Esta síntesis <u>no es un apunte</u> de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

FUNCIÓN DEFINIDA EN FORMA IMPLÍCITA

Introducción: Comencemos planteando un ejemplo sencillo, sea la ecuación:

$$\underbrace{y^2 - x + 4}_{F(x,y)} = 0 \quad \text{y el punto } A = (5,1) \text{ que la satisface.}$$

Se desea saber si dicha ecuación define $y = f(x)$ cuya gráfica contenga al mencionado punto.
La respuesta es muy sencilla, de la ecuación original despejamos la variable y, con lo cual tenemos dos posibilidades $y = \sqrt{x-4}$ e $y = -\sqrt{x-4}$, ambas para $x \geq 4$.
Es claro que $f(x) = \sqrt{x-4}$, pues $f(5) = 1$ y la gráfica de f contiene al punto *A*, la otra ($-\sqrt{\ }$) no cumple.

En este caso se dice que la ecuación $F(x, y) = 0$ <u>define en forma implícita</u> a $y = f(x)$ cuya gráfica contiene al punto A. De poderse despejar, $y = f(x)$ es la <u>forma explícita</u> de expresar a y como función de x.

Debe cumplirse que, para $x \geq 4$ resulte $F(x, f(x)) = 0$.

En este ejemplo: $(\sqrt{x-4}\,)^2 - x + 4 = x - 4 - x + 4 = 0$ "se cumple".

Función definida en forma implícita por una ecuación escalar

Dada la ecuación escalar $F(x_1, \cdots, x_n, y) = 0$, se dice que la misma **define implícitamente** a la variable y como función de $x_1, \cdots, x_n$ en un conjunto H, cuando existe una función escalar f tal que:

$$F(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)) = 0 \ \ \forall (x_1, \cdots, x_n) \in H .$$

Si de la ecuación original pudiera despejarse $y = f(x_1, \cdots, x_n)$ con f definida en H, esta sería la **forma explícita** de expresar a y como función de las otras variables.

<u>Teorema (Cauchy-Dini)</u>: *Teorema de existencia y unicidad de la función definida implícitamente por una ecuación escalar.*

Sea $F : D \subset \Re^{n+1} \to \Re$, del tipo $F(x_1, \cdots, x_n, y)$, y el punto $\vec{A} = (a_1, \cdots, a_n, b)$ tal que:

(1) $F(\vec{A}) = 0$.

(2) $F \in C^1(E(\vec{A}))$, o bien, ∇F continuo en un $E(\vec{A})$.

(3) $F'_y(\vec{A}) \neq 0$.

Entonces la ecuación: $$F(x_1, \cdots, x_n, y) = 0 \qquad \text{(I)}$$

define implícitamente $y = f(x_1, \cdots, x_n)$ $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E(A_n)$ con $A_n = (a_1, \cdots, a_n)$. Cumpliéndose que:

- $f(a_1, \cdots, a_n) = b$.
- f es única cuya gráfica contiene al punto $\vec{A} = (a_1, \cdots, a_n, b)$.
- f es diferenciable en $A_n = (a_1, \cdots, a_n)$.
- Se puede calcular $\boxed{f'_{x_j}(A_n) \equiv \dfrac{\partial y}{\partial x_j}(A_n) = -\dfrac{F'_{x_j}(\vec{A})}{F'_y(\vec{A})} \ \text{ con } j = 1, \cdots, n}$.

Ejemplo: Dada la ecuación $x\,y + \ln(x + y^2 - 4) - 2 = 0$ y el punto $A = (1,2)$, verifique que dicha ecuación define implícitamente a $y = f(x)$ y calcule una aproximación lineal para $f(1.02)$.

Denotando $F(x, y) = x\,y + \ln(x + y^2 - 4) - 2$, vemos que:

(1) $F(A) = 2 + \ln(1 + 4 - 4) - 2 = \ln(1) = 0$, se cumple.

(2) $\nabla F(x, y) = (\,y + \frac{1}{x+y^2-4}\,,\; x + \frac{2y}{x+y^2-4})$ es continua en un $E(A)$, se cumple. [1]

(3) $F'_y(A) = 1 + 4/1 = 5 \neq 0$, se cumple.

