

Esta síntesis **no es un apunte** de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

En esta síntesis, complementando la S-6, incorporamos fundamentalmente dos tipos más de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden.

Noción de función escalar homogénea

Un campo escalar f es homogéneo de grado k , cuando $f(u\vec{X}) = u^k f(\vec{X})$.

Ejemplos:

- Si $f(x, y) = x^2 + xy$ resulta $f(ux, uy) = (ux)^2 + u x u y = u^2(x^2 + xy) = u^2 f(x, y)$, en este caso f es homogéneo de grado 2.
- Si $f(x, y) = \frac{xy+x^2}{x^2+y^2}$ resulta $f(ux, uy) = \frac{u x u y + (u x)^2}{(u x)^2 + (u y)^2} = \frac{u^2}{u^2} \frac{xy+x^2}{x^2+y^2} \stackrel{u \neq 0}{=} \frac{xy+x^2}{x^2+y^2} = f(x, y)$, en este caso f es homogéneo de grado 0.

Nos interesan en particular los campos escalares de dos variables **homogéneos de “grado 0”**, para ellos:

$$f(ux, uy) = f(x, y).$$

Propiedad: Si f es homogéneo de grado 0, $f(x, xz) = f(1, z)$.

Es consecuencia directa de la definición pues, $f(x, xz) = f(x \cdot 1, xz) = f(x(1, z)) = f(1, z)$ por ser homogéneo de grado 0.

EDO tipo homogénea de 1º orden

Se acostumbra denominar EDO homogénea de 1º orden a la que puede expresarse como:

$$y' = f(x, y) \text{ con } f \text{ homogéneo de grado 0.} \quad (1)$$

En este caso, la ecuación diferencial puede resolverse mediante el reemplazo:

$$y = xz \quad (2)$$

donde z es una función de x a determinar.

Siendo $y = xz \rightarrow y' = z + xz'$, con esto, reemplazando en (1) se obtiene:

$$z + xz' = f(x, xz) \rightarrow z + x \frac{dz}{dx} = f(1, z) \text{ pues } f \text{ es homogénea de grado 0}$$

$$x \frac{dz}{dx} = f(1, z) - z \rightarrow \frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}$$

Esta última es de variables separables, se halla su SG y en ella –por (2)– se reemplaza $z = y/x$ obteniéndose así la SG de (1).

Ejemplo: Halle la SP de $y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$ que contiene al punto (2,1).

En este caso $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Dado que $f(ux,uy) = \frac{uxuy}{(ux)^2+(uy)^2} = \frac{u^2}{u^2} \frac{xy}{x^2+y^2} \stackrel{u \neq 0}{=} f(x,y)$, verificamos que la EDO es del tipo homogénea de grado 0 y aplicamos el método indicado en la página anterior. La EDO es:

$$y' = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad (I)$$

aplicamos el reemplazo

$$y = xz \quad (II)$$

y resulta:

$$z + xz' = \frac{xxz}{x^2+(xz)^2} \stackrel{x \neq 0}{=} \frac{z}{1+z^2} \rightarrow xz' = \frac{z}{1+z^2} - z \rightarrow x \frac{dz}{dx} = \frac{-z^3}{1+z^2} \rightarrow \frac{1+z^2}{z^3} dz = -\frac{dx}{x}$$

integrando,

$$\int \frac{1+z^2}{z^3} dz = -\int \frac{dx}{x} \rightarrow \frac{-1}{2} z^{-2} + \ln |z| = -\ln |x| + A \xrightarrow{z=y/x} \frac{-1}{2} (x/y)^2 + \ln |y/x| = -\ln |x| + A$$

Esta última es la SG de (I), si imponemos que pase por el punto (2,1) resulta $A = -2$.

Con lo cual, operando, la SP pedida es $\boxed{2y^2 \ln |y| + 4y^2 = x^2 \text{ con } x \neq 0}$.

