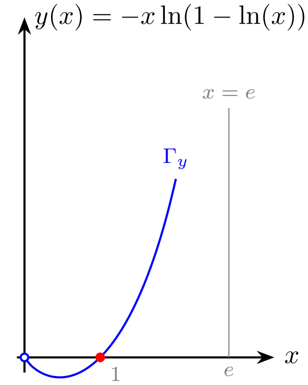
Los ejemplos resueltos de ecuaciones diferenciales de estas notas tienen el tenor de los ejercicios que integran el Trabajo Práctico XI de la Guía de Trabajos Prácticos.

---

1. Hallar la solución $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del siguiente problema de valor inicial, que involucra una ecuación diferencial homogénea de primer orden.

$$xy'(x) = y(x) + xe^{y(x)/x}, \quad y(1) = 0$$



♣ Dado que el intervalo en el que está definida la solución no puede contener a $x_0 = 0$, y debe incluir a $x_1 = 1$ (pues allí está dada la condición inicial), se tiene que debe ser $x > 0$, lo que permite reescribir la ecuación diferencial como

$$y'(x) = y(x)/x + e^{y(x)/x},$$

que con la sustitución $y(x) = xz(x)$ (y por lo tanto $y'(x) = z(x) + xz'(x)$) la simplifica en la siguiente ecuación diferencial de variables separables en la incógnita $z(x)$:

$$z(x) + xz'(x) = z(x) + e^{z(x)} \text{ esto es } xz'(x) = e^{z(x)}, \text{ o bien } \frac{\mathrm{d}z}{e^z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

De esta ecuación diferencial es inmediato que $-e^{-z(x)} = c + \ln(x)$, e imponiendo la condición inicial ($y(1) = 0$ equivale a $z(1) = 0$) es $c = -1$ de donde se tiene que $z(x) = -\ln(1 - \ln(x))$; pero regresando a la variable original la anterior es $y(x)/x = -\ln(1 - \ln(x))$, de donde finalmente resulta la solución del problema de valor inicial.

$$y : (0, e) \to \mathbb{R} \text{ tal que } y(x) = -x\ln((1 - \ln(x))$$

Observación. En la figura se muestra la gráfica Γ_y de la solución, que tiene una asíntota vertical en la recta de ecuaci on $x = e$; el intevalo abierto $I = (0, e)$ donde está definida la función y es maximal, no puede ser ampliado. Puede verse que este intervalo contiene el punto $x_1 = 1$ donde se establece la condición inicial.

2. Hallar la solución $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del siguiente problema de valor inicial, que involucra una ecuación diferencial exacta.

$$xy^2\,\mathrm{d}x + (yx^2 + 1)\,\mathrm{d}y = 0, \quad y(1) = 0$$

♣ Se sabe que si la ecuación diferencial $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ es tal que los campos escalares diferenciables P, Q cumplen en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ abierto simplemente conexo la condición de simetría $P_y(x, y) = Q_x(x, y), \forall(x, y) \in D$, entonces puede escribirse de un modo mucho más sencillo como $\mathrm{d}\Phi(x, y) = 0$ siendo Φ un campo escalar de clase C^2 en D, que puede hallarse con la siguiente expresión.

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{con cualquier } P_0 = (x_0, y_0) \in D$$

De la ecuación diferencial escrita como $\mathrm{d}\,\Phi(x, y) = 0$ resulta, dado el carácter de D que $\Phi(x, y) = c$ es la expresión que define implícitamente la solución. En este ejercicio $P(x, y) = xy^2, Q(x, y) = (yx^2 + 1)$ son C^∞ en el abierto simplemente conexo $D = \mathbb{R}^2$ y cumplen $P_y(x, y) = 2xy = Q_x(x, y), \forall(x, y) \in D$, de modo que, tomando $P_0 = (0, 0) \in D$ queda:

$$\Phi(x, y) = \int_0^x P(t, 0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x, t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y (x^2 t + 1)\,\mathrm{d}t = 0 + \left[\frac{1}{2}x^2t^2 + t\right]_0^y = \frac{1}{2}x^2y^2 + y$$