Como se cumplen las tres hipótesis del teorema, podemos afirmar que la ecuación dada define implícitamente a $y = f(x)$ con $x \in E(1)$. Como f es derivable podemos escribir:

$$f(x) \cong f(1) + f'(1)(x - 1)\ ,\ x \in E(1)$$

que es la expresión para aproximación lineal.

En este caso $f(1) = 2$, la gráfica de f contiene al punto $A = (1,2)$.

Por su parte, la derivada es: $f'(1) = \frac{dy}{dx}(1) = -\frac{F'_x(A)}{F'_y(A)} = -\frac{3}{5}$

Entonces, $f(x) \cong 2 - \frac{3}{5}(x - 1)$, $x \in E(1)$, con lo cual: $\boxed{f(1.02) \cong 2 - \frac{3}{5}(1.02 - 1) = 1.988}$.

Curva plana dada en forma implícita

Dada la ecuación escalar $F(x, y) = 0$ y el punto $A = (x_0, y_0)$, si se cumple que:

(1) $F(A) = 0$.

(2) ∇F es continuo en un $E(A)$.

(3) $\nabla F(A) \neq \vec{0}$.

Entonces la ecuación $F(x, y) = 0$ define una curva C que contiene al punto A y admite recta tangente en dicho punto.

Nota: Siendo $\nabla F(A) \neq \vec{0}$, al menos una de las dos derivadas parciales no es nula. Por ejemplo, si fuera $F'_y(A) \neq 0$, se cumplen las hipótesis del teorema. Queda definida $y = f(x)$ con $x \in E(x_0)$, la ecuación de la curva, además f es derivable en x_0 $\rightarrow$ la curva admite recta tangente en A.

$\boxed{\text{Además } \nabla F(A) \perp C \text{ en } A\text{, es decir, es perpendicular a la recta tangente a } C \text{ en } A}$

Nota: Continuando la nota anterior, para el caso de $F'_y(A) \neq 0$, una ecuación vectorial para la curva es $X = (x, f(x))$ con $x \in E(x_0)$. El vector director de la recta tangente en A es $\vec{d} = (1, f'(x_0))$, que resulta ortogonal a $\nabla F(A)$. Recuerde que $f'(x_0) = -F'_x(A)/F'_y(A)$.

Esta propiedad de ortogonalidad también surge de lo comentado en la síntesis S-4A, pág. 5/6, "campo escalar evaluado en puntos de una curva".

[1] Componentes: suma de funciones continuas, polinomio + cociente de polinomios con denominador no nulo.

Ejemplo: Dada la elipse de ecuación $x^2 + 8y^2 = 12$, halle ecuaciones para la recta tangente y la recta normal en el punto $(2,1)$ de la misma.

La ecuación de la elipse puede expresarse $x^2 + 8y^2 - 12 = 0$

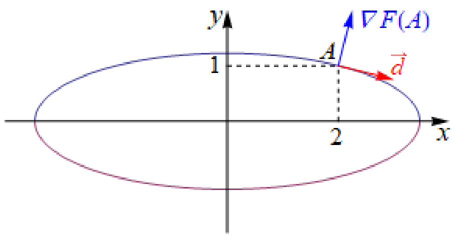
Denotando $A = (2,1)$ y $F(x,y) = x^2 + 8y^2 - 12$, resulta:

(1) $F(A) = 4 + 8 \cdot 1 - 12 = 0$.

(2) $\nabla F(x,y) = (2x, 16y)$, continuo en $\Re^2$.

(3) $\nabla F(A) = (4, 16) \neq \vec{0}$.

Como se cumplen las tres hipótesis, queda definida la curva en el entorno de A.



Como se observa en el esquema, $\nabla F(A) = (4, 16)$ es ortogonal a la elipse en A mientras que, por ejemplo $\vec{d} = (16, -4)$ permite dirigir a la recta tangente en A (por ser ortogonal al gradiente). [2]
Con esto podemos escribir:

Recta tangente, ecuación: $\vec{X} = (2,1) + u\,(16,-4) \rightarrow \boxed{\vec{X} = (2+16u, 1-4u) \text{ con } u \in \Re}$.