Revisión sobre diferencial total

Sea el campo escalar U de las variables x e y , en todo punto $\vec{X} = (x,y)$ donde U sea diferenciable su diferencial total es: ⁽¹⁾

$$dU(\vec{X}, \vec{H}) = \nabla U(\vec{X}) \cdot \vec{H} \text{ con } \vec{H} = (h,k),$$

es decir,

$$dU(\vec{X}, \vec{H}) = U'_x(x,y) h + U'_y(x,y) k.$$

Siendo x e y las variables independientes, $h \equiv \Delta x \equiv dx$ y $k \equiv \Delta y \equiv dy$. Es decir, dx y dy son incrementos de las variables independientes, con esto resulta:

$$dU(x,y) = U'_x(x,y) dx + U'_y(x,y) dy, \quad (3)$$

que es la denominada **expresión analítica del diferencial total**.

Al sólo efecto de simplificar la nomenclatura, se ha indicado $dU(x,y)$ en lugar de $dU((x,y),(dx,dy))$.

Nota: Para el caso que $U(x,y) = x$, es claro que $dU(x,y) = dx$. Por otra parte,

$$dU(x,y) = \overbrace{U'_x(x,y)}^{=1} h + \overbrace{U'_y(x,y)}^{=0} k = h,$$

de donde resulta que $h = dx$. Similar para cualquier otra variable independiente.

⁽¹⁾ Ver Síntesis S-3B, pág. 9/10 y 10/10.

Ecuación diferencial total exacta

Se denomina ecuación diferencial total exacta (DTE) a una EDO que pueda expresarse en la forma:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (4)$$

cuando existe una función U diferenciable tal que $dU(x, y) = \underbrace{P(x, y)}_{U'_x(x, y)} dx + \underbrace{Q(x, y)}_{U'_y(x, y)} dy$.

Observe que si $y = f(x)$ fuera una solución de (4), debe verificarla, es decir:

$$\begin{aligned} P(x, f(x)) dx + Q(x, f(x)) \underbrace{f'(x) dx}_{dy} &= 0 \\ [P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x)] dx &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Por otra parte, si definimos $g(x) = U(x, f(x))$, dado que U y f son diferenciables, aplicando la regla de la cadena obtenemos que:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \nabla U(x, f(x)) \cdot (1, f'(x)) = \underbrace{U'_x(x, f(x))}_P + \underbrace{U'_y(x, f(x)) f'(x)}_Q \\ g'(x) &= P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x), \end{aligned}$$

Con lo cual la (5) impone que $g'(x) dx = 0$, entonces debe ser $g(x) = K$ constante.

Se concluye entonces que $U(x, y) = K$ define implícitamente a toda solución de (4) del tipo $y = f(x)$, es decir, tal que $g(x) = U(x, f(x))$.

Un razonamiento similar se puede realizar para toda solución de (4) del tipo $x = \varphi(y)$.

Por lo tanto, la estrategia para resolver (4) consiste en hallar una U diferenciable tal que $dU(x, y)$ sea igual al primer miembro de la ecuación e igualarla a una constante. Es decir, imponer $U(x, y) = K$.

$$\text{Para ello debe cumplirse que: } \begin{cases} U'_x(x, y) = P(x, y) \\ U'_y(x, y) = Q(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

Queremos hallar $U(x, y)$ conociendo sus derivadas parciales.

El procedimiento es el mismo que el explicado para hallar una función potencial de un campo vectorial, teniendo el cuidado que no necesitamos una expresión para $U(x, y)$. La solución es la relación entre las variables x e y que surge de imponer $U(x, y) = K$.

Es un error conceptual dar una solución en la que figure la letra U , sólo buscamos una relación entre las variables que satisfaga a (4).

Suponiendo que $P, Q \in C^1$, $P'_y = U''_{xy}$ y $Q'_x = U''_{yx}$ son continuas, de donde

$$P'_y = Q'_x \quad (7)$$

es la condición que debemos verificar para detectar que (4) es diferencial total exacta (DTE).

Regla práctica: Si se cumple (7), hallamos U desde (6). La SG. de (4) es la relación que se obtiene imponiendo $U(x, y) = K$.

