Esta síntesis no es un apunte de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

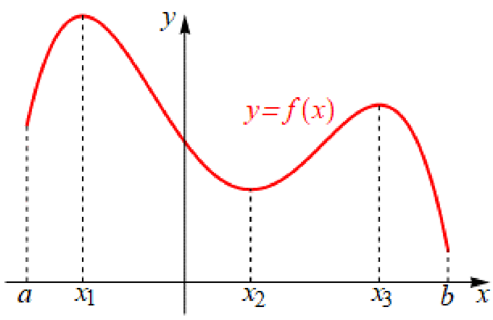
Máximos y mínimos de funciones escalares

Introducción

En la figura se representa $y = f(x)$ con $a \le x \le b$, por simple observación es claro que:

- $f(b)$ es el mínimo valor de f en el $[a,b]$.
- $f(x_1)$ es el máximo valor de f en el $[a,b]$.

Estos son el mínimo y el máximo absolutos de los valores de la función en dicho intervalo.



Por otra parte $f(x_2)$ y $f(x_3)$ también son mínimo y máximo, si se los considera en un entorno de x_2 y x_3 respectivamente. En este caso se trata de extremos (máximo o mínimos) locales o relativos.
El concepto es el mismo para toda función escalar de una o más variables.

Extremos locales o relativos (máximo y mínimo)

Dada $f: D \subset \Re^n \to \Re$ y el punto A interior a su dominio, se dice que:

- $f(A)$ es mínimo local de $f(X)$ cuando $\forall X \in E^*(A)$ resulta $f(X) > f(A)$.
- $f(A)$ es máximo local de $f(X)$ cuando $\forall X \in E^*(A)$ resulta $f(X) < f(A)$.

Estas definiciones están dadas en *sentido estricto*, si se desea definir extremos locales en *sentido amplio* debe reemplazarse "$>$ por $\ge$" y "$<$ por $\le$".

Extremos absolutos (máximo y mínimo)

Dada $f: D \subset \Re^n \to \Re$, el conjunto $S \subset D$ y el punto $A \in S$ se dice que:

- $f(A)$ es mínimo absoluto de $f(X)$ en S, cuando $\forall X \in S - \{A\}$ resulta $f(X) > f(A)$.
- $f(A)$ es máximo absoluto de $f(X)$ en S, cuando $\forall X \in S - \{A\}$ resulta $f(X) < f(A)$.

Estas definiciones están dadas en *sentido estricto*, si se desea definir extremos absolutos en *sentido amplio* debe reemplazarse "$>$ por $\ge$" y "$<$ por $\le$".

Ejemplo: $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ con $0 \le x \le 2\pi$. En $[0, 2\pi]$: $f(\pi/2) = 1$ es máximo absoluto y $f(3\pi/2) = -1$ es mínimo absoluto. Ambos en sentido estricto, pues sólo en esos puntos de dicho intervalo la función alcanza los valores indicados.
Por supuesto que, como $\pi/2$ y $3\pi/2$ son puntos interiores al intervalo $[0, 2\pi]$, los mencionados extremos absolutos también son extremos locales.

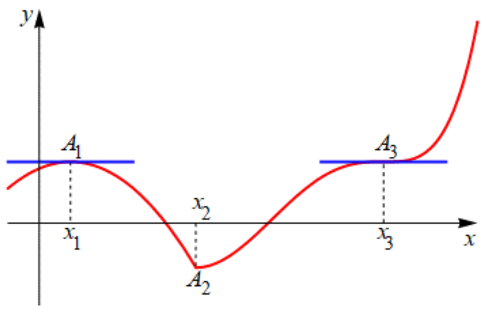
Ejemplo: $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ con $0 \le x \le 3\pi$, en dicho intervalo tiene $f(\pi/2) = f(5\pi/2) = 1$ como máximo absoluto en sentido amplio y $f(3\pi/2) = -1$ como mínimo absoluto en sentido estricto. Sin embargo, como extremos locales los tres lo son en sentido estricto. ¿Por qué?

