in H$.



D se denomina **dominio** de f, H es el **codominio** de f.

$f(a)$ es "**la imagen** de a a través de f" o bien "**la imagen** de a por f" o bien "**el valor de** f en el punto a".

$\mathrm{Im}(f)$ es el "**conjunto imagen** de f", es decir, $\mathrm{Im}(f) \doteq \{y \in H \ / \ y = f(a) \wedge a \in D\}$

- Un **espacio** es todo conjunto no vacío de elementos a los cuales se los denomina puntos.
- Se denomina **espacio métrico** a todo espacio A en el cual se ha definido una función d que establece la distancia entre sus puntos, dicha función debe ser del tipo $d : A \times A \to \Re$ y para todo $a,b,c \in A$ debe cumplir las siguientes cuatro propiedades:
$$d(a,b) \geq 0, \ d(a,b) = d(b,a), \ d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b,$$
$$d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c) \ \textit{propiedad triangular}$$

Se suponen conocidas las operaciones básicas entre vectores y de escalares por vectores.

En la asignatura trabajaremos con espacios vectoriales euclídeos n-dimensionales que denotaremos $\Re^n$, cuyos puntos son del tipo $X = (x_1,\cdots,x_n)\in\Re^n$, donde $x_i \in \Re$ para todo $i = 1,\cdots,n$.

El origen de $\Re^n$ es el punto $\Theta = (\underbrace{0,\cdots,0}_{n \text{ ceros}})$.

Dados dos puntos $X = (x_1,\cdots,x_n), Y = (y_1,\cdots,y_n)\in\Re^n$, adoptaremos como **producto interno** o **producto escalar** al número real $X\cdot Y \doteq \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$.

Establecido el producto interno (con lo cual el espacio vectorial pasa a ser euclídeo), quedan definidos:

$\| X \| \doteq \sqrt{X\cdot X}$ que se denomina **norma** de $X\in\Re^n$.

$d(X,Y) \doteq \| X - Y \|$ que es la **distancia** entre los puntos $X,Y\in\Re^n$.

$X,Y\in\Re^n$ son **ortogonales** cuando $X\cdot Y = 0$.

$X,Y\in\Re^n$ son **ortonormales** cuando son ortogonales y $\| X \| = \| Y \| = 1$.

Para todo $X,Y\in\Re^n$ se cumple que $|X\cdot Y| \le \| X \|\,\| Y \|$ ***desigualdad de Cauchy-Schwarz***

Por último, sólo para $X,Y\in\Re^3$ el producto vectorial entre ellos es:

$$X\times Y = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2\,y_3 - x_3\,y_2\,,\, x_3\,y_1 - x_1\,y_3\,,\, x_1\,y_2 - x_2\,y_1).$$

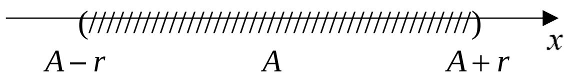
NOCIONES DE TOPOLOGÍA

$E(A,r)$: **Esfera abierta** con centro en el punto $A\in\Re^n$ y radio $r\in\Re^+$

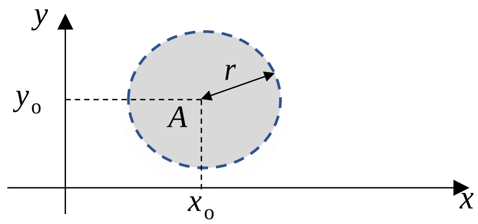
Es el conjunto de puntos de $\Re^n$ cuya distancia al punto A es menor que r.

$$E(A,r) \doteq \{\, X\in\Re^n \;/\; \| X - A \| < r \,,\; r > 0 \}$$

Aspectos de esferas abiertas en $\Re$ y en $\Re^2$:



$E(A,r) = \{\, x\in\Re \;/\; A - r < x < A + r \,\}$



$E(A,r) = \{\, X = (x,y)\in\Re^2 \;/\; (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < r^2 \}$

$E(A)$: **Entorno** de un punto $A\in\Re^n$

Es todo conjunto capaz de incluir una esfera abierta con centro en el punto A.

$E^*(A)$: **Entorno reducido** de un punto $A \in \Re^n$

Es el entorno de A sin el punto A, en símbolos:

$$E^*(A) \doteq E(A) - \{A\}$$

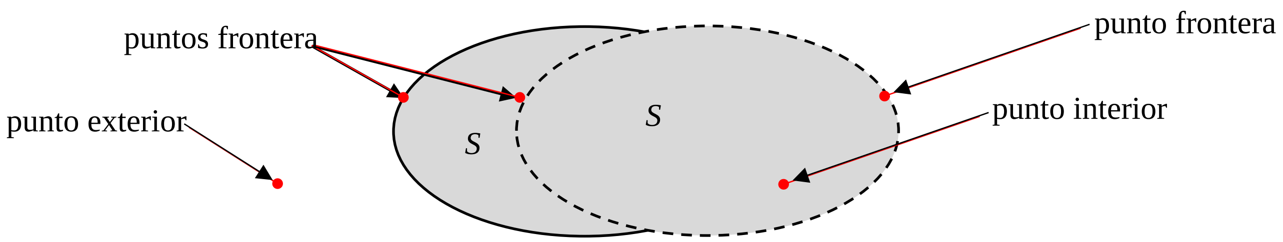
En particular, toda $E(A,r)$ *es un* $E(A)$, *pues siempre incluye una* $E(A, r/2)$.