Ejemplo: Halle la S.P. de $(x^2 - y) dx - x dy = 0$ que contiene al punto $(3, 2)$.

Veamos si responde al formato de DTE, $\underbrace{(x^2 - y)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{(-x)}_{Q(x,y)} dy = 0$.

$P'_y(x, y) = -1$, $Q'_x(x, y) = -1$. Como resultan iguales planteamos:

$$\begin{cases} U'_x(x, y) = x^2 - y & (\alpha) \\ U'_y(x, y) = -x & (\beta) \end{cases}$$

De (α) : $U(x, y) = \int (x^2 - y) dx = \frac{1}{3}x^3 - xy + g(y)$ (*)

Para usar (β) derivamos esta última respecto de y :

$$U'_y(x, y) = -x + g'(y) \stackrel{(\beta)}{=} -x \rightarrow g'(y) = 0 \rightarrow g(y) = A,$$

Reemplazando en (*) resulta

$$U(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy + A.$$

Pero la SG de la EDO dada se logra imponiendo $U(x, y) = K$, de donde

$$\frac{1}{3}x^3 - xy + A = K,$$

por lo tanto, reagrupando constantes ($C = K - A$),

$$\frac{1}{3}x^3 - xy = C \text{ es la SG.}$$

Ahora buscamos la S.P. que contiene al punto $(3, 2) \rightarrow \frac{1}{3}3^3 - 3 \cdot 2 = C \rightarrow C = 3$, entonces la S.P. pedida es $\boxed{\frac{1}{3}x^3 - xy = 3}$.

Factor integrante – ecuaciones reducibles a diferencial total exacta

Dada la ecuación $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$, puede ocurrir que $P'_y \neq Q'_x$ con lo cual no es DTE.

La idea es analizar si existe algún factor no nulo tal que, al multiplicar la ecuación dada por él la convierta en DTE.

Sólo analizamos los casos en que dicho factor es función de una de las dos variables. Se dan dos posibles situaciones a saber:

(a) Factor integrante del tipo $\mu(x)$.

Multiplicamos la ecuación por $\mu(x)$, con lo cual resulta $\underbrace{\mu(x)P(x, y)}_{p(x,y)} dx + \underbrace{\mu(x)Q(x, y)}_{q(x,y)} dy = 0$.

Ahora imponemos que:

$$p'_y(x, y) = \mu(x)P'_y(x, y) \text{ resulte igual a } q'_x(x, y) = \mu'(x)Q(x, y) + \mu(x)Q'_x(x, y),$$

es decir, $\mu(x)P'_y(x, y) = \mu'(x)Q(x, y) + \mu(x)Q'_x(x, y)$. De donde, operando,

$$\mu(x)[P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)] = \mu'(x)Q(x, y) \rightarrow \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \frac{P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)}{Q(x, y)} dx$$

Si resulta que $\frac{P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)}{Q(x, y)}$ es una función exclusiva de la variable x , de poder integrar esta última, obtenemos $\mu(x)$. Multiplicamos por este factor la ecuación original y la resolvemos como DTE. Puede ocurrir que no exista un factor que sea función exclusiva de x .

(b) Factor integrante del tipo $\mu(y)$.

Multiplicamos la ecuación por $\mu(y)$, con lo cual resulta $\underbrace{\mu(y)P(x,y)}_{p(x,y)}dx + \underbrace{\mu(y)Q(x,y)}_{q(x,y)}dy = 0$.

Ahora imponemos que:

$$p'_y(x,y) = \mu'(y)P(x,y) + \mu(y)P'_y(x,y) \text{ resulte igual a } q'_x(x,y) = \mu(y)Q'_x(x,y),$$

es decir, $\mu'(y)P(x,y) + \mu(y)P'_y(x,y) = \mu(y)Q'_x(x,y)$. De donde, operando,

$$\mu(y)[Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)] = \mu'(y)P(x,y) \rightarrow \frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = \frac{Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)}{P(x,y)} dy$$

Si resulta que $\frac{Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)}{P(x,y)}$ es una función exclusiva de la variable y , de poder integrar esta última, obtenemos $\mu(y)$. Multiplicamos por este factor la ecuación original y la resolvemos como DTE. Puede ocurrir que no exista un factor que sea función exclusiva de y .