Recta normal, ecuación: $\vec{X} = (2,1) + v\,(4,16) \rightarrow \boxed{\vec{X} = (2+4v, 1+16v) \text{ con } v \in \Re}$.

Se deja como ejercicio: Hallar ecuaciones cartesianas para ambas rectas, a partir de las ecuaciones vectoriales obtenidas.

Superficie dada en forma implícita

Dada la ecuación escalar $F(x,y,z) = 0$ y el punto $A = (x_0, y_0, z_0)$, si se cumple que:

(1) $F(A) = 0$.

(2) ∇F es continuo en un $E(A)$.

(3) $\nabla F(A) \neq \vec{0}$.

Entonces la ecuación $F(x,y,z) = 0$ define una superficie Σ que contiene al punto A y admite plano tangente y recta normal en dicho punto.

Nota: Siendo $\nabla F(A) \neq \vec{0}$, al menos una de las tres derivadas parciales no es nula. Por ejemplo, si fuera $F'_z(A) \neq 0$ se cumplen las hipótesis del teorema. Queda definida $z = f(x,y)$ con $(x,y) \in E((x_0, y_0))$, la ecuación cartesiana de la superficie, además f es diferenciable en $(x_0, y_0) \rightarrow$ la superficie admite plano tangente y recta normal en A.

$\boxed{\text{Además } \nabla F(A) \perp \Sigma \text{ en } A\text{, es decir, es perpendicular al plano tangente a } \Sigma \text{ en } A}$

Nota: Continuando la nota anterior, para el caso de $F'_z(A) \neq 0$, una ecuación vectorial para la superficie es $X = (x, y, f(x,y))$ con $(x,y) \in E((x_0, y_0))$. Con vector normal $\vec{n}_0 = (-f'_x(x_0,y_0), -f'_y(x_0,y_0), 1)$, que resulta paralelo a $\nabla F(A)$.

Recuerde: $f'_x(x_0,y_0) = -F'_x(A)/F'_z(A)$ y $f'_y(x_0,y_0) = -F'_y(A)/F'_z(A)$.

[2] Los vectores se grafican aplicados en el punto A, usando una escala que puede ser diferente a la de los ejes coordenados.

Ejemplo: Sea la ecuación $(z-x^2)^2 = y^2\,(x^2+y^2+4)$.

a) Verifique que define una superficie *S* en un entorno del punto $A=(1,2,7)$.
b) Analice si la recta normal a *S* en *A* interseca al eje *x*.
c) Halle el punto donde el eje *z* interseca al plano tangente a *S* en *A*.

a) Comenzamos expresando la ecuación en forma implícita:

$$\underbrace{(z-x^2)^2 - y^2\,(x^2+y^2+4)}_{F(x,y,z)} = 0$$

Ahora vemos si la F que se indica cumple con las condiciones del teorema.

(1) $F(A)=(7-1)^2-4(1+4+4)=36-36=0$.

(2) $\nabla F(x,y,z)=\,(\,2\,(z-x^2)(-2\,x)-y^2\,2\,x\,,\,-2\,y\,(x^2+y^2+4)-y^2\,2\,y\,,\,2\,(z-x^2))$,

es continuo en $\Re^3$ (tiene componentes polinómicas), también entonces en $E(A)$.

(3) $\nabla F(A)=(-32,-52,12)\neq\vec{0}$.

Como se cumplen las tres condiciones, se verifica que la ecuación dada define una superficie en un $E(A)$.