Teorema: Toda función escalar continua en un conjunto cerrado y acotado, produce máximo y mínimo absolutos (en sentido amplio) en dicho conjunto.

Este es el único teorema que permite asegurar la existencia de extremos absolutos. Bajo las condiciones del mismo, los extremos absolutos se producirán en el interior o en la frontera del conjunto.

Análisis de existencia de extremos locales para funciones de una variable -- revisión

Comencemos observando el gráfico de la derecha que representa en color rojo a $y = f(x)$ en un cierto dominio *D*.



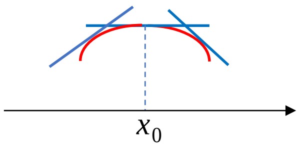
Vemos que:

- $f(x_1)$ es máximo local con $f'(x_1) = 0$, recta tangente horizontal en A_1.
- $f(x_2)$ es mínimo local, pero f no es derivable en x_2. La línea roja no admite recta tangente en A_2.
- $f(x_3)$ no es extremo local, pero $f'(x_3) = 0$. Recta tangente horizontal en A_3.

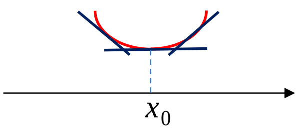
Es decir, $f'(x_0) = 0$ no asegura que $f(x_0)$ sea extremo local. Es más, $f(x_0)$ puede ser extremo local sin que f sea derivable en x_0.

Por ello, el análisis típico para saber si $f(x_0)$ es o no es extremo local, sigue los siguientes pasos:

1. Se determinan los *puntos críticos*, estos son los x_0 tales que:
   (a) f no es derivable en x_0, o bien,
   (b) f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$. En este caso x_0 se denomina *punto estacionario*.
2. Siendo x_0 un punto crítico, según sea del tipo (a) o (b), el análisis es como sigue.
   (a) Debe aplicarse la definición de extremo local.
   (b) En esta situación tenemos alternativas:
   (b1) Se aplica la definición de extremo local.
   (b2) Se analiza en un $E(x_0)$ el signo de la derivada a ambos lados de dicho punto.



$f(x_0)$ <u>máximo local</u>:
a izquierda $f'(x) > 0$, a derecha $f'(x) < 0$.



$f(x_0)$ <u>mínimo local</u>
a izquierda $f'(x) < 0$, a derecha $f'(x) > 0$.

   (b3) Si la función admite derivadas sucesivas, suponga que con $k > 1$ la derivada <u>de menor orden que no se anula</u> es $f^{(k)}(x_0) \neq 0$:
   – Si k es impar, $f(x_0)$ no es extremo local.
   – Si k es par: “cuando $f^{(k)}(x_0) > 0$, $f(x_0)$ es mínimo local”, “cuando $f^{(k)}(x_0) < 0$, $f(x_0)$ es máximo local”.

Lo dicho sintetiza el análisis de extremos locales para funciones escalares de una variable.

Veamos ahora cómo se plantea el análisis para funciones escalares de varias variables.

Teorema: Sea $f : D \subset \Re^n \to \Re$ con $n > 1$ y el punto $\vec{A}$ interior a *D*. Si $f(\vec{A})$ es extremo local y existe $f'(\vec{A}, \breve{r})$, entonces $f'(\vec{A}, \breve{r}) = 0$.

Caso particular: $\boxed{\text{Si } f(\vec{A}) \text{ es extremo local y } f \text{ es diferenciable en } \vec{A}\text{, entonces } \nabla f(\vec{A}) = \vec{0}}$.

Observe que, siendo diferenciable, $f'(\vec{A}, \breve{r}) = \nabla f(\vec{A}) \cdot \breve{r} \;\; \forall \breve{r} \in \Re^n$. Pero por ser extremo local estas derivadas deben ser nulas, es decir,

$$\nabla f(\vec{A}) \cdot \breve{r} = \vec{0} \;\; \forall \breve{r} \in \Re^n \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\vec{A}) = \vec{0}.$$

Análisis de existencia de extremos locales para campos escalares

Dada $f : D \subset \Re^n \to \Re$ con $n > 1$, el análisis típico para saber si $f(\vec{A})$ es o no es extremo local, sigue los siguientes pasos.