Ejemplo: Dada la ecuación diferencial $(y-1)dx + xy dy = 0$, halle la S.P. que pase por $(-1,0)$.

Veamos si responde al formato de DTE, $\underbrace{(y-1)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{xy}_{Q(x,y)}dy = 0$.

$P'_y(x,y) = 1$, $Q'_x(x,y) = y$. No son iguales, no es DTE.

Probemos con factor $\mu(x)$:

$$\underbrace{\mu(x)(y-1)}_{p(x,y)}dx + \underbrace{\mu(x)xy}_{q(x,y)}dy = 0$$

$$p'_y(x,y) = \mu(x), \quad q'_x(x,y) = \mu'(x)xy + \mu(x)y.$$

Imponemos la igualdad: $\mu(x) = \mu'(x)xy + \mu(x)y$, es claro que no queda todo en función de x , por lo tanto, no existe $\mu(x)$.

Probemos con factor $\mu(y)$:

$$\underbrace{\mu(y)(y-1)}_{p(x,y)}dx + \underbrace{\mu(y)xy}_{q(x,y)}dy = 0$$

$$p'_y(x,y) = \mu'(y)(y-1) + \mu(y), \quad q'_x(x,y) = \mu(y)y.$$

Imponemos la igualdad: $\mu'(y)(y-1) + \mu(y) = \mu(y)y$, como todo queda en función de y , continuamos:

$$\frac{d\mu(y)}{dy}(y-1) = \mu(y)[y-1] \rightarrow \frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = dy \text{ con } y \neq 1$$

$$\int \frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = \int dy \rightarrow \ln |\mu(y)| = y + A \rightarrow \mu(y) = \pm e^A e^y = B e^y,$$

como sólo necesitamos un factor integrante, una SP alcanza. Por ejemplo, $\mu(y) = e^y$. multiplicamos entonces la EDO original por este factor, obteniendo:

$$\underbrace{e^y(y-1)}_{p(x,y)}dx + \underbrace{e^y xy}_{q(x,y)}dy = 0$$

donde se verifica que $p'_y(x,y) = e^y(y-1) + e^y = ye^y$ es igual a $q'_x(x,y) = ye^y$, con lo cual esta última es DTE. Recién ahora comenzamos a resolverla.

$$\begin{cases} U'_x(x, y) = e^y(y-1) & (\alpha) \\ U'_y(x, y) = e^y x y & (\beta) \end{cases}$$

De (α) : $U(x, y) = \int e^y(y-1) dx = e^y(y-1) x + g(y)$ (*)

Para usar (β) derivamos esta última respecto de y :

$$U'_y(x, y) = \underbrace{e^y(y-1)x + e^y x}_{e^y x y} + g'(y) \stackrel{(\beta)}{=} e^y x y \rightarrow g'(y) = 0 \rightarrow g(y) = A,$$

Reemplazando en (*) resulta:

$$U(x, y) = e^y(y-1) x + A$$

Pero la SG de la EDO dada se logra imponiendo $U(x, y) = K$, de donde

$$e^y(y-1) x + A = K,$$

por lo tanto, reagrupando constantes ($C = K - A$),

$$e^y(y-1) x = C \text{ es la SG.}$$

Aceptamos incluso $C = 0$ porque tanto $y = 1$ como $x = 0$ son soluciones de la EDO original.

Ahora buscamos la S.P. que contiene al punto $(-1, 0) \rightarrow -1(-1) = C \rightarrow C = 1$, entonces la S.P.

pedida es $\boxed{e^y(y-1) x = 1}$.

Ejercicio: Si observamos con atención la EDO del ejemplo anterior, $(y-1)dx + x y dy = 0$, podemos resolverla con mucho menos trabajo.