Puede verse que, efectivamente queda entonces la ecuación diferencial reescrita:

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2y^2 + y\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2y^2 + y = c$$

Imponiendo la condición inicial $y(1) = 0$ queda que $c = 0$, de donde se tiene la ecuación:

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + y = 0$$

Esta ecuación define implícitamente la solución, que en este caso, además admite una expresión explícita muy simple (en general, no será el caso), pues $\frac{1}{2}x^2y^2 + y = 0 = y(\frac{1}{2}x^2y + 1)$ de donde la única función que cumple la condición inicial es la siguiente (lo que, por otra parte se comprueba de inmediato reemplazando el la ecuación diferencial).

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } y(x) = 0$$

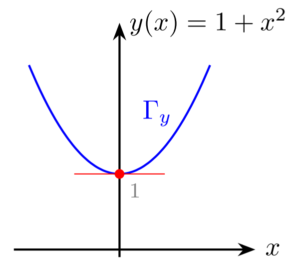
Observación. Es conveniente resolver este mismo problema, cambiando la condición inicial a $y(1) = 1$ y alcanzar una expresión explícita de la solución, mucho menos inmediata:

$$y : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \text{ tal que } y(x) = \frac{1}{x^2}(-1 + \sqrt{1 + 3x^2})$$

3. Hallar la solución $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del siguiente problema de valor inicial, que involucra una ecuación lineal de segundo orden reducible a primer orden. La solución debe ser tal que su gráfica tenga una recta tangenete horizontal en el punto $P_0 = (0, 1)$.

$$y''(x) + y'(x) = 2x + 2$$

♣ En primer lugar conviene decir que las condiciones iniciales exigen que $y(0) = 1, y'(0) = 0$; por otra parte, la sustitución $z(x) = y'(x)$, transforma la ecuación diferencial dada en la lineal de primer orden $z'(x) + z(x) = 2x + 2$, que multiplicada por su factor integrante $\mu(x) = e^x$ se convierte en $e^x z'(x) + e^x z(x) = e^x(2x + 2)$, lo que es equivalente a la inmediata $[e^x z(x)]' = e^x(2x + 2)$ de donde queda que $e^x z(x) = 2xe^x + c_1$, pero como $z(0) = y'(0) = 0$ resulta que $c_1 = 0$, de donde $z(x) = y'(x) = 2x$. Ahora es inmediato que $y(x) = x^2 + c_2$, y con la condición $y(0) = 1$ resulta $c_2 = 1$, luego la única solución del problema de valor inicial es $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y(x) = 1 + x^2$.



4. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales. En todos los casos, se sobrentiende que la incógnita es una función $y = y(x)$.

(a)

$$y' = \frac{2xy}{2x^2 + y^2}, \quad y(1) = 1$$

♣ La sustitución habitual $y(x) = xz(x)$ (y por lo tanto $y'(x) = z(x) + xz'(x)$) apropiada para las ecuaciones homogéneas (y que también transfiere la condición inicial a la nueva variable: $z(1) = y(1)/1 = 1$) permite reescribir la ecuación diferencial ahora en la incógnita $z = z(x)$.

$$z + xz' = \frac{2x^2z}{2x^2 + x^2z^2} = \frac{2z}{2 + z^2} \text{ o bien: } xz' = \frac{2z}{2 + z^2} - z = -\frac{z^3}{2 + z^2}$$

Agrupando términos en la anterior resulta la ecuación exacta (también es de variables separables) siguiente, de inmediata solución.

$$\left(\frac{2}{z^3} + \frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z + \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 0 \text{ y entonces } -\frac{1}{z^2} + \ln(z) + \ln(x) = c$$

La condición inicial $z(1) = 1$ permite obtener el valor de la constante $c = -1$, resultando:

$$\ln(xz) - \frac{1}{z^2} + 1 = 0$$

Retornando a la variable original resulta la ecuación que define implícitamente en un entorno $E(1)$ la única función que satisface el problema de valor inicial (observar que se dan las condiciones del teorema de Cauchy-Dini).

$$\ln(y) - \frac{x^2}{y^2} + 1 = 0 \text{ define implícitamente la única solución } y : E(1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

(b)

$$x^2 y' = y^2 + xy, \quad y(1) = 1$$

♣ Dado que el intervalo en el que está definida la solución no puede contener a $x_0 = 0$, y debe incluir a $x_1 = 1$ (pues allí está dada la condición inicial), se tiene que debe ser $x > 0$, lo que permite reescribir la ecuación diferencial como sigue.

