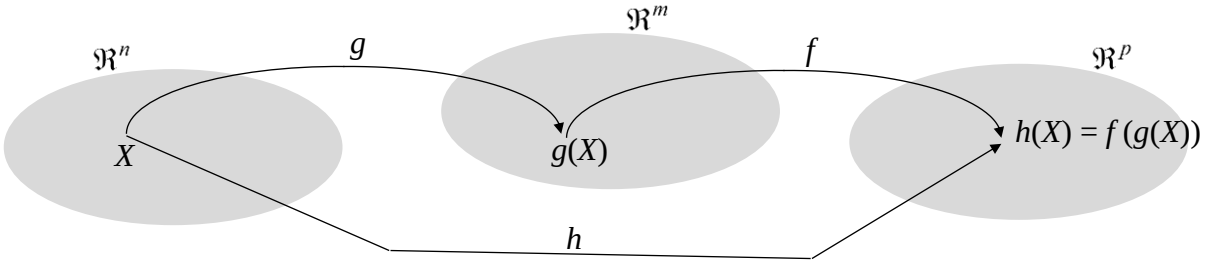
Esta síntesis <u>no es un apunte</u> de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Comencemos observando el siguiente esquema general que describe el tema a tratar. En él vemos que, desde un punto X se aplica una función g generando la imagen $g(X)$. Luego, a $g(X)$ se le aplica la función f generando $f(g(X))$.



Eso puede darse si $X \in D_g$ (el dominio de g) y $g(X) \in D_f$ (el dominio de f), en los espacios correspondientes. Entonces, observando el esquema, podemos decir que:

Dada $g : D_g \subset \Re^n \to \Re^m$ y $f : D_f \subset \Re^m \to \Re^p$, construyamos el conjunto $D = \{X \in D_g \,/\, g(X) \in D_f\}$, cuando $D \neq \phi$ (no es el conjunto vacío), queda definida la función:

$$h : D \subset \Re^n \to \Re^p \;/\; h(X) = f(g(X))$$

Se acostumbra denotar $h = f \circ g$, indicando que h es la composición de g con f.

Cuando la composición queda definida, el conjunto D así construido es el dominio natural de h.

<u>Teorema</u>: Si g es continua en un punto A y f es continua en $g(A)$, entonces $h = f \circ g$ es continua en A.

Composición de funciones continuas es continua

<u>Teorema</u> (**regla de la cadena**):

Si g es <u>derivable</u> en A y f es <u>diferenciable</u> en $g(A)$, entonces $h = f \circ g$ es derivable en A, resultando:

$$Dh(A) = Df(g(A))\, Dg(A) \qquad (1)$$

Donde "$D\bullet$" es la matriz jacobiana de "$\bullet$". Cuando en el enunciado se indica "derivable", se refiere a derivada de primer orden "derivada total para 1 variable" o "parcial para campos".

Cuando g es <u>diferenciable</u> en A y f es <u>diferenciable</u> en $g(A)$, entonces $h = f \circ g$ es <u>diferenciable</u> en A.

Composición de funciones diferenciables es diferenciable

Ejemplo: Dada $f(u,v) = u + uv$ y $\vec{g}(x,y) = (x^2,\, xy)$ ambas definidas en $\Re^2$, calcule $h'_x(2,1)$ sabiendo que $h = f \circ \vec{g}$.

Lo podemos resolver de dos maneras.

- *Componiendo las funciones*

  En este caso hallamos la expresión de h y luego derivamos. Siendo $h = f \circ \vec{g}$ resulta:

  $$h(x,y) = f(\vec{g}(x,y))$$
  $$\uparrow \quad _____ \quad \downarrow$$

  las flechas indican que como $\vec{g}$ es de las variables x e y, la función h también.
  Ahora continuamos con la composición:

  $h(x,y) = f(\vec{g}(x,y)) = f(x^2,\, xy) = x^2 + x^2\, xy = x^2 + x^3\, y$.

  Luego $h'_x(x,y) = 2x + 3x^2 y \;\rightarrow\; \boxed{h'_x(2,1) = 2\cdot 2 + 3 2^2 1 = 16}$.

