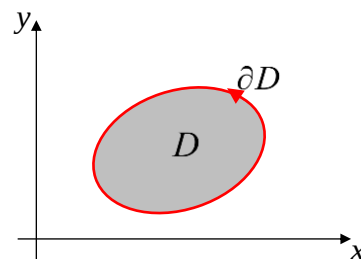


Esta síntesis no es un apunte de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

Teorema de Green

Sea una región plana D , su frontera ∂D y un campo $\vec{f}$, si:

1. $D \subset \mathbb{R}^2$ se la puede subdividir en una cantidad finita de regiones tipo RS3 del plano. ⁽¹⁾
2. ∂D es una curva cerrada, suave a trozos y simple, orientada en sentido positivo.
3. $f \in C^1$ en D y ∂D , o en un conjunto abierto que las incluya.



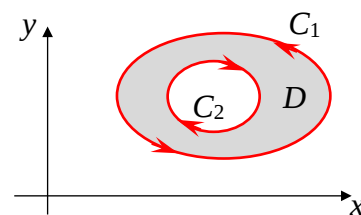
Cuando $\vec{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, se cumple que $\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)) dx dy$. (1)

Recordemos que la circulación a lo largo de ∂D se realiza en sentido positivo, cuando el interior de D queda a la izquierda del recorrido (ver síntesis S-7B, pág. 5/6).

Si la región D fuera la de la figura de la derecha, su frontera $\partial D = C_1 \cup C_2$ y

$$\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \oint_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s},$$

donde C_1 y C_2 deben circularse con la orientación que se indica en el gráfico.



Ejemplo: Dado $\vec{f}(x, y) = (xy + g(x), x^2)$ con $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, calcule la circulación en sentido positivo de $\vec{f}$ a lo largo de la frontera de la región plana definida por $x^2 + 2y^2 \leq 4$ con $x \geq 0$.

En este caso $\vec{f}(x, y) = (\underbrace{xy + g(x)}_{P(x, y)}, \underbrace{x^2}_{Q(x, y)})$, de donde:

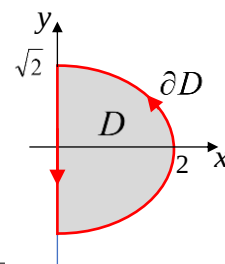
$$\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D \underbrace{(Q'_x(x, y) - P'_y(x, y))}_{2x - x} dx dy = \iint_D x dx dy$$

Por otra parte, $x^2 + 2y^2 = 4 \rightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$.

La integral doble podemos resolverla aplicando $(x, y) = (2r \cos(\theta), \sqrt{2}r \sin(\theta))$, correspondiente a polares generalizadas, con $|J(\theta, r)| = 2\sqrt{2}r$.

Con lo cual queda:

$$\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D x dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \underbrace{2r \cos(\theta) 2\sqrt{2}r dr}_{\frac{4}{3}\sqrt{2} \cos(\theta) [r^3]_0^1} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta}_{[\sin(\theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2}} = \frac{8}{3}\sqrt{2}.$$



⁽¹⁾ Región simple tipo RS3 del plano o simple respecto de ambos ejes coordenados (ver Síntesis S-8A, pág. 3/7 y 4/7).

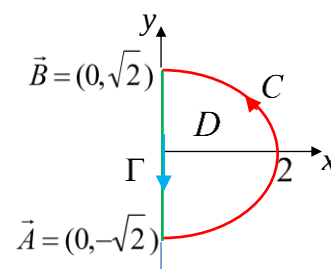
Ejemplo: Dado $\vec{f}(x, y) = (xy + g(x), x^2 + 2)$ con $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva C de ecuación $x = \sqrt{4 - 2y^2}$ desde $\vec{A} = (0, -\sqrt{2})$ hasta $\vec{B} = (0, \sqrt{2})$.

En este caso, dado que no se conoce $g(x)$, no podemos realizar la integral de línea a lo largo de C en forma directa.

Dado que la curva C dibujada en rojo, puede expresarse como $x^2 + 2y^2 = 4$ con $x \geq 0$, es la mitad de una elipse.

Si le agregamos la curva auxiliar Γ , entre ambas forman la frontera de la región D , es decir, $\partial D = C \cup \Gamma$.

Como $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, podemos aplicar el teorema de Green.



Siendo $\vec{f}(x, y) = (\underbrace{xy + g(x)}_{P(x, y)}, \underbrace{x^2 + 2}_{Q(x, y)})$, resulta:

$$\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)) dx dy = \iint_D \underbrace{2x - x}_{2x - x} dx dy = \iint_D x dx dy$$

Por su parte, $\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\Gamma_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s}$. Reemplazando en la anterior, resulta:

$$\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\Gamma_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D x dx dy \rightarrow \int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D x dx dy - \int_{\Gamma_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad (\#)$$

La integral doble es la que resolvimos en el ejemplo anterior, $\iint_D x dx dy = \frac{8}{3}\sqrt{2}$.