Además, $\nabla F(A)=(-32,-52,12)$ orienta a la recta normal y es perpendicular al plano tangente a la superficie en *A*.

b) Una ecuación para la recta normal es: $\overline{X}=A+u\;\nabla F(A)$ con $u\in\Re$, reemplazando queda:

$$\vec{X}=\underbrace{(1-32u,\,2-52u,\,7+12u)}_{\vec{g}(u)}\ \text{ con } u\in\Re$$

Si esta recta tuviese un punto en común con el eje *x*, éste sería el tipo $(a,0,0)$. Es decir, debería existir un valor de u para el cual se anule la 2º y la 3º componente de $\vec{g}$.

$$2-52u=0\ \Rightarrow u=1/26\quad,\quad 7+12u=0\Rightarrow u=-7/12$$

Como esto no ocurre ($1/26\neq-7/12$), concluimos que <u>la recta no interseca</u> al eje *x*.

c) Una ecuación cartesiana para el plano tangente es: $((x,y,z)-A)\cdot\nabla F(A)=0$, reemplazando queda: $-32\,(x-1)-52(y-2)+12(z-7)=0$.

Si este plano tiene un punto en común con el eje *z*, éste sería el tipo $(0,0,b)$. Remplazando en la ecuación del plano queda: $32+104+12(b-7)=0\ \Rightarrow\ b=-13/3$.

Como el valor de b queda definido, el punto donde el eje *z* interseca al plano tangente a *S* en *A* es el $(0,0,-13/3)$.

Comentario: Si $F(x,y,z)=0$ es la ecuación de una superficie Σ, y $\vec{X}=\vec{g}(t)$ con $t\in I$ la ecuación de una curva $C\subset\Sigma$, debe cumplirse que $F(\vec{g}(t))=0$ con $t\in I$ (los puntos de la curva satisfacen la ecuación de la superficie).

Si la curva admite recta tangente en $\vec{A}=\vec{g}(t_0)$, como $h(t)=F(\vec{g}(t))$ es un “campo escalar en puntos de una curva” (ver página 5/6 de la síntesis S-4A) debe cumplirse que $h'(t_0)=\nabla F(\vec{A})\cdot\vec{g}'(t_0)=0$, pues $h(t)=0$ constante en *I*. Con lo cual, $\nabla F(\vec{A})\perp\vec{g}'(t_0)$.

<u>Conclusión</u>: El plano tangente a Σ en $\vec{A}$ contiene a la recta tangente a cualquier curva que pase por $\vec{A}$, esté incluida en Σ y admita recta tangente en dicho punto.

Funciones definidas en forma implícita por un sistema de ecuaciones escalares

Consideremos una función vectorial $\vec{F} = (F_1, \cdots, F_m)$ con $m > 1$, de valores $\vec{F}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$. Es decir, de $n+m$ variables con $n \geq 1$.
Una ecuación del tipo:

$$\vec{F}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m) = \vec{0} \qquad \text{(I)}$$

es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m) = 0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Ya que un vector es nulo si, y solo si, sus componentes son nulas.

Interesa establecer condiciones que permitan asegurar que (I) define implícitamente a las m variables y_j en función de las x_i. Para ello enunciamos el siguiente teorema.

<u>Teorema (Cauchy-Dini)</u>: *Teorema de existencia y unicidad de las funciones definidas implícitamente por un sistema de ecuaciones escalares.*

Sea $\vec{F}: D \subset \Re^{n+m} \to \Re^m$ con $n \geq 1$ y $m > 1$, del tipo $\vec{F}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$ con $\vec{F}=(F_1, \cdots, F_m)$ y el punto $\vec{A} = (a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m)$ tal que:

(1) $\vec{F}(\vec{A}) = \vec{0}$, o bien, $F_j(\vec{A}) = 0$ para $j = 1,\cdots,m$.

(2) $\vec{F} \in C^1(E(\vec{A}))$, o bien, ∇F_j continuo en un $E(\vec{A})$ para $j = 1,\cdots,m$.

(3) $\dfrac{\partial(F_1, \cdots, F_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)}(\vec{A}) \neq 0$,

donde $\dfrac{\partial(F_1, \cdots, F_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)}(\vec{A})$ es el determinante de la matriz jacobiana de $\vec{F}$ en $\vec{A}$, suponiendo que $\vec{F}$ sólo depende de las m variables y_j. También denominado "jacobiano de $F_1, \cdots, F_m$ respecto de $y_1, \cdots, y_m$ en $\vec{A}$".