- *Aplicando la regla de la cadena*

  Ahora derivamos sin hacer la composición. Ambas funciones son C^1 (f es polinómica y g tiene componentes polinómicas), entonces podemos aplicar la regla de la cadena.
  Para ello comenzamos igual que antes, es decir:

  Siendo $h = f \circ \vec{g}$ resulta $h(x,y) = f(\vec{g}(x,y))$.

  Para aplicar (1), identificamos los puntos $\vec{A} = (2,1)$ y $\vec{g}(\vec{A}) = \vec{g}(2,1) = (4,2)$.

  Ahora observamos que como f es escalar, también h lo será, de donde en la expresión:

  $$Dh(\vec{A}) = Df(\vec{g}(\vec{A}))\; D\vec{g}(\vec{A})$$

  la matriz de *h* será el tipo $Dh(\vec{A}) = (h'_x(\vec{A})\;\; h'_y(\vec{A}))$.

  Esto es importante pues al hacer el producto matricial, debemos saber (en la matriz resultante) dónde está el resultado que buscamos. En este caso es el 1º elemento de la misma.
  Ahora calculamos por separado:

  $$Df(\vec{g}(\vec{A})) = Df(4,2) = (1+v \quad u)]_{(4,2)} = (3\;\; 4)$$
  $$D\vec{g}(\vec{A}) = D\vec{g}(2,1) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  Entonces, $Dh(\vec{A}) = (3\;\; 4)\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (16\;\; 8)$, de donde: $\boxed{h'_x(2,1) = 16}$.

La regla de la cadena permite derivar sin hacer la composición

Ejemplo: Siendo $f(x,y) = 5x + xy^2$ y $\vec{g}(u) = (2u, |u|)$, analice la derivabilidad de $h = f \circ \vec{g}$ en $u = 0$.
Realizando la composición, $h(u) = f(\vec{g}(u)) = f(2u, |u|) = 10u + 2u\,|u|^2 = 10u + 2u^3$.
Entonces $h'(u) = 10 + 6u^2 \;\rightarrow\; \boxed{h'(0) = 10}$.

En este caso no se puede aplicar la regla de la cadena porque $\vec{g}$ no es derivable en 0.

Comentario: Todo teorema tiene la forma:

$$\underbrace{\text{si ocurre "esto"}}_{\textit{hipótesis}} \ \underbrace{\text{entonces}}_{\Rightarrow} \ \underbrace{\text{ocurre "aquello"}}_{\textit{tesis}}$$

Siendo éste el teorema directo (hipótesis $\Rightarrow$ tesis), el recíproco no siempre es cierto. Es decir, salvo que se aclare lo contrario, la validez de la tesis nada dice sobre la hipótesis.(1)

Pero habiendo demostrado que "hipótesis $\Rightarrow$ tesis" (teorema directo),
queda demostrado que "no tesis $\Rightarrow$ no hipótesis" (teorema contrarrecíproco).

En el último ejemplo queda en evidencia que, para la regla de la cadena, el recíproco no es válido. Observe que la función resultó derivable pero no se cumplen las hipótesis de la regla de la cadena.

Nomenclatura: Si existen varias variables en juego y se desea indicar la dependencia funcional de una respecto de otra(s), es común usar la misma denominación para la función y sus valores.

Ejemplo: La notación $w = \varphi(x,u)$ dice que w depende de la variables x y u a través de la función φ, se ha decidido denominar *w* a los valores de φ. Deberemos recordar durante todo el procedimiento que φ es la función que explica a w en función de sus variables.
Una alternativa es denotar directamente $w = w(x,u)$, ahora no hay cambio de denominación, la función que explica a w también se denomina w.
Con esta nomenclatura, muy utilizada, debe aceptarse que:

$$w'_x \equiv w'_x(x,u) \ , \quad w'_u \equiv w'_u(x,u) \ , \quad \text{ídem para derivadas sucesivas.}$$

Derivada de la composición, un planteo diferente

Lo introducimos mediante un ejemplo en el cual, como dato, se establecen relaciones entre variables.