1. Se determinan los *puntos críticos*, estos son los puntos $\vec{A}$ tales que:
   (a) f no es diferenciable en $\vec{A}$, o bien,
   (b) f es diferenciable en $\vec{A}$ y $\nabla f(\vec{A}) = \vec{0}$. En este caso $\vec{A}$ se denomina *punto estacionario*.

2. Siendo $\vec{A}$ un punto crítico, según sea del tipo (a) o (b), el análisis es como sigue.
   (a) Debe aplicarse la definición de extremo local.
   (b) En esta situación tenemos alternativas:
      (b_1) Se aplica la definición de extremo local.
      (b_2) De cumplirse sus hipótesis, se puede aplicar el teorema que se enuncia a continuación.

Teorema: Sea $f : D \subset \Re^n \to \Re$ con $n > 1$, tal que $f \in C^2(E(\vec{A}))$ y $\nabla f(\vec{A}) = \vec{0}$.

Sea $H(\vec{A})$ el determinante de la matriz jacobiana del ∇f en $\vec{A}$, también denominado **hessiano** de f en $\vec{A}$. Dado que $\nabla f = (f'_{x_1}, \cdots, f'_{x_n})$, $H(\vec{A})$ adopta el siguiente aspecto:

$$H(\vec{A}) = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(\vec{A}) & f''_{x_1x_2}(\vec{A}) & \cdots & f''_{x_1x_n}(\vec{A}) \\ f''_{x_2x_1}(\vec{A}) & f''_{x_2x_2}(\vec{A}) & \cdots & f''_{x_2x_n}(\vec{A}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(\vec{A}) & f''_{x_nx_2}(\vec{A}) & \cdots & f''_{x_nx_n}(\vec{A}) \end{vmatrix}$$

H_1 H_2

En este determinante, empezando desde el extremo superior izquierdo (como se indica recuadrando), podemos distinguir los siguientes determinantes:

$H_1 = \left| f''_{x_1x_1}(\vec{A}) \right| = f''_{x_1x_1}(\vec{A})$, cuidado que no es un valor absoluto, es un determinante de 1×1.

$H_2 = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(\vec{A}) & f''_{x_1x_2}(\vec{A}) \\ f''_{x_2x_1}(\vec{A}) & f''_{x_2x_2}(\vec{A}) \end{vmatrix} = f''_{x_1x_1}(\vec{A})\, f''_{x_2x_2}(\vec{A}) - (f''_{x_1x_2}(\vec{A}))^2$, derivadas cruzadas son iguales.

Y así sucesivamente, hasta $H_n = H(\vec{A})$.

Habiendo calculado todos estos determinantes, se puede afirmar lo siguiente.

Si $H(\vec{A}) \neq 0$, de dan tres posibles situaciones:

a) $H_1 < 0$, $H_2 > 0$, $\cdots$signos alternados hasta H_n: $f(\vec{A})$ es máximo local.

b) $H_k > 0$, $k = 1, \cdots, n$: $f(\vec{A})$ es mínimo local.

c) Otra situación: $f(\vec{A})$ no es extremo local.

Si $H(\vec{A}) = 0$, este teorema no permite determinar si $f(\vec{A})$ es o no es extremo local. En este caso, una herramienta para analizarlo es aplicar la definición de extremo local.

Cuando este teorema permite detectar un extremo local, este es un extremo en sentido estricto.