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$$

La sustitución habitual $y(x) = xz(x)$ (y por lo tanto $y'(x) = z(x)+xz'(x)$) apropiada para las ecuaciones homogéneas (y que también transfiere la condición inicial a la nueva variable: $z(1) = y(1)/1 = 1$) conduce a la ecuación diferencial ahora en la incógnita $z = z(x)$.

$$z + xz' = z^2 + z \text{ o bien: } xz' = z^2 \text{ que equivale a } -\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z + \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0 \text{ y entonces } \frac{1}{z} + \ln(x) = c$$

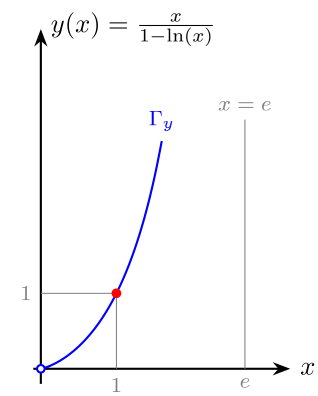
♣ La condición inicial $z(1) = 1$ permite obtener el valor de la constante $c = 1$ y retomando la variable original se tiene que la ecuación que define implícitamente la solución es un entorno de $x_0 = 1$ es:

$$\frac{x}{y} + \ln(x) = 1$$

A diferencia del ejercicio anterior, en este caso se puede obtener la expresión explícita de la solución del problema de valor inicial, dando el correspondiente intervalo maximal donde se encuentra definida:

$$y : (0, e) \to \mathbb{R} \text{ tal que } y(x) = \frac{x}{1 - \ln(x)}$$

En la figura se observa la gráfica de la solución, que presenta una asíntota vertical de ecuación $x = e$, mientras que en $x = 0$ se produce una discontinuidad evitable, dado que $\exists \lim_{x \to 0^+} y(x) = 0$.



(c)

$$3x^2 y \,\mathrm{d}x + (x^3 + \operatorname{sen}(y))\,\mathrm{d}y = 0, \quad y(1) = 0$$

♣ La ecuación diferencial $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ es exacta, pues los campos escalares $P(x, y) = 3x^2 y, Q(x, y) = (x^3 + \operatorname{sen}(y))$ son C^∞ en el abierto simplemente conexo $D = \mathbb{R}^2$ y cumplen $P_y(x, y) = 3x^2 = Q_x(x, y), \forall (x, y) \in D$, de modo que:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{con cualquier } P_0 = (x_0, y_0) \in D$$

La expresión anterior en este ejercicio, tomando $P_0 = (0, 0)$, se convierte en

$$\Phi(x, y) = \int_0^x (0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y (x^3 + \operatorname{sen}(t))\,\mathrm{d}t = 0 + \left[x^3 t - \cos(t)\right]_0^y = x^3 y - \cos(y) + 1$$

Entonces la ecuación diferencial es

$$\mathrm{d}\left(x^3 y - \cos(y) + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x^3 y - \cos(y) + 1 = c$$

Imponiendo la condición inicial $y(1) = 0$ queda que $c = 0$, de donde se tiene la ecuación que define implícitamente la solución del problema de valor inicial en un entorno $E(1)$, esto es una función $y: E(1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface tanto la condición inicial como la ecuación diferencial.

$$x^3y - \cos(y) + 1 = 0 \text{ define implícitamente la única solución } y : E(1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