Dada $\boxed{w = w(u,v) \ \text{ con } \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}}$, resulta $w = h(x,y)$. Calcule $h'_x(x_o, y_o)$.

Estamos incorporando parte de la nomenclatura mencionada más arriba.

Aquí también se trata de una composición, sólo que no se indica que $\vec{g}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$.

Si reemplazáramos $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ en $w(u,v)$, resultaría $w = \underbrace{w(\vec{g}(x,y))}_{h(x,y)}$.

Vamos a plantear el cálculo de $h'_x(x_o, y_o)$, suponemos que se cumplen las hipótesis de la regla de la cadena y la utilizamos denotando $A = (x_o, y_o)$.

$$Dh(A) = Df(g(A))\, Dg(A)$$

$$(h'_x(A) \ \ h'_y(A)) = (w'_u \ \ w'_v)]_{\vec{g}(A)} \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}_A \text{, donde } \vec{g}(A) = (\underbrace{u(x_o, y_o)}_{u_o}, \underbrace{v(x_o, y_o)}_{v_o})$$

De donde, operando queda: $h'_x(A) = [w'_u \ u'_x + w'_v \ v'_x]_{x=x_o, y=y_o, u=u_o, v=v_o}$.

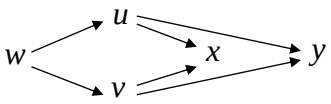
Veamos cómo logramos este resultado directamente desde los datos, sin usar el producto matricial.

(1) El teorema recíproco (dar vuelta la flecha) no siempre es válido.

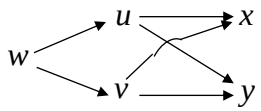
Comenzamos nuevamente desde el enunciado:

Dada $\boxed{w = w(u,v) \text{ con } \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}}$, resulta $w = h(x,y)$. Calcule $h'_x(x_o, y_o)$.

1) Realizamos una "red de dependencia funcional"



w es la variable dependiente (de ella sólo salen flechas)
x e *y* son las variables independientes (a ellas sólo llegan flechas)



forma alternativa por si no logramos evitar que se nos crucen las flechas

2) Ahora calculamos $u_o = u(x_o, y_o)$ y $v_o = v(x_o, y_o)$.

3) Siendo $w = h(x,y)$, queremos calcular $w'_x(x_o, y_o) = h'_x(x_o, y_o)$.
Para derivar observamos en la red todos los caminos que van desde *w* hasta *x* (no ir a contramano). En cada paso "de una variable a la otra" multiplicamos por "la derivada de la primera respecto de la segunda". Los resultados de los diferentes caminos (desde *w* a *x*) se deben sumar,

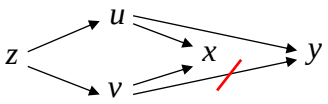
$$\text{es decir, } w'_x = \underbrace{w'_u\, u'_x}_{\substack{\text{pasando} \\ \text{por } u}} + \underbrace{w'_v\, v'_x}_{\substack{\text{pasando} \\ \text{por } v}} .$$

Sólo falta evaluar: $w'_x(x_o, y_o) \equiv h'_x(x_o, y_o) = [w'_u\ u'_x + w'_v\ v'_x]_{x=x_o, y=y_o, u=u_o, v=v_o}$
Es el resultado anterior, seguimos aplicando la regla de la cadena, pero evitamos las matrices.

Ejemplo: Siendo $z = u\,v^2 + 2v$ con $(u,v) = (x\,y+1,\ x^2)$, resulta $z = h(x,y)$. Calcule una aproximación lineal para $h(1.03, 2.99)$.
Tenemos que:

$$z = u\,v^2 + 2v \text{ con } \begin{cases} u = x\,y + 1 \\ v = x^2 \end{cases}$$

Donde z, u y v son diferenciables por ser polinómicas respecto de sus variables.



La dependencia de *v* respecto de *y* no existe, si la sostenemos nos da derivada nula. Ver más abajo.