<u>**Nota**</u>: A partir de ahora, salvo que se aclare lo contrario, cada vez que se hable de un $E(A)$ se supondrá que es del tipo esfera abierta (sin aclarar explícitamente el valor del radio).
En este contexto, si $E(A) \doteq \{ X \in \Re^n \ / \ \| X - A \| < r \ , \ r > 0 \}$ el correspondiente entorno reducido es $E^*(A) \doteq \{ X \in \Re^n \ / \ 0 < \| X - A \| < r \}$.

Dado un punto $A \in \Re^n$ y un conjunto de puntos $S \subset \Re^n$, sólo puede ocurrir una de las siguientes tres situaciones.

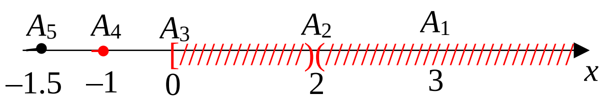
- A es **punto interior** a S cuando existe algún $E(A)$ incluido en S.
- A es **punto exterior** a S cuando existe algún $E(A)$ que no tiene puntos de S.
- A es **punto frontera** de S cuando en todo $E(A)$ existe algún punto de S y alguno que no pertenece a S.

El **interior** de S es el conjunto de sus puntos interiores.
El **exterior** de S es el conjunto de sus puntos exteriores.
La **frontera** de S es el conjunto de sus puntos frontera. Denotaremos con ∂S a la frontera de S.



Un punto $A \in S \subset \Re^n$ es **punto aislado** de S cuando existe algún $E^*(A)$ que no tiene puntos de S.
Un punto $A \in \Re^n$ es **punto de acumulación** de $S \subset \Re^n$ cuando en todo $E^*(A)$ existe algún punto de S.

<u>Ejemplo</u>: $f(x) = \sqrt{x\,(x+1)^4}\ \ln|x-2|$ adopta valores reales en $S = \{x \in \Re / \ x = -1 \ \vee \ 0 \le x < 2 \ \vee \ x > 2\}$, que es el dominio natural de f. En la figura los puntos de S se indican en color rojo.



A_1: punto interior y de acumulación de S.
A_2 y A_3: puntos frontera y de acumulación de S.
A_4: punto frontera y aislado de S.
A_5: punto exterior de S.

$S \subset \Re^n$ es un **conjunto abierto** cuando todos sus puntos son interiores.

$S \subset \Re^n$ es un **conjunto cerrado** cuando contiene a todos sus puntos de acumulación.

$S \subset \Re^n$ es un **conjunto acotado** cuando se lo puede incluir en una esfera abierta con centro en el origen y radio finito.

$S \subset \Re^n$ es un **conjunto compacto** cuando es cerrado y acotado.

$S \subset \Re^n$ es un **conjunto convexo** cuando para todo par de puntos $A, B \in S$ el segmento $\overline{AB}$ está incluido en S.

Noción: $S \subset \Re^n$ es un **conjunto conexo** cuando dados dos puntos cualesquiera $A, B \in S$ "es posible ir desde uno al otro desplazándose por puntos de S". [1]

Se denomina **poligonal** de **vértices** en los puntos $A_1, A_2, \cdots, A_k \in \Re^n$ al conjunto formado por la unión de los segmentos $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_2 A_3}, \cdots, \overline{A_{k-1} A_k}$, tomados en ese orden. Los segmentos se denominan **lados** de la poligonal.

EJEMPLOS

Recuerde que el valor absoluto de u es: $|u| \doteq \begin{cases} u & \text{si } u \geq 0 \\ -u & \text{si } u < 0 \end{cases}$

- $|2x-1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x-1 < 5 \Leftrightarrow -5+1 < 2x < 5+1 \Leftrightarrow -2 < x < 3.$

- $|2x-1| > 5$. Ahora con más cuidado:

  $$|2x-1| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 > 5 & \text{si } 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1) > 5 & \text{si } 2x-1 < 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x > 3 & \text{si } x \geq 1/2 \\ \underbrace{-2x+1 > 5}_{1-5 > 2x} & \text{si } x < 1/2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x > 3 & \text{si } x \geq 1/2 \\ x < -2 & \text{si } x < 1/2 \end{cases}$$

  Con lo cual: $|2x-1| > 5 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 3$

- $|xy| > 0$ se cumple para todo $(x, y) \in \Re^2$ que no pertenezca a los ejes coordenados.

- $xy > 0 \Leftrightarrow (x < 0 \wedge y < 0) \vee (x > 0 \wedge y > 0)$, es decir, los puntos pertenecientes a los cuadrantes 1º y 3º del plano xy.

- $|y-x| > 0$ Se cumple para todos los puntos del plano xy, salvo los que pertenecen a la recta de ecuación $y = x$, se invita a justificarlo.

- Propuesta: demuestre que $|x(x-3)| > 4$ en el $\{x \in \Re \ / \ x < -1 \vee x > 4\}$.

- Propuesta: demuestre que $|x| \geq |x-2|$ para todo $x \in \Re$ tal que $x \geq 1$.

[1] En realidad esta es una noción del concepto de conjunto arco-conexo, que es suficiente para el desarrollo de nuestra asignatura.