Caso particular – función escalar de dos variables

Ahora tenemos $f : D \subset \Re^2 \to \Re$ con $f \in C^2(E(\vec{A}))$ y $\nabla f(\vec{A}) = \vec{0}$, siendo $\vec{A} = (x_0, y_0)$.
La gráfica de f tiene ecuación $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in D$ y el plano tangente π_0 a ella, en el punto $\vec{T}_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, tiene ecuación $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$.
Pero en este caso $\nabla f(\vec{A}) = \vec{0}$, con lo cual son nulas ambas derivadas parciales y la ecuación de π_0 es:

$$z = f(x_0, y_0),$$

es decir, π_0 es horizontal (paralelo al plano *xy*).
Por su parte, el hessiano correspondiente resulta:

$$H(\vec{A}) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(\vec{A}) & f''_{xy}(\vec{A}) \\ f''_{yx}(\vec{A}) & f''_{yy}(\vec{A}) \end{vmatrix} = f''_{xx}(\vec{A})\, f''_{yy}(\vec{A}) - [\, f''_{xy}(\vec{A})]^2,$$

pues las derivadas cruzadas son iguales ya que $f \in C^2(E(\vec{A}))$.

El mismo criterio de clasificación mencionado antes, para dos variables puede expresarse como sigue.

a) Si $H(\vec{A}) > 0$, $f(x_0, y_0)$ es extremo local. Con: $\begin{cases} f''_{xx}(\vec{A}) > 0, \text{ es mínimo local.} \\ f''_{xx}(\vec{A}) < 0, \text{ es máximo local.} \end{cases}$

b) Si $H(\vec{A}) < 0$, $f(x_0, y_0)$ no es extremo local.

c) Si $H(\vec{A}) = 0$, este teorema no permite determinar si $f(\vec{A})$ es o no es extremo local.

<u>Comentario</u>: Cuando $H(\vec{A}) > 0$ se puede demostrar que la gráfica de f, en un entorno de $\vec{T}_0$, queda de un solo lado de su plano tangente en $\vec{T}_0$. Como π_0 es horizontal, si queda por encima es mínimo local y si queda por debajo es máximo local, lo cual se determina con el signo de $f''_{xx}(\vec{A})$. (1)
Esta es una descripción geométrica útil para 2 variables.
En general, $H(\vec{A})$ se utiliza para determinar cuándo una forma cuadrática tiene signo definido en un $E^*(\vec{A})$, dicha forma es la del término complementario de Taylor de 1er. orden.

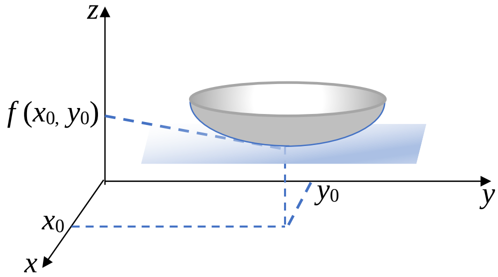
(1) También podría usarse $f''_{yy}(\vec{A})$, ya que para que $H(\vec{A}) > 0$ ambas deben tener el mismo signo y su producto ser mayor que el cuadrado de la derivada cruzada.

Continuemos ahora con la interpretación geométrica para dos variables, observemos los siguientes gráficos.

A la derecha se muestra un caso en el que $f(x_0, y_0)$ es **mínimo local**, con plano tangente horizontal de ecuación:

$$z = f(x_0, y_0).$$

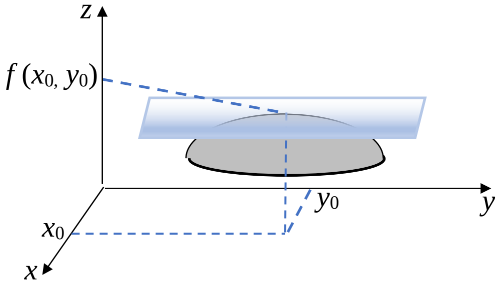
Observe que en un entorno de $T_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ la superficie queda desde el plano tangente hacia z^+.



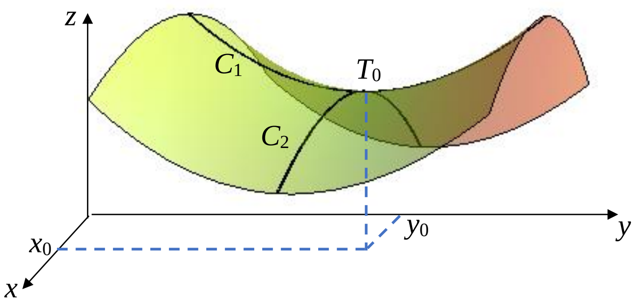
A la derecha se muestra un caso en el que $f(x_0, y_0)$ es **máximo local**, con plano tangente horizontal de ecuación:

$$z = f(x_0, y_0).$$

Observe que en un entorno de $T_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ la superficie queda desde el plano tangente hacia z^-.