Entonces la ecuación: $\vec{F}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m) = \vec{0}$,

o su sistema de m ecuaciones escalares equivalentes, define implícitamente a $y_j = f_j(x_1,\cdots,x_n)$ para todo $(x_1,\cdots,x_n) \in E(A_n)$ con $A_n = (a_1,\cdots,a_n)$. Cumpliéndose que:

- $f_j(A_n) = b_j$ con $j = 1,\cdots, m$.
- Cada f_j es única cuya gráfica contiene al punto $(a_1,\cdots,a_n,b_j)$ con $j = 1,\cdots, m$.
- Cada f_j es diferenciable en $A_n = (a_1,\cdots,a_n)$ con $j = 1,\cdots, m$.
- Se puede calcular $\boxed{\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(A_n) \equiv \dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}(A_n) = -\dfrac{\dfrac{\partial(F_1, \cdots, F_j, \cdots, F_m)}{\partial(y_1, \cdots, x_i, \cdots, y_m)}(\vec{A})}{\dfrac{\partial(F_1, \cdots, F_j, \cdots, F_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_j, \cdots, y_m)}(\vec{A})} \text{ con } i = 1,\cdots,n\,,\ j = 1,\cdots,m}$,

  observe que en el determinante del numerador figura x_i en la posición que figura y_j en el del denominador.

Ejemplo: Dada la ecuación $(x\,y+z\,e^{xu-y+z-1}+2u-7\,,\; xu+y\,z+\ln(xu+y-3z)-4)=(0,0)$ que se cumple en el punto $\vec{A}=(x_0,y_0,u_0,z_0)=(1,2,2,1)$.

a) Verifique que define a $u=u(x,y)$ y $z=z(x,y)$ en un entorno del punto $(x_0,y_0)=(1,2)$.

b) Calcule mediante una aproximación lineal $z(0.99,\,2.03)$.

a) La ecuación dada es equivalente al sistema $\begin{cases} \overbrace{x\,y+z\,e^{xu-y+z-1}+2u-7}^{F(x,y,u,z)}=0 \\ \underbrace{xu+y\,z+\ln(xu+y-3z)-4}_{G(x,y,u,z)}=0 \end{cases}$, donde se ha decidido usar F y G, para evitar los subíndices.

Vemos que:

(1) $\begin{cases} F(\vec{A})=2+1+4-7=0 \\ G(\vec{A})=2+2+\ln(2+2-3)-4=0 \end{cases}$.

(2) $\begin{cases} \nabla F(x,y,u,z)=(\,y+u\,z\,e^{xu-y+z-1},\; x-z\,e^{xu-y+z-1},\; x\,z\,e^{xu-y+z-1}+2,\; (z+1)e^{xu-y+z-1}) \\ \nabla G(x,y,u,z)=(u+\frac{u}{xu+y-3z}\,,\; z+\frac{1}{xu+y-3z}\,,\; x+\frac{x}{xu+y-3z}\,,\; y-\frac{3}{xu+y-3z}) \end{cases}$

ambos continuos en $E(\vec{A})$ ¿por qué?

(3) $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,z)}(\vec{A})=\begin{vmatrix} F'_u(\vec{A}) & F'_z(\vec{A}) \\ G'_u(\vec{A}) & G'_z(\vec{A}) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3-4=-7\neq 0$. Observe que las derivadas se toman respecto de las variables dependientes, las que se quiere verificar si quedan definidas en función de las otras.

Como se cumplen las tres condiciones, se verifica que quedan definidas $u=u(x,y)$ y $z=z(x,y)$ en un entorno del punto $(x_0,y_0)=(1,2)$.

b) Dado que el teorema asegura que las funciones que quedan definidas son diferenciables, podemos aplicar la expresión de aproximación lineal para $z=z(x,y)$.

$$z(x,y)\cong z(1,2)+z'_x(1,2)(x-1)+z'_y(1,2)(y-2) \quad \text{para } (x,y)\in E((x_0,y_0))$$

$z(1,2)=z_0=1$.