La curva Γ admite la parametrización $\vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{w}(y) \\ 0 \end{pmatrix}$ con $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$ que la orienta en el sentido opuesto al deseado, pues $\vec{w}(-\sqrt{2}) = (0, -\sqrt{2}) = \vec{A}$ y $\vec{w}(\sqrt{2}) = (0, \sqrt{2}) = \vec{B}$.

$$\text{Entonces, } \int_{\Gamma_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = - \int_{\Gamma_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \underbrace{\vec{f}(\vec{w}(y))}_{(g(0), 2)} \cdot \underbrace{\vec{w}'(y)}_{(0, 1)} dy = -2 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy = -4\sqrt{2}.$$

$$\text{Por último, reemplazando en (\#) obtenemos } \int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{8}{3}\sqrt{2} - (-4\sqrt{2}) = \frac{20}{3}\sqrt{2}.$$

Cálculo del área de una región plana mediante integral de línea

Considere que se cumplen las hipótesis del teorema de Green, agregando la condición que el campo vectorial $\vec{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ es tal que $Q'_x(x, y) - P'_y(x, y) = k \neq 0$, con k constante.

Entonces, aplicando (1) se tiene que $\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D k dx dy = k \iint_D dx dy = k \text{ área}(D)$, de donde:

$$\text{área}(D) = \frac{1}{k} \oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

El campo más sencillo que puede usarse es $\vec{f}(x, y) = (0, x)$, para el cual $Q'_x(x, y) - P'_y(x, y) = 1$.

En ese caso queda:

$$\text{Si } \vec{f}(x, y) = (0, x), \text{ resulta } \text{área}(D) = \oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Ejemplo: Calcule el área de la región plana D definida por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ con $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Se trata del área encerrada por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, que es la frontera ∂D de D .

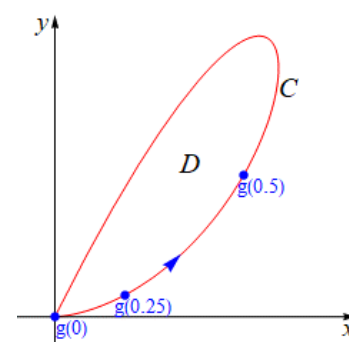
Esta curva admite la ecuación $\vec{X} = \overbrace{(a \cos(t), b \sin(t))}^{\vec{g}(t)}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, que la orienta en sentido positivo (verifíquelo). Entonces usando $\vec{f}(x, y) = (0, x)$ resulta:

$$\text{área}(D) = \oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\vec{f}(\vec{g}(t))}_{(0, a \cos(t))} \cdot \underbrace{\vec{g}'(t)}_{(-a \sin(t), b \cos(t))} dt = ab \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2(t)}_{[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}]_0^{2\pi}} dt = ab\pi.$$

Ejemplo: Calcule el área de la región plana D de la figura, sabiendo que su curva frontera C admite la ecuación vectorial:

$$\vec{X} = (u^2 - u^3, u^3 - u^5) \text{ con } 0 \leq u \leq 1.$$

Denotando $\vec{g}(u) = (u^2 - u^3, u^3 - u^5)$, comenzamos analizando cómo está orientada la curva con esta parametrización. Por ejemplo, calculamos $\vec{g}(0)$, $\vec{g}(0.25)$, $\vec{g}(0.5)$ y marcamos los puntos (en color azul, agregado al enunciado) en C , concluimos que está orientada positivamente.



Usando $\vec{f}(x, y) = (0, x)$, al aplicar el teorema de Green se obtiene que:

$$\begin{aligned} \text{área}(D) &= \iint_D dx dy = \oint_{\partial D^+ = C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \underbrace{\vec{f}(\vec{g}(u))}_{(0, u^2 - u^3)} \cdot \underbrace{\vec{g}'(u)}_{(2u - 3u^2, 3u^2 - 5u^4)} du = \\ &= \int_0^1 \underbrace{(u^2 - u^3)(3u^2 - 5u^4)}_{3u^4 - 3u^5 - 5u^6 + 5u^7} du = \left[\frac{3}{5}u^5 - \frac{1}{2}u^6 - \frac{5}{7}u^7 + \frac{5}{8}u^8 \right]_0^1 = 3/280. \end{aligned}$$

Ejemplo: Sea $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ con matriz jacobiana $D\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} g(x, y) & xy \\ xy + 5 & h(x, y) \end{pmatrix}$, se sabe además que con

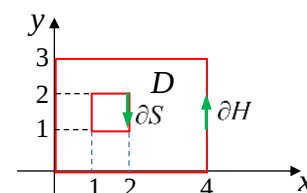
$H = [0, 4] \times [0, 3]$, $\oint_{\partial H^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 17$. Calcule $\oint_{\partial S^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$, si $S = [1, 2] \times [1, 2]$,

Observando el gráfico de la derecha podemos decir que, con las orientaciones que se indica en color verde, resulta:

$$\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\oint_{\partial H} \vec{f} \cdot d\vec{s}}_{=17} + \oint_{\partial S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (xy + 5 - xy) dx dy = 5 \text{área}(D) = 5 \cdot (4 \cdot 3 - 1 \cdot 1) = 55$$

Entonces, $\oint_{\partial S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 55 - 17 = 38$.

Pero esta última respecto de S es la circulación a lo largo de su frontera en sentido negativo, de donde, $\oint_{\partial S^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -38$.



Los temas correspondientes al T.P. X continúan en la Síntesis S-10C