

Esta síntesis no es un apunte de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

Otros conceptos sobre superficies

En la página 6/10 de la Síntesis S-3B definimos punto regular y punto simple de una superficie. En particular, una superficie Σ de ecuación $\vec{X} = \vec{F}(u, v)$ con $(u, v) \in D$ es regular cuando $\vec{F}$ es diferenciable y el producto vectorial $\vec{n} = \vec{F}'_u \times \vec{F}'_v \neq \vec{0}$ en todo punto de D .⁽¹⁾

Se dice que Σ es una **superficie suave**, cuando es regular y $\vec{F} \in C^1(D)$.⁽¹⁾

Por otra parte, **la superficie es suave a trozos** cuando se la puede subdividir en una cantidad finita de trozos de superficies suaves.

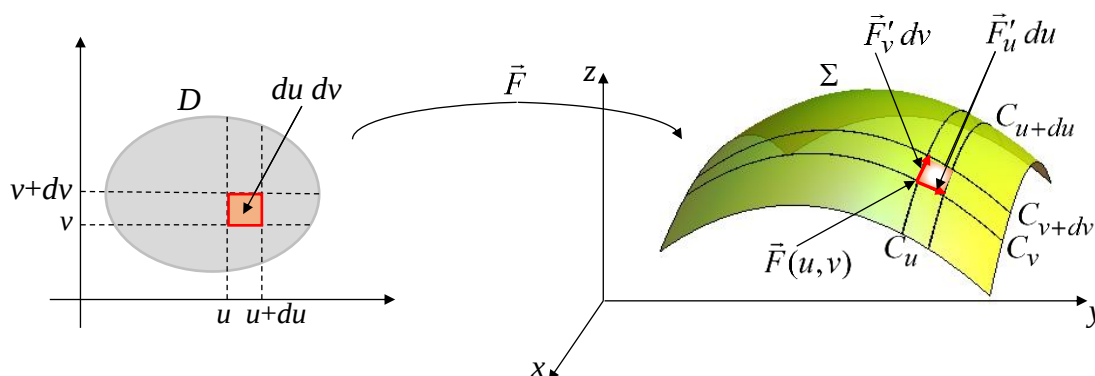
Área de una superficie

Dada la superficie Σ de ecuación $\vec{X} = \vec{F}(u, v)$ con $(u, v) \in D$, si Σ es suave y simple, el área de la misma se puede calcular mediante:

$$\text{área}(\Sigma) = \iint_D \|\vec{F}'_u(u, v) \times \vec{F}'_v(u, v)\| du dv, \quad (1)$$

donde se supone que D es un conjunto acotado con frontera de área nula.

A continuación, comentamos una interpretación geométrica de esta fórmula.



El rectángulo de área $du dv$ en el plano uv se convierte, a través de $\vec{F}$, en un trozo de superficie limitado por las líneas coordenadas C_u, C_{u+du}, C_v y C_{v+dv} . Si rectificamos los pequeños trozos de curva de u y v constante según los vectores $d\vec{s}_v = \vec{F}'_u du$ y $d\vec{s}_u = \vec{F}'_v dv$, el trozo de superficie se rectifica como parte del trozo de plano tangente cuya área es $d\sigma = \|d\vec{s}_v \times d\vec{s}_u\| = \|\vec{F}'_u du \times \vec{F}'_v dv\| = \|\vec{F}'_u \times \vec{F}'_v\| du dv$. Donde du y dv son incrementos positivos de las variables independientes, tan pequeños como podamos imaginarlos.

Al integrar en D según (1) “sumamos” todos los $d\sigma$, que se denominan **diferencial de área de superficie**, y obtenemos el área de la superficie.

Como veremos más adelante, si la superficie es suave a trozos, el área la podemos calcular sumando el área de los distintos trozos que la componen.

⁽¹⁾ O bien, en un conjunto abierto que incluya a D .

Ejemplo: Calcule el área de la superficie de ecuación $z = xy$ con $(x, y) \in D$, donde D es un círculo de radio 3 con centro en el origen de coordenadas.