$$z'_x(1,2)=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}(\vec{A})}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,z)}(\vec{A})}=-\frac{\begin{vmatrix} F'_u(\vec{A}) & F'_x(\vec{A}) \\ G'_u(\vec{A}) & G'_x(\vec{A}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u(\vec{A}) & F'_z(\vec{A}) \\ G'_u(\vec{A}) & G'_z(\vec{A}) \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{-7}=\frac{4}{7}.$$

$$z'_y(1,2)=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}(\vec{A})}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,z)}(\vec{A})}=-\frac{\begin{vmatrix} F'_u(\vec{A}) & F'_y(\vec{A}) \\ G'_u(\vec{A}) & G'_y(\vec{A}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u(\vec{A}) & F'_z(\vec{A}) \\ G'_u(\vec{A}) & G'_z(\vec{A}) \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{-7}=\frac{6}{7}.$$

Entonces $z(x,y)\cong 1+\frac{4}{7}(x-1)+\frac{6}{7}(y-2) \;\rightarrow\; z(0.99,2.03)\cong 1+\frac{4}{7}(0.99-1)+\frac{6}{7}(2.03-2)$

$$\boxed{z(0.99,2.03)\cong 1.02}$$

Curva definida como intersección de dos superficies

Por aplicación directa del teorema de existencia y unicidad de las funciones definidas implícitamente por un sistema de ecuaciones, podemos enunciar lo siguiente.

Dadas las superficies Σ_1 de ecuación $F(x,y,z)=0$ y Σ_2 de ecuación $G(x,y,z)=0$, y el punto $\vec{A}=(x_0,y_0,z_0)$, cuando se cumple que:

(1) $\begin{cases} F(\vec{A})=0 \\ G(\vec{A})=0 \end{cases}$, es decir el punto pertenece a ambas superficies.

(2) $\begin{cases} \nabla F \\ \nabla G \end{cases}$ son continuos en un entorno del punto $\vec{A}$.

(3) $\vec{d}_0 = \nabla F(\vec{A}) \times \nabla G(\vec{A}) \neq \vec{0}$

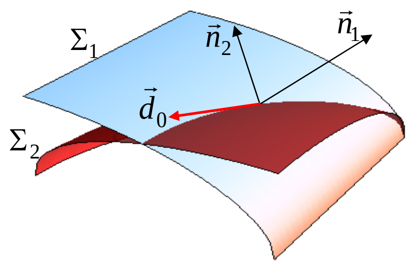
El sistema $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ define una curva C en un $E(\vec{A})$, como intersección de Σ_1 y Σ_2.

Dicha curva admite recta tangente en $\vec{A}$, dirigida por el vector $\vec{d}_0$, y plano normal en dicho punto, perpendicular a la mencionada recta.
Entonces podemos escribir las siguientes ecuaciones,

para la recta tangente: $\boxed{\vec{X} = \vec{A} + t\,\vec{d}_0 \ \text{ con } t \in \Re}$ *ecuación vectorial,*

para el plano normal: $\boxed{(\vec{X}-\vec{A}) \cdot \vec{d}_0 = 0}$ *ecuación cartesiana.*

Dado que al cumplirse (1), (2) y (3) los gradientes de F y G son ortogonales en $\vec{A}$ a Σ_1 y Σ_2 respectivamente, en el esquema se muestra la interpretación geométrica de los expuesto más arriba.
En el dibujo $\vec{n}_1 = \nabla F(\vec{A}) \perp \Sigma_1$ y $\vec{n}_2 = \nabla G(\vec{A}) \perp \Sigma_2$. Así, $\vec{d}_0 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.



Como $\vec{d}_0 = \nabla F(\vec{A}) \times \nabla G(\vec{A}) \neq \vec{0}$ los gradientes son l.i., por lo tanto, también se puede escribir la siguiente ecuación para el plano normal: $\boxed{\vec{X} = \vec{A} + u\,\nabla F(\vec{A}) + v\,\nabla G(\vec{A}) \ \text{ con } (u,v) \in \Re^2}$ *ecuación vectorial.*

<u>Nota</u>: Haciendo el producto vectorial de los gradientes resulta

$$\nabla F(\vec{A}) \times \nabla G(\vec{A}) = \left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(\vec{A}) \,,\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(\vec{A}) \,,\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(\vec{A}) \right) \neq \vec{0},$$

con lo cual por lo menos uno de los tres jacobianos no es nulo.