Note que, $(y-1)dx + x y dy = 0 \rightarrow (y-1)dx = -x y dy \rightarrow \frac{y}{(y-1)} dy = -\frac{1}{x} dx$.

Esta última es de variables separables, se invita a resolverla y , operando convenientemente, llegar a la misma solución general que con el método anterior.

Ejemplo: Halle la SG de $(y^2 - x)dx + (x + 2x^{-1})y dy = 0$.

Veamos si responde al formato de DTE, $\underbrace{(y^2 - x)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{(x + 2x^{-1})y}_{Q(x,y)} dy = 0$.

$P'_y(x, y) = 2y$, $Q'_x(x, y) = (1 - 2x^{-2})y$. No son iguales, no es DTE.

Probemos con factor $\mu(x)$:

$$\underbrace{\mu(x)(y^2 - x)}_{p(x,y)} dx + \underbrace{\mu(x)(x + 2x^{-1})y}_{q(x,y)} dy = 0$$

$$p'_y(x, y) = \mu(x)2y, \quad q'_x(x, y) = \mu'(x)(x + 2x^{-1})y + \mu(x)(1 - 2x^{-2})y.$$

Imponemos la igualdad: $\mu(x)2y = \mu'(x)(x + 2x^{-1})y + \mu(x)(1 - 2x^{-2})y$, para $y \neq 0$ queda

$$\mu(x)2 = \mu'(x)(x + 2x^{-1}) + \mu(x)(1 - 2x^{-2}) \rightarrow \mu'(x)(x + 2x^{-1}) = \mu(x)(2x^{-2} + 1)$$

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)(2x^{-2} + 1)/(x + 2x^{-1}) = \mu(x)x^{-1} \rightarrow \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \frac{dx}{x},$$

integrando, $\ln |\mu(x)| = \ln |x| + A \rightarrow \mu(x) = Bx$, una S.P. no nula es $\mu(x) = x$ con $x \neq 0$.

Multiplicamos entonces la EDO original por este factor, obteniendo:

$$\underbrace{(xy^2 - x^2)}_{p(x,y)} dx + \underbrace{(x^2 + 2)y}_{q(x,y)} dy = 0$$

Ahora $p'_y(x, y) = 2xy$ resulta igual a $q'_x(x, y) = 2xy$, esta última es DTE.

Para resolverla planteamos:

$$\begin{cases} U'_x(x, y) = xy^2 - x^2 & (\alpha) \\ U'_y(x, y) = (x^2 + 2)y & (\beta) \end{cases}$$

$$\text{De } (\beta): U(x, y) = \int (x^2 + 2)y dy = (x^2 + 2) \frac{1}{2} y^2 + g(x) \quad (*)$$

Para usar (α) derivamos esta última respecto de x :

$$U'_x(x, y) = xy^2 + g'(x) \stackrel{(\alpha)}{=} xy^2 - x^2 \rightarrow g'(x) = -x^2 \rightarrow g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + A$$

Reemplazando en $(*)$ resulta $U(x, y) = (x^2 + 2) \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} x^3 + A$.

Pero la SG de la EDO dada se logra imponiendo $U(x, y) = K$, de donde

$$(x^2 + 2) \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} x^3 + A = K,$$

por lo tanto, reagrupando constantes ($C = K - A$),

$$\boxed{(x^2 + 2) \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} x^3 = C \text{ con } x \neq 0} \text{ es la SG solicitada.}$$

Ejemplo: Halle una ecuación para la familia de curvas tales que, en cada punto, la ordenada al origen de la recta tangente es igual a la abscisa del punto.

Si (x_0, y_0) es un punto genérico de una de las curvas de la familia, la ecuación de la recta tangente a la misma en dicho punto es $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$, donde $y_0 = f(x_0)$, $y'_0 = f'(x_0)$, con $y = f(x)$ la ecuación de la curva en un cierto intervalo de valores de x .