En este caso una ecuación vectorial para la superficie es:

$$\vec{X} = \underbrace{(x, y, xy)}_{\vec{F}(x,y)} \text{ con } (x, y) \in D.$$

Como está parametrizada en las variables x e y , la fórmula (1) queda:

$$\begin{aligned} \text{área}(\Sigma) &= \iint_D \|\vec{F}'_x(x, y) \times \vec{F}'_y(x, y)\| \, dx \, dy \\ \vec{F}'_x(x, y) \times \vec{F}'_y(x, y) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = (-y, -x, 1) \rightarrow \|\vec{F}'_x(x, y) \times \vec{F}'_y(x, y)\| = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Entonces, reemplazando,

$$\text{área}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

dado que D es el círculo especificado, pasando a polares queda:

$$\text{área}(\Sigma) = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^3 \sqrt{1+r^2} \, r \, dr}_{\frac{1}{3}[(1+r^2)^{3/2}]_0^3} = \frac{10^{3/2}-1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{3} \pi (10^{3/2} - 1).$$

Integral de superficie

Consideremos una superficie Σ suave a trozos y simple de ecuación:

$$\vec{X} = \vec{F}(u, v) \text{ con } (u, v) \in D,$$

supondremos que Σ está incluida en una región abierta H de $\mathbb{R}^3$.

En estas condiciones, presentamos dos tipos de integrales de superficie como sigue.

Integral de superficie de campo escalar

Dado $f: H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, suponiendo f continuo en H (donde está incluida la superficie Σ), el símbolo

$\iint_{\Sigma} f \, d\sigma$ representa la integral de superficie de f sobre Σ , donde:

- f se evalúa en puntos de Σ ,
- $d\sigma = \|\vec{F}'_u \times \vec{F}'_v\| \, du \, dv$ es el diferencial de área de superficie,

con lo cual la fórmula de cálculo de la integral de superficie de campo escalar es:

$$\iint_{\Sigma} f \, d\sigma = \iint_D f(\vec{F}(u, v)) \|\vec{F}'_u(u, v) \times \vec{F}'_v(u, v)\| \, du \, dv. \quad (2)$$

Observe que $f(\vec{F}(u, v))$ es el valor del campo en cada punto de la superficie, el cual se multiplica por el diferencial de área. La integral “suma la colaboración de esos productos” en puntos de la superficie.

En particular, cuando $f(\vec{X}) = 1 \, \forall \vec{X} \in \Sigma$ resulta $\iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_D \|\vec{F}'_u(u, v) \times \vec{F}'_v(u, v)\| \, du \, dv = \text{área}(\Sigma)$.

En el caso general, el resultado de $\iint_{\Sigma} f \, d\sigma$ depende de la información que brinda f de la superficie.

Síntesis de definiciones y enunciados: S-9, versión 1.1

Los valores de f caracterizan a Σ desde el punto de vista que se la está analizando.

Para fijar ideas supongamos que Σ es una chapa en $\mathbb{R}^3$ de espesor despreciable, que tiene la forma de la superficie. Si adoptamos el metro² (m²) como unidad de medida de $d\sigma$, algunos ejemplos elementales son:

- $\iint_{\Sigma} \underbrace{f \, d\sigma}_{\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}} = \underbrace{\text{masa}(\Sigma)}_{\text{kg}}$, donde f es la densidad superficial de masa (también denotada δ).
- $\iint_{\Sigma} \underbrace{f \, d\sigma}_{\frac{\$}{\text{m}^2}} = \underbrace{\text{Costo}(\Sigma)}_{\$}$, donde f representa los \$/m² (costo por unidad de área) en cada punto.
- $\iint_{\Sigma} \underbrace{f \, d\sigma}_{\frac{\text{Coul}}{\text{m}^2}} = \underbrace{\text{Carga}(\Sigma)}_{\text{Coul}}$, donde f representa la densidad superficial de carga eléctrica.

Por otra parte, el **valor medio** f_{med} del campo escalar f en Σ , es el valor constante que debería tener para que su integral de superficie en Σ resulte de igual valor. Es decir,

$$\iint_{\Sigma} f \, d\sigma = \iint_{\Sigma} \underbrace{f_{\text{med}}}_{\text{constante}} \, d\sigma = f_{\text{med}} \iint_{\Sigma} d\sigma = f_{\text{med}} \text{área}(\Sigma),$$

de donde:

$$\boxed{f_{\text{med}} = \frac{1}{\text{área}(\Sigma)} \iint_{\Sigma} f \, d\sigma} \quad \text{valor medio de } f \text{ en } \Sigma \quad (3)$$

Ejemplo: Calcule el valor medio de $f(x, y, z) = yz$ sobre el trozo de plano Σ de ecuación $z = 3x$ con $x^2 + y^2 \leq 2y$.