Ahora vemos que la superficie tiene plano tangente horizontal en $T_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. El plano no está dibujado, pero es claro que la superficie no queda de un solo lado del mismo.
Pueden observarse las curvas C_1 y C_2, ambas incluidas en la superficie. Los puntos de C_1 están desde T_0 hacia arriba, mientras que los de C_2 están desde T_0 hacia abajo.
En este caso $f(x_0, y_0)$ **no es extremo local**.

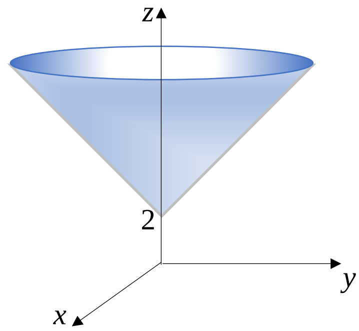


Por último, en el gráfico de la derecha se representa un trozo de superficie de ecuación:

$$z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2} \text{ para } (x, y) \in \Re^2.$$

Es claro que $f(x, y) = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ no es diferenciable en el origen ya que, por ejemplo, $f(x,0) = 2 + |x|$ no es derivable para $x = 0$. Es decir, no queda definida la derivada parcial de f respecto de x en (0,0).
La superficie no admite plano tangente en $(0,0,2)$, sin embargo $f(0,0) = 2$ es mínimo local porque cumple con la definición:

$$f(x, y) = 2 + \sqrt{x^2 + y^2} > 2 = f(0,0) \ \ \forall (x, y) \in E^*((0,0)).$$



Por supuesto que $f(0,0) = 2$ también es mínimo absoluto de los valores de f en $\Re^2$.

Ejemplo: Analice la existencia de extremos locales de $f(x,y) = x^2\,y + x^2 + y^3 - 3\,y^2 + 2$ definida en $\Re^2$.

Dado que la función es polinómica, es C^2 en $\Re^2$, los puntos críticos son aquellos que anulan ambas derivadas parciales de 1º orden.

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2\,x\,y + 2\,x \\ f'_y(x,y) = x^2 + 3\,y^2 - 6\,y \end{cases} \xrightarrow{\text{ptos. críticos}} \begin{cases} 2\,x\,y + 2\,x = 0 & \text{(a)} \\ x^2 + 3\,y^2 - 6\,y = 0 & \text{(b)} \end{cases}$$

De (a): $2\,x(y+1) = 0 \to x = 0 \vee y = -1$.

Con $x = 0 \xrightarrow{\text{(b)}} 3\,y^2 - 6\,y = 0 \to 3\,y(y-2) = 0 \to \begin{cases} y = 0 & \to (0,0), \\ \text{o} \\ y = 2 & \to (0,2). \end{cases}$

Con $y = -1 \xrightarrow{\text{(b)}} x^2 + 3 + 6 = 0 \to x^2 = -9$ no tiene solución real.

Los puntos críticos son: (0,0) y (0,2). Calculemos las derivadas segundas.

	(0,0)	(0,2)
$f''_{xx}(x,y) = 2\,y + 2$	2	6
$f''_{xy}(x,y) = 2\,x$	0	0
$f''_{yy}(x,y) = 6\,y - 6$	-6	6

Con esto podemos calcular el hessiano en cada punto.

$H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -12 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{f(0,0) \text{ no es extremo local}}$.

$H(0,2) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0 \Rightarrow$ $f(0,2)$ es extremo local. Como $f''_{xx}(0,2) = 6 > 0$, se concluye que $\boxed{f(0,2) = -2 \text{ es mínimo local}}$.