Por ejemplo, si $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(\vec{A}) \neq 0$, el sistema $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ define implícitamente a $y=y(x)$ y $z=z(x)$ en un $E(x_0)$. Esto demuestra que queda definida la curva C de ecuación vectorial:

$$\vec{X} = \underbrace{(x,\ y(x),\ z(x))}_{\vec{g}(x)} \ \text{ con } x \in E(x_0)\text{, donde } \vec{g}(x_0) = \vec{A}.$$

Por último, al calcular la derivada –aplicando la regla de derivación para funciones definida implícitamente– resulta $\vec{g}\,'(x_0) = (1, y'(x_0), z'(x_0)) \neq \vec{0}$ con $\vec{g}\,'(x_0) \,//\, \vec{d}_0$. Con lo cual, $\vec{d}_0$ permite dirigir a la recta tangente.

Ejemplo: Sea la curva C definida por la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2, de ecuaciones:

$$\Sigma_1 \;:\; x\,z = x\,y + x^2 + 2 \quad \text{y} \quad \Sigma_2 \;:\; \ln(x-y) = y\,z - 4\,.$$

Analice si la recta tangente a C en el punto $\vec{A} = (2,1,4)$ tiene algún punto en común con la recta de ecuación $\vec{X} = (2\lambda,\, \lambda - 5,\, \lambda)$ con $\lambda \in \Re$.

Comenzamos expresando el sistema que define a C, indicando las ecuaciones de las superficies en forma implícita.

$$C = \begin{cases} \overbrace{x\,y + x^2 - x\,z + 2}^{F(x,y,z)} = 0 \\ \underbrace{\ln(x-y) - y\,z + 4}_{G(x,y,z)} = 0 \end{cases}.$$

Ahora vemos si se cumplen las hipótesis.

(1) $\begin{cases} F(\vec{A}) = 2 + 4 - 8 + 2 = 0 \\ G(\vec{A}) = 0 - 4 + 4 = 0 \end{cases}.$

(2) $\begin{cases} \nabla F(x,y,z) = (\,y + 2x - z,\; x,\; -x) \\ \nabla G(x,y,z) = (\,\frac{1}{x-y},\; \frac{-1}{x-y} - z,\; -y) \end{cases}$, continuos en un $E(\vec{A})$.

(3) $\vec{d}_0 = \nabla F(\vec{A}) \times \nabla G(\vec{A}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = (-12,\, -1,\, -7) \neq \vec{0}$.

Como se cumplen la hipótesis, podemos escribir la siguiente ecuación para la recta tangente a la curva en $\vec{A}$:

$$\vec{X} = (2,1,4) + t\,(-12,-1,-7) \;\rightarrow\; \boxed{\vec{X} = (2 - 12t, 1 - t, 4 - 7t) \text{ con } t \in \Re}.$$

Ahora analizamos si esta recta tiene algún punto en común con la dada en el enunciado, es decir la de ecuación $\vec{X} = (2\lambda,\, \lambda - 5,\, \lambda)$ con $\lambda \in \Re$.

No son paralelas pues el vector director de esta última, $(2,1,1)$ no es paralelo a $\vec{d}_0$. [3]

Para que tengan un punto común debe existir un par (λ, t) tal que $\begin{cases} 2 - 12t = 2\lambda \\ 1 - t = \lambda - 5 \\ 4 - 7t = \lambda \end{cases}$.

Para que se cumplan las dos primeras debe ser $\lambda = 7$ y $t = -1$, pero con estos valores no se cumple la tercera. Por lo tanto, las rectas no tienen un punto común.

Como no son paralelas y no se intersecan, **son alabeadas**.

Nota: Si el enunciado dice que la curva queda definida por la intersección de las dos superficies, ¿para qué se verificaron las hipótesis?.

Respuesta: Para poder usar $\vec{d}_0$ como director de la recta tangente.

[3] ¿Cómo se obtiene el vector (2,1,1)? ¿Por qué no es paralelo a $\vec{d}_0$?