Por ahora, como en el ejemplo anterior, no es necesario hacer una interpretación geométrica de la superficie pues tenemos su ecuación y la del dominio de integración D : $x^2 + y^2 \leq 2y$.

Una ecuación vectorial para la superficie es $\vec{X} = \underbrace{(x, y, 3x)}_{\vec{F}(x, y)}$ con $(x, y) \in D$.

La fórmula (2) queda $\iint_{\Sigma} f \, d\sigma = \iint_D f(\vec{F}(x, y)) \|\vec{F}'_x(x, y) \times \vec{F}'_y(x, y)\| \, dx \, dy$
 $f(\vec{F}(x, y)) = f(x, y, 3x) = 3xy$.

$$\vec{F}'_x(x, y) \times \vec{F}'_y(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3, 0, 1) \rightarrow \|\vec{F}'_x(x, y) \times \vec{F}'_y(x, y)\| = \sqrt{10}.$$

Para aplicar (3), debemos calcular dos integrales:

- $\text{área}(\Sigma) = \iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_D \underbrace{\|\vec{F}'_x(x, y) \times \vec{F}'_y(x, y)\|}_{\sqrt{10}} \, dx \, dy = \sqrt{10} \iint_D dx \, dy$
- $\iint_{\Sigma} f \, d\sigma = \iint_D \underbrace{f(\vec{F}(x, y))}_{3xy} \underbrace{\|\vec{F}'_x(x, y) \times \vec{F}'_y(x, y)\|}_{\sqrt{10}} \, dx \, dy = 3\sqrt{10} \iint_D xy \, dx \, dy$

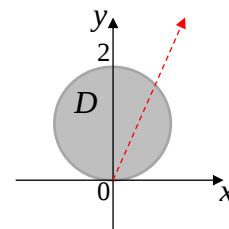
Sólo nos queda poner los límites de integración y operar, para ello veamos cuál es la región de integración D .

Completando cuadrados resulta:

$$x^2 + y^2 \leq 2y \rightarrow x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \rightarrow x^2 + (y-1)^2 \leq 1,$$

es decir, es un círculo de radio 1 centrado en $(0,1)$.

En este caso vemos que para “barrer la región” girando la semirrecta color rojo en sentido antihorario debemos trabajar con $0 \leq \theta \leq \pi$.



Por otra parte, la frontera de la región es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2y$, que pasada a polares (por simple reemplazo) tiene ecuación $r = 2\sin(\theta)$.

En cualquier posición intermedia (θ constante), tenemos que $0 \leq r \leq 2\sin(\theta)$, con esto podemos calcular las integrales antes indicadas.

$$\circ \text{ área}(\Sigma) = \sqrt{10} \iint_D dx dy = \sqrt{10} \int_0^\pi d\theta \underbrace{\int_0^{2\sin(\theta)} r dr}_{\frac{1}{2}[r^2]_0^{2\sin(\theta)}} = 2\sqrt{10} \underbrace{\int_0^\pi \sin^2(\theta) d\theta}_{[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin(2\theta)]_0^\pi} = \sqrt{10} \pi$$

$$\begin{aligned} \circ \iint_\Sigma f d\sigma &= 3\sqrt{10} \iint_D xy dx dy = 3\sqrt{10} \int_0^\pi d\theta \underbrace{\int_0^{2\sin(\theta)} r \cos(\theta) r \sin(\theta) r dr}_{\frac{1}{4} \cos(\theta) \sin(\theta) [r^4]_0^{2\sin(\theta)}} \\ &= 12\sqrt{10} \int_0^\pi \cos(\theta) \sin^5(\theta) d\theta = 12\sqrt{10} \left[\frac{1}{6} \sin^6(\theta) \right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Entonces, aplicando (3), resulta } f_{\text{med}} = \frac{1}{\text{área}(\Sigma)} \iint_\Sigma f d\sigma = \frac{1}{\sqrt{10} \pi} \cdot 0 = 0.$$