Ejemplo: Analice la existencia de extremos locales de $f(x,y) = x^2\,y - y^2 + 3$ definida en $\Re^2$.

Dado que la función es polinómica, es C^2 en $\Re^2$, los puntos críticos son aquellos que anulan ambas derivadas parciales de 1º orden.

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2\,x\,y \\ f'_y(x,y) = x^2 - 2\,y \end{cases} \xrightarrow{\text{ptos. críticos}} \begin{cases} 2\,x\,y = 0 & \text{(a)} \\ x^2 - 2\,y = 0 & \text{(b)} \end{cases}$$

De (a): $x = 0 \vee y = 0$.

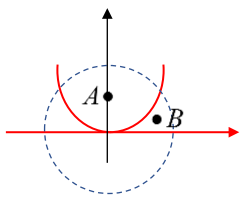
$$\left.\begin{array}{l} \text{Con } x = 0 \xrightarrow{\text{(b)}} -2\,y = 0 \to y = 0 \to (0,0) \\ \text{Con } y = 0 \xrightarrow{\text{(b)}} x^2 = 0 \to x = 0 \to (0,0) \end{array}\right\} \text{Único punto crítico: (0, 0).}$$

$$\begin{cases} f''_{xx}(0,0) = [2\,y]_{(0,0)} = 0 \\ f''_{xy}(0,0) = [2\,x]_{(0,0)} = 0 \\ f''_{yy}(0,0) = [-2]_{(0,0)} = -2 \end{cases} \to H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{ no se puede concluir.}$$

Una posible estrategia para continuar, es determinar el conjunto de nivel $f(0,0) = 3$, L_3, y estudiar $f(x,y)$ en un entorno de (0,0) en puntos que no pertenezcan a L_3.

$L_3:\; x^2\,y - y^2 + 3 = 3 \to (x^2 - y)\,y = 0 \to y = 0 \vee y = x^2$.

Entonces los puntos de L_3 son los del “eje x” y los de la parábola de ecuación “$y = x^2$” dibujados en color rojo. En todo entorno de (0,0) tendremos puntos como $A = (0, c)$ con c positivo y otros como $B = (a,b)$ que están entre la parábola y el eje x, es decir $0 < b < a^2$.



Como $f(x,y) = (x^2 - y)\,y + 3$, en puntos tipo A: $f(A) < 3$ y en tipo B: $f(B) > 3$, esto permite asegurar que $f(0,0) = 3$ no es extremo local.

Análisis de extremos absolutos

Por lo dicho antes, cuando una función es continua en un conjunto *S* cerrado y acotado, produce máximo y mínimo absolutos en dicho conjunto. En esta situación, la estrategia para hallarlos es la siguiente.

1. Se determinan los extremos locales en el interior de *S*.
2. Se determinan el máximo y mínimo valor de la función en la frontera de *S*.
3. Comparando los valores extremos que se producen en el interior y en la frontera, el mayor de todos es el máximo absoluto y el menor el mínimo absoluto.

Ejemplo: Analice la existencia de extremos absolutos de $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + y^2 + 3$ en puntos de la región plana *S* definida por $x^2 + y^2 \le 1$.

Dado que f es continua, por ser polinómica, en *S* cerrada y acotada, la función produce extremos absolutos en *S*.

Análisis en puntos interiores a *S*, es decir, puntos para los cuales $x^2 + y^2 < 1$.

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 3x^2 + 6x \\ f'_y(x,y) = 2y \end{cases} \xrightarrow{\text{ptos. críticos}} \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \to 3x(x+2) = 0 \to x = 0 \vee x = -2 \\ 2y = 0 \to y = 0 \end{cases}$$

Los puntos críticos son $(0,0)$ y $(-2,0)$, pero este último se descarta porque no es interior a *S*.

$$\begin{cases} f''_{xx}(0,0) = [6x+6]_{(0,0)} = 6 \\ f''_{xy}(0,0) = [0]_{(0,0)} = 0 \\ f''_{yy}(0,0) = [2]_{(0,0)} = 2 \end{cases} \to H(0,0) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0, \text{ con } f''_{xx}(0,0) = 6 > 0.$$

Entonces $\boxed{f(0,0) = 3 \text{ es un mínimo local}}$ en el interior de *S*.