Entonces *h* resulta diferenciable y podemos usar la expresión de aproximación lineal para función de dos variables. Elegimos $A = (1,3)$ y el punto (1.03, 2.99) está "cercano" a *A*.
La expresión para aproximar es: $h(x,y) \cong h(A) + h'_x(A)(x-1) + h'_y(A)(y-3)$, $(x,y) \in E(A)$ (*)
Calculamos valores: $x_o = 1,\ y_o = 3 \Rightarrow u_o = 4,\ v_o = 1 \Rightarrow z_o = 4 + 2 = 6 = h(A)$.

Derivamos usando la red de dependencia funcional

$$h'_x(A) \equiv z'_x(A) = [z'_u\, u'_x + z'_v\, v'_x]_{\underbrace{x=1, y=3, u=4, v=1}_{B}} = [v^2\ \ y + (2uv+2)\ 2x]_B = 23$$

$$h'_y(A) \equiv z'_y(A) = [z'_u\, u'_y + z'_v\, v'_y]_{\underbrace{x=1, y=3, u=4, v=1}_{B}} = [v^2\ \ x + (2uv+2)\ 0]_B = 1$$

Reemplazamos en (*): $h(x,y) = 6 + 23\,(x-1) + 1\,(y-3)$, $(x,y) \in E(A)$.
Por último, evaluamos en el punto de interés:

$$h(1.03, 2.99) \cong 6 + 23\,(1.03-1) + 1\,(2.99-3) = 6.68 \quad \rightarrow \quad \boxed{h(1.03, 2.99) \cong 6.68}.$$

Campo escalar evaluado en puntos de una curva

En muchos casos interesa analizar el comportamiento de un campo escalar cuando se lo evalúa en puntos de una curva.

Supongamos el campo escalar $f : D \subset \Re^n \to \Re$ con $n > 1$ y la curva $C \subset D$ de ecuación $\vec{X} = \vec{g}(t), t \in I$.

Analizar f en puntos de C significa estudiar la función $h = f(\vec{g}(t))$. Estamos suponiendo que $C \subset D$, es decir, la curva está incluida en el dominio de f.

Ahora agreguemos todas las hipótesis que nos faciliten el trabajo.

"f es diferenciable en $\vec{A}$ y $\vec{A} = \vec{g}(t_0)$ es punto simple y regular de C"

Entonces podemos derivar $h = f \circ \vec{g}$ aplicando la regla de la cadena, dado que h es escalar queda:

$$\left(h'(t_0)\right) = Df\left(\underbrace{\vec{g}(t_0)}_{\vec{A}}\right) D\vec{g}(t_0) = \left(f'_{x_1}(\vec{A}) \ \cdots \ f'_{x_n}(\vec{A})\right)\begin{pmatrix} g'_1(t_0) \\ \vdots \\ g'_n(t_0) \end{pmatrix} = \left(f'_{x_1}(\vec{A})\, g'_1(t_0) + \cdots + f'_{x_n}(\vec{A})\, g'_n(t_0)\right)$$

Es decir:

$$h'(t_0) = f'_{x_1}(\vec{A})\, g'_1(t_0) + \cdots + f'_{x_n}(\vec{A})\, g'_n(t_0) = \nabla f(\vec{A}) \cdot \vec{g}'(t_0)$$

Conclusión: Suponiendo f diferenciable y C simple y regular incluida en su dominio, la derivada de f evaluada en puntos de C de ecuación $\vec{X} = \vec{g}(t), t \in I$ es:

$$\boxed{h'(t_0) = \nabla f(\vec{A}) \cdot \vec{g}'(t_0)} \text{ para todo } \vec{A} = \vec{g}(t_0) \in C.$$

Ejemplo: Dado $f : \Re^3 \to \Re \ / \ f(x,y,z) = e^{z-x^2-y^2-3}$, la curva C de ecuación $\vec{X} = (t, t, 2t^2 + 3)$ con $t \in \Re$ y el punto $\vec{A} = (2,2,11)$.

a) Verifique que C está incluida en el conjunto de nivel 1 de f.

b) Verifique que $\nabla f(\vec{A})$ es perpendicular a la curva en $\vec{A}$.