Las siguientes son otras aplicaciones en relación con una superficie Σ , con densidad de masa $\delta(x, y, z)$ en cada punto $(x, y, z) \in \Sigma$. Dado que la superficie está en $\mathbb{R}^3$, corresponden fórmulas similares a las vistas para un cuerpo, reemplazando la integral triple por la de superficie. Así tenemos:

Momentos estáticos respecto de los planos coordenados:

$$M_{xy}(\Sigma) = \iint_\Sigma z \delta(x, y, z) d\sigma, \quad M_{xz}(\Sigma) = \iint_\Sigma y \delta(x, y, z) d\sigma, \quad M_{yz}(\Sigma) = \iint_\Sigma x \delta(x, y, z) d\sigma$$

Coordenadas del centro de masa:

$$x_G = \frac{M_{yz}(\Sigma)}{\text{masa}(\Sigma)} = \frac{\iint_\Sigma x \delta(x, y, z) d\sigma}{\iint_\Sigma \delta(x, y, z) d\sigma}, \quad y_G = \frac{M_{xz}(\Sigma)}{\text{masa}(\Sigma)} = \frac{\iint_\Sigma y \delta(x, y, z) d\sigma}{\iint_\Sigma \delta(x, y, z) d\sigma}, \quad z_G = \frac{M_{xy}(\Sigma)}{\text{masa}(\Sigma)} = \frac{\iint_\Sigma z \delta(x, y, z) d\sigma}{\iint_\Sigma \delta(x, y, z) d\sigma}.$$

Momentos de inercia:

$$I_x(\Sigma) = \iint_\Sigma (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) d\sigma, \quad I_y(\Sigma) = \iint_\Sigma (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) d\sigma,$$

$$I_z(\Sigma) = \iint_\Sigma (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) d\sigma \quad \text{e} \quad I_0(\Sigma) = \iint_\Sigma (x^2 + y^2 + z^2) \delta(x, y, z) d\sigma.$$

Integral de superficie de campo vectorial (flujo)

Dado $\vec{f} : H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, suponiendo $\vec{f}$ continuo en H (donde está incluida la superficie Σ), el símbolo $\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma$ representa la **integral de superficie o flujo** de $\vec{f}$ a través de Σ , donde:

- $\vec{f}$ se evalúa en puntos de Σ ,
- $\vec{n}$ es el versor normal a Σ en cada punto de la superficie,
- $d\sigma = \|\vec{F}'_u \times \vec{F}'_v\| \, du \, dv$ es el diferencial de área de superficie.

A veces se denota $d\vec{\sigma} = \vec{n} \, d\sigma$ al diferencial vectorial de área de superficie. Dado que $\vec{n} = \frac{\vec{F}'_u \times \vec{F}'_v}{\|\vec{F}'_u \times \vec{F}'_v\|}$ es normal a Σ en cada uno de sus puntos, este producto resulta:

$$d\vec{\sigma} = \vec{n} \, d\sigma = \frac{\vec{F}'_u \times \vec{F}'_v}{\|\vec{F}'_u \times \vec{F}'_v\|} \|\vec{F}'_u \times \vec{F}'_v\| \, du \, dv = \vec{F}'_u \times \vec{F}'_v \, du \, dv.$$

Con esto, la fórmula de cálculo del flujo es:

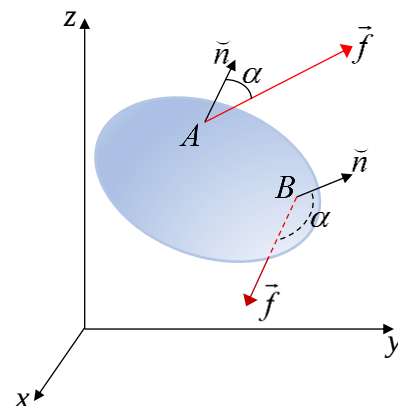
$$\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_D \vec{f}(\vec{F}(u,v)) \cdot \vec{F}'_u(u,v) \times \vec{F}'_v(u,v) \, du \, dv. \quad (4)$$

En el esquema de la derecha se representa, en dos puntos de la superficie, la posible situación del producto escalar

$$\vec{f} \cdot \vec{n} = \|\vec{f}\| \|\vec{n}\| \cos(\alpha) = \|\vec{f}\| \cos(\alpha),$$

que calcula la proyección “con su signo” de la longitud del vector según el $\vec{n}$ a la superficie.