Análisis en la frontera de *S*, es decir, puntos para los cuales $x^2 + y^2 = 1$.

En puntos de esta circunferencia se cumplirá que $y^2 = 1 - x^2$ con $-1 \le x \le 1$, lo cual, reemplazado en la expresión de *f* , permite obtener:

$$f(pto.\ frontera\ de\ S) = x^3 + 3x^2 + 1 - x^2 + 3 = x^3 + 2x^2 + 4 = g(x) \quad \text{con } -1 \le x \le 1$$

Ahora debemos hallar máximo y mínimos de $g(x) = x^3 + 2x^2 + 4$ con $-1 \le x \le 1$, que también es continua en el [–1,1].

En el interior de [–1,1], es decir, $-1 < x < 1$:

$g'(x) = 3x^2 + 4x \xrightarrow{\text{pto. crítico}} 3x^2 + 4x = 0 \to x = 0 \vee x = -4/3$, el último se descarta por no ser interior al intervalo. Sólo queda $x = 0$.

$g''(x) = 6x + 4 \to g''(0) = 4 > 0 \Rightarrow g(0) = 4$ es mínimo local, como $x^2 + y^2 = 1$, esto se corresponde con $f(0,-1) = f(0,1) = 4$ mínimos locales en el interior de [–1,1].

En la frontera de [–1,1], es decir, $x = -1$ o $x = 1$: $g(-1) = 5$ y $g(1) = 7$, esto se corresponde con $f(-1,0) = 5$ y $f(1,0) = 7$.

Entonces $\boxed{\text{“mínimo: } f(0,-1) = f(0,1) = 4\text{”, “máximo: } f(1,0) = 7\text{”}}$ en la frontera de *S*.

Comparando $f(0,0) = 3$ (mínimo local en el interior de *S*) con los valores extremos en la frontera de *S* se concluye lo siguiente.

$\boxed{\text{Mínimo absoluto en } S: f(0,0) = 3, \text{ Máximo absoluto en } S: f(1,0) = 7}$.

A continuación, se indica una alternativa para analizar $f(x,y)$ en la frontera de *S*.

En este caso, como la frontera es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, se la puede parametrizar mediante:

$$\vec{X} = \underbrace{(\cos(u), \operatorname{sen}(u))}_{\vec{w}(u)} \quad \text{con } 0 \le u \le 2\pi$$

Con esto, los valores de f en puntos de la frontera serán:

$$\underbrace{f(\vec{w}(u))}_{h(u)} = \cos^3(u) + 3\cos^2(u) + \operatorname{sen}^2(u) + 3$$

Es decir, teniendo en cuenta que $\cos^2(u) + \operatorname{sen}^2(u) = 1$,

$$h(u) = \cos^3(u) + 2\cos^2(u) + 4 \quad \text{con} \quad 0 \le u \le 2\pi \ .$$ [(2)]

Se deja como ejercicio hallar el máximo y mínimo de $h(u)$ con $0 \le u \le 2\pi$, es el análisis de una función continua de una variable en intervalo cerrado y acotado.

Los resultados a obtener para la frontera de S son:

máximo: $h(0) = f(\vec{w}(0)) = h(2\pi) = f(\vec{w}(2\pi)) = f(1,0) = 7$
mínimo: $h(\frac{\pi}{2}) = f(\vec{w}(\frac{\pi}{2})) = f(0,1) = h(\frac{3\pi}{2}) = f(\vec{w}(\frac{3\pi}{2})) = f(0,-1) = 4$

Esto se puede lograr mediante derivadas en el interior ($0 < u < 2\pi$) y comparando con los valores de $h(0)$ y $h(2\pi)$.

LOS TEMAS CORRESPONDIENTES AL T.P. V SE COMPLETAN EN LA SÍNTESIS S-5C

(2) Observe que $h(u) = g(\cos(u))$ del análisis anterior.