a) El conjunto de nivel 1 de f es L_1 con ecuación $e^{z-x^2-y^2-3} = 1$, es decir:
Ecuación de L_1 : $z - x^2 - y^2 - 3 = 0 \ \to \ z = x^2 + y^2 + 3$.
Para la curva $\vec{X} = (x,y,z) = (t, t, 2t^2 + 3)$, reemplazado en la ecuación de L_1 resulta:
$2t^2 + 3 = t^2 + t^2 + 3$ que se verifica $\forall t \in \Re \ \Rightarrow \ C \subset L_1$.

b) Denotando $\vec{g}(t) = (t, t, 2t^2 + 3)$, vemos que únicamente $\vec{g}(2) = (2,2,11) = \vec{A}$, mientras que $\vec{g}'(2) = (1,1,4t)]_{t=2} = (1,1,8) \neq \vec{0}$ dirige la recta tangente a C en $\vec{A}$.
Por su parte, $\nabla f(\vec{A}) = (-2x\, e^{z-x^2-y^2-3}, -2y\, e^{z-x^2-y^2-3}, \ e^{z-x^2-y^2-3})]_{\vec{A}} = (-4,-4,1)$.
Entonces $\nabla f(\vec{A}) \cdot \vec{g}'(2) = (-4,-4,1) \cdot (1,1,8) = 0$, entonces $\nabla f(\vec{A}) \perp \vec{g}'(2)$.
Se verifica que $\nabla f(\vec{A})$ es perpendicular a la curva, por ser ortogonal al vector director de su recta tangente.

Ejemplo: Dada $z = f(x^2 - y^2,\ y^2 - x^2)$, suponiendo $f \in C^1(\Re^2)$, analice si $y\,z'_x + x\,z'_y = 0$.

Cuando no se indica en qué puntos se cumple la igualdad indicada, quiere significarse que vale para todo punto.

Es decir, debemos analizar si $y\,z'_x(x,y) + x\,z'_y(x,y) = 0 \ \ \forall (x,y) \in \Re^2$, donde estamos denotando $z(x,y) = f(x^2 - y^2,\ y^2 - x^2)$.

Aquí estamos en presencia de una composición de funciones que no se terminó de realizar porque no se conoce la expresión de f. Así no podemos derivar, tampoco podemos aplicar la regla de la cadena porque, para ello, necesitamos las funciones por separado.

Entonces comencemos por "descomponer lo hecho".

Consideramos por un lado $f(u,v)$ y por otro lado $(u,v) = \underbrace{(x^2 - y^2,\ y^2 - x^2)}_{\vec{g}(x,y)}$.

Ahora $z = f \circ \vec{g}$, es decir, $z(x,y) = f(\vec{g}(x,y))$. Con lo cual aplicamos la regla de la cadena para el punto genérico $\vec{X} = (x,y)$, sabiendo que z es escalar.

$$Dz(x,y) = \left(z'_x(x,y)\ \ z'_y(x,y)\right) = Df(\vec{g}(x,y))\ D\vec{g}(x,y)$$

$$\left(z'_x(x,y)\ \ z'_y(x,y)\right) = \left(f'_u(\vec{g}(x,y))\ \ f'_v(\vec{g}(x,y))\right) \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -2x & 2y \end{pmatrix}$$

De donde:

$$z'_x(x,y) = 2x\ f'_u(\vec{g}(x,y)) - 2x\ f'_v(\vec{g}(x,y))$$
$$z'_y(x,y) = -2y\ f'_u(\vec{g}(x,y)) + 2y\ f'_v(\vec{g}(x,y))$$

Ahora, observando la expresión a analizar calculamos:

$$y\,z'_x(x,y) = \ \ 2xy\ f'_u(\vec{g}(x,y)) - 2xy\ f'_v(\vec{g}(x,y))$$
$$x\,z'_y(x,y) = -2xy\ f'_u(\vec{g}(x,y)) + 2xy\ f'_v(\vec{g}(x,y))$$

Vemos que al sumar resulta $y\,z'_x(x,y) + x\,z'_y(x,y) = 0 \ \ \forall (x,y) \in \Re^2$, mediante este análisis podemos afirmar que $y\,z'_x + x\,z'_y = 0$.

Los temas del T.P. IV se completan con la síntesis S-4B