En el punto A : $0 \leq \alpha < \pi/2 \rightarrow \cos(\alpha) > 0$. La proyección resulta positiva, indicando que la componente de $\vec{f}$ según $\vec{n}$ tiene la misma orientación que la normal, el campo atraviesa a Σ con la orientación de la normal considerada.



En el punto B : $\pi/2 < \alpha \leq \pi \rightarrow \cos(\alpha) < 0$. La proyección resulta negativa indicando que la componente de $\vec{f}$ según $\vec{n}$ tiene orientación opuesta a la normal, el campo atraviesa a Σ con la orientación contraria a la de la normal considerada.

Entonces, punto a punto de Σ , la integral “suma las colaboraciones $\vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma$ ” de la porción de campo que atraviesa a la superficie por el correspondiente diferencial de área. Por ello se habla de **flujo a través de la superficie**.

Un ejemplo elemental sería cuando $\vec{f}$ representa la velocidad de un fluido (por ejemplo, aire contaminado) que intenta pasar a través de un filtro, que tiene la forma de la superficie. En este caso a $\vec{f} \cdot \vec{n}$ le corresponde unidad de medida de velocidad, por ejemplo, $\frac{\text{metro}}{\text{segundo}}$ (m/s). Mientras que $d\sigma$ se expresaría en m^2 .

En este ejemplo: $\iint_{\Sigma} \underbrace{\vec{f} \cdot \vec{n}}_{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \underbrace{d\sigma}_{\text{m}^2} = \underbrace{\text{Caudal}}_{\frac{\text{m}^3}{\text{s}}}$, la cantidad de m^3/s de fluido que atraviesan a la superficie.

Hasta ahora, estamos hablando de la “intención del cálculo”, queremos tener una medida de “cuánto del campo atraviesa a la superficie”.

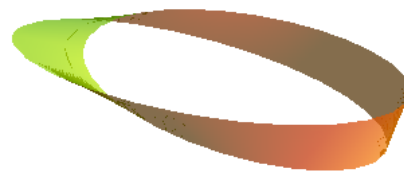
En esta línea interpretativa podemos decir que el flujo es nulo cuando en todo punto el campo es tangencial a la superficie (perpendicular a su normal), o bien, cuando se compensa la cantidad que atraviesa para un lado con la que pasa para el otro lado de la superficie.

Es claro que estamos suponiendo que la superficie tiene dos lados, por supuesto que siempre trabajaremos con superficies de este tipo, pero no todas cumplen con esta condición.

Un ejemplo de superficie que tiene un único lado es la de la banda o cinta de Möbius, que se representa a la derecha. Si la observa con atención verá que no es posible recorrer un lado, dejando el otro sin recorrer (porque no tiene otro, sólo tiene un lado).

Otro caso, que puede encontrarse fácilmente en línea, es el de la botella de Klein.

Pero esto es únicamente como comentario ilustrativo.



Para el cálculo de flujo es imprescindible que la superficie tenga dos caras, en ese caso se dice que **la superficie es orientable**. Cuando elegimos la orientación de la normal a la superficie, lo que hacemos es establecer la orientación que adoptamos para la superficie.

Es claro que, desde el punto de vista de presentación teórica, si la superficie tiene ecuación $\vec{X} = \vec{F}(u, v)$ con $(u, v) \in D$, la normal surge de $\vec{n} = \vec{F}'_u \times \vec{F}'_v$ y esto establece la orientación que esta parametrización le impone a la superficie.

De allí la fórmula de cálculo (4) pero, en la práctica, no siempre es esa la orientación que deseamos. Al igual que en la integral de línea de campo vectorial la parametrización elegida puede no orientar en la forma deseada, pero no es necesario reparametrizar, alcanza con conocer una de las propiedades que a continuación se comentan.