La ordenada al origen de dicha recta es el valor de y para $x = 0$, el enunciado especifica que dicha ordenada debe ser x_0 . Por lo tanto, reemplazando en la ecuación de la recta, se tiene que:

$$x_0 - y_0 = y'_0(0 - x_0) \rightarrow x_0 - y_0 = -x_0 y'_0.$$

Como esto último debe cumplirse para cada punto genérico (x_0, y_0) , la correspondiente ecuación diferencial de la familia de curvas es $x - y = -xy'$. Esta ecuación se la puede expresar de distintas formas, por ejemplo:

- $(x - y) dx + x dy = 0$, reducible a DTE con factor integrante tipo $\mu(x)$.
- $y' - x^{-1}y = -1$, con $x \neq 0$. Lineal de 1º orden.
- $y' = \frac{y-x}{x}$, con $x \neq 0$. EDO homogénea de 1º orden.

Se invita a resolverla mediante los tres métodos, con cualquiera de ellos debe obtenerse una solución general del tipo $y = Cx - x \ln |x|$, que es una ecuación para la familia de curvas que cumple con lo especificado en el enunciado.

Ejercicio: Dada la ecuación diferencial $dx + (x + y + 3)dy = 0$, analice si puede obtenerse una expresión explícita para la solución particular que pasa por el punto $(0,0)$.

Respuesta: Puede obtenerse expresando x como función de y , resulta: $x = 2e^{-y} - y - 2$.

Ejemplo: Dado $\vec{f}(x, y, z) = (z/(x^2 + z^2), 2yz + h(y), h(y) - x/(x^2 + z^2))$ halle $h(y)$ de manera que $\vec{f}$ resulte irrotacional en su dominio natural con $\vec{f}(0,0,1) = (1,2,2)$ y, en ese caso, analice si el campo admite función potencial en dicho dominio.

Comenzamos planteando el cálculo del rotor de $\vec{f}$.

$$\nabla \times \vec{f}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{z}{x^2+z^2} & 2yz+h(y) & h(y) - \frac{x}{x^2+z^2} \end{vmatrix} = (h'(y) - 2y, \underbrace{\frac{x^2-z^2}{(x^2+z^2)^2} + \frac{z^2-x^2}{(x^2+z^2)^2}}_{=0}, 0-0).$$

El campo será irrotacional cuando $h'(y) = 2y$ con $x^2 + z^2 \neq 0$.

De donde, $h(y) = y^2 + C$.

Por otra parte, la condición $\vec{f}(0,0,1) = (1,2,2)$ impone que $(1, h(0), h(0)) = (1,2,2)$, por lo tanto $h(0) = 2 \rightarrow 0^2 + C = 2 \rightarrow h(y) = y^2 + 2$.

Con esto, la expresión del campo resulta:

$$\vec{f}(x, y, z) = (z/(x^2 + z^2), 2yz + y^2 + 2, y^2 + 2 - x/(x^2 + z^2))$$

cuyo dominio natural es $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + z^2 \neq 0\}$.

Así $\vec{f}$ resulta con matriz jacobiana simétrica (rotor nulo) y continua (componentes polinómicas o cociente de polinomios con denominador no nulo) en D . Todavía no podemos asegurar que admita función potencial porque D es conexo, pero no es simplemente conexo.

$D = \mathbb{R}^3 - \text{eje } y$, entonces calculamos la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de una curva que rodee al eje y . Por ejemplo, la circunferencia C de ecuación $\vec{X} = \underbrace{(\cos(t), 0, \sin(t))}_{\vec{g}(t)}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\vec{f}(\vec{g}(t))}_{(\sin(t), 2, 2-\cos(t))} \cdot \underbrace{\vec{g}'(t)}_{(-\sin(t), 0, \cos(t))} dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{[2\cos(t)-1]}_{[2\sin(t)-t]_0^{2\pi}} dt = -2\pi \neq 0.$$

Conclusión, con la $h(y)$ hallada el campo es C^1 e irrotacional en su dominio natural D , pero no admite función potencial en D .