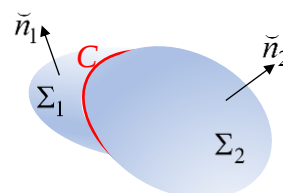
Propiedades de las integrales de superficie

Para calcular integrales de superficie es muy importante tener en cuenta las siguientes propiedades, en las cuales indicamos $\iint_{\Sigma} f$ para representar a ambos tipos de integrales, $\iint_{\Sigma} f d\sigma$ e $\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma$.

1. Con k constante, $\iint_{\Sigma} k f = k \iint_{\Sigma} f$.
2. $\iint_{\Sigma} f + g = \iint_{\Sigma} f + \iint_{\Sigma} g$.
3. Si $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ con $\text{área}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = 0$, entonces,

$$\iint_{\Sigma} f = \iint_{\Sigma_1} f + \iint_{\Sigma_2} f.$$

En el esquema de la derecha se representa el arco curva $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ que, como tal, tiene área nula y permite establecer la subdivisión de la superficie en $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Observe que, antes de considerar cada trozo de superficie por separado, la orientación de ambos es hacia el mismo lado de la superficie.



Esta propiedad habilita a trabajar con superficies suaves a trozos, sumando las integrales en cada uno de sus trozos.

4. *Influencia de la parametrización.* Debemos referirnos por separado para cada tipo de integral.

a) Integral de superficie de campo escalar:

Parametrizando Σ de manera que sea suave y simple, el resultado de la integral no depende de la parametrización.

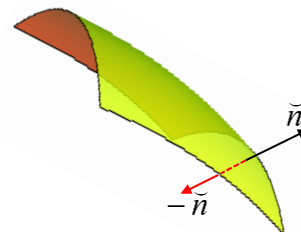
b) Integral de superficie de campo vectorial (flujo): Se supone Σ orientable.

Parametrizando Σ de manera que sea suave y simple, el resultado de la integral no depende de la parametrización siempre que se respete la orientación de la superficie, en caso contrario cambia el signo del resultado.

Si en cada punto de Σ , en lugar de usar el vector $\vec{n}$ usamos el $-\vec{n}$, orientamos la superficie en el sentido opuesto.

Recordemos que, geoméricamente hablando, la orientación de Σ se impone eligiendo la del vector normal.

Dado que $\vec{f} \cdot (-\vec{n}) = -\vec{f} \cdot \vec{n}$, $\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot (-\vec{n}) d\sigma = -\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma$.

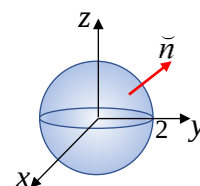


Si la superficie es suave a trozos, esta propiedad habilita –para ambos tipos de integrales– a usar una parametrización distinta en cada trozo, sin olvidar las condiciones indicadas en la propiedad anterior.

Los símbolos $\oiint_{\Sigma} f d\sigma$ y $\oiint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma$ significan que la superficie es cerrada. Cuando se trabaja con superficies cerradas es común presentarlas como la frontera ∂D de un cuerpo acotado D .

Por ejemplo, si el cuerpo D es el de una esfera con centro en el origen y radio igual a 2, queda definido por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$. Su superficie frontera ∂D tiene ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

En el ejemplo del dibujo se indica que ∂D está orientada con vector normal $\vec{n}$ saliente de D . Esta es la orientación típica que se adopta para el cálculo de flujo a través de superficies cerradas.

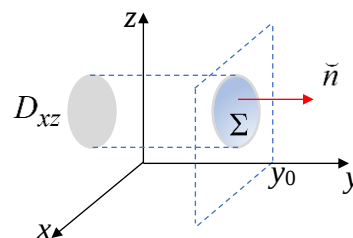


Orientada ∂D con $\vec{n}$ saliente de D , cuando $\oiint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma > 0$ se dice que *el flujo es saliente de D* , mientras que si $\oiint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma < 0$ *el flujo es entrante*.

Flujo a través de un trozo de plano paralelo a uno de los planos coordenados

Supongamos la superficie Σ incluida en el plano de ecuación $y = y_0$, como se representa en el dibujo. En este caso se la ha orientado con $\vec{n} = (0, 1, 0)$, es decir, hacia y^+ .

D_{xz} es la proyección de la superficie sobre el plano xz , tiene la misma forma que Σ y admite la ecuación $\vec{X} = \underbrace{(x, y_0, z)}_{\vec{F}(x,z)}$ con $(x, z) \in D_{xz}$.



En este caso, intentando aplicar la fórmula (4), el producto $\vec{F}'_x \times \vec{F}'_z = (0, -1, 0)$ tiene orientación opuesta a la deseada. Por ello, para el cálculo usamos directamente el opuesto (para algunas personas esto le resulta más claro que cambiar el signo del resultado de la integral). Con esto queda:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{D_{xz}} \vec{f}(x, y_0, z) \cdot (0, 1, 0) dx dz.$$

Conclusión: Cuando aplicamos la fórmula (4), puede que la orientación de la normal deseada sea opuesta a la orientación de $\vec{F}'_u \times \vec{F}'_v$. En ese caso tenemos dos alternativas:

- Calculamos según (4) y le cambiamos el signo al resultado,
- Usamos el vector opuesto a $\vec{F}'_u \times \vec{F}'_v$.

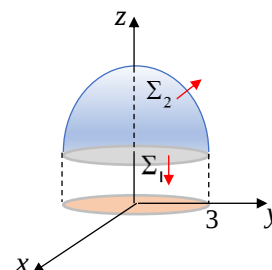
No apliquemos ambas, sólo una de ellas, pero en ambos casos debemos aclarar brevemente qué estamos haciendo.

Ejemplo: Dado $\vec{f}(x, y, z) = (2xz, 2yz, z^2)$, calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido mediante $1 \leq z \leq 10 - x^2 - y^2$.

El cuerpo D tiene superficie frontera es $\partial D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Las superficies Σ_1 y Σ_2 tienen en común la curva:

$$C = \begin{cases} z = 10 - x^2 - y^2 \\ z = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} 1 = 10 - x^2 - y^2 \\ z = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 1 \end{cases},$$

cuya proyección sobre el plano xy es la circunferencia frontera de la región D_{xy} definida por $x^2 + y^2 \leq 9$.



Dado que ∂D es superficie cerrada, vamos a orientarla en forma saliente de D , quedando:

$$\oiint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\Sigma_1} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\Sigma_2} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma, \quad (\#)$$

donde Σ_1 y Σ_2 deben orientarse según se indica en la figura.

Ecuación de Σ_1 : $z = 1$ con $(x, y) \in D_{xy}$. Como es un trozo de plano paralelo al plano xy , podemos calcular directamente la integral teniendo en cuenta que $\vec{n} = (0, 0, -1)$, mediante:

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \underbrace{\vec{f}(x, y, 1)}_{(2x, 2y, 1)} \cdot (0, 0, -1) dx dy = - \iint_{D_{xy}} dx dy = - \text{área}(D_{xy}) = -\pi 3^2 = -9\pi.$$

Ecuación de Σ_2 : $z = 10 - x^2 - y^2$ con $(x, y) \in D_{xy}$, que se la puede parametrizar mediante:

$$\vec{X} = \underbrace{(x, y, 10 - x^2 - y^2)}_{\vec{F}(x, y)} \text{ con } (x, y) \in D_{xy}.$$

En este caso $\vec{F}'_x(x, y) \times \vec{F}'_y(x, y) = (2x, 2y, 1)$ que claramente tiene la orientación deseada.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_2} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{D_{xy}} \vec{f}(x, y, 10 - x^2 - y^2) \cdot \frac{(2x, 2y, 1)}{\|(2x, 2y, 1)\|} \|(2x, 2y, 1)\| dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} [(2xz, 2yz, z^2)]_{z=10-x^2-y^2} (2x, 2y, 1) dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} [(10 - x^2 - y^2)^2 - 4(x^2 + y^2)^2 + 40(x^2 + y^2)] dx dy \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas polares queda:

$$\iint_{\Sigma_2} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 [(10 - r^2)^2 - 4r^4 + 40r^2] r dr = \dots = 981\pi$$

Reemplazando en (#): $\oiint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\Sigma_1} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\Sigma_2} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = -9\pi + 981\pi = 972\pi$, el flujo resulta saliente.