(d)

$$2xyy' = x^2 - y^2, \quad y(3) = 2$$

♣ La ecuación responde al tipo de las homogéneas de primer orden y el método habitual produce la solución del problema de valor inicial, y se recomienda el buen ejercicio de recorrer esa ruta; sin embargo, también es conveniente notar que, en ocasiones, la forma de la ecuación puede simplificarse mucho con solo escribirla de otro modo, por ejemplo, así:

$$2xyy' + y^2 = x^2 \text{ o bien } [xy^2]' = x^2, \text{ de donde } xy^2 = \frac{1}{3}x^3 + c, \text{y como } y(3) = 2 \text{ queda } c = 3$$

De allí la solución del problema de valor inicial es:

$$y : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \text{ tal que } y(x) = \sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x}}.$$

(e)

$$(2xy^{-3} + 1)\,\mathrm{d}x - (3x^2y^{-4} - 2y)\,\mathrm{d}y = 0 \quad y(0) = 1$$

♣ La ecuación diferencial $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ es exacta, pues los campos escalares $P(x, y) = (2xy^{-3} + 1), Q(x, y) = -(3x^2y^{-4} - 2y)$ son C^∞ en el abierto simplemente conexo $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ y cumplen $P_y(x, y) = -6xy^{-4} = Q_x(x, y), \forall(x, y) \in D$, de modo que, tomando $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ queda:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{con cualquier } P_0 = (x_0, y_0) \in D$$

La expresión anterior en este ejercicio, tomando $P_0 = (0, 1)$ queda

$$\Phi(x, y) = \int_{0}^{x} (2t + 1)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{y} (2t - 3x^2t^{-4})\,\mathrm{d}t = \left[t^2 + t\right]_0^x + \left[t^2 + x^2t^{-3}\right]_1^y = x + x^2y^{-3} + y^2 - 1$$

Entonces la ecuación diferencial es

$$\mathrm{d}\left(x + x^2y^{-3} + y^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x + x^2y^{-3} + y^2 - 1 = c$$

Imponiendo la condición inicial $y(0) = 1$ queda que $c = 0$, de donde se tiene la ecuación que define implícitamente la solución del problema de valor inicial en un entorno $E(1)$, esto es una función $y : E(0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface tanto la condición inicial como la ecuación diferencial.

$$x + x^2y^{-3} + y^2 - 1 = 0 \text{ define implícitamente la única solución } y : E(0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

(f)

$$\left(\frac{y}{x} - 1\right)\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y = 0, \quad y(2) = 2$$

♣ Dado que el intervalo en el que está definida la solución no puede contener a $x_0 = 0$, y debe incluir a $x_1 = 2$ (pues allí está dada la condición inicial), se tiene que debe ser $x > 0$, lo que permite reescribir la ecuación diferencial como

$$(y - x) + xy' = 0 \text{ o bien } xy' + y = x \text{ que equivale a } [xy]' = x \text{ luego } xy = \frac{1}{2}x^2 + c$$

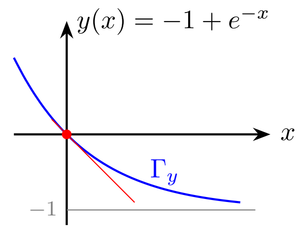
Imponiendo la condición inicial $y(2) = 2$ queda que $c = 2$ y entonces la solución del problema de valor inicial es:

$$y : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \text{ tal que } y(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

(g)

$$y'' + y' = 0, \quad y(0) = 0, \, y'(0) = -1$$

♣ La sustitución $z = y'$, transforma la ecuación diferencial dada en la lineal de primer orden $z' + z = 0$, que multiplicada por su factor integrante $\mu(x) = e^x$ se convierte en $e^x z' + e^x z = 0$, lo que es equivalente a la inmediata $[e^x z)]' = 0$ de donde queda que $e^x z = c_1$, pero como $z(0) = y'(0) = -1$ resulta que $c_1 = -1$, de donde $z = y' = -e^{-x}$. Ahora es inmediato que $y = e^{-x} + c_2$, y con la condición $y(0) = 0$ resulta $c_2 = -1$, luego la única solución del problema de valor inicial es $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y(x) = -1 + e^{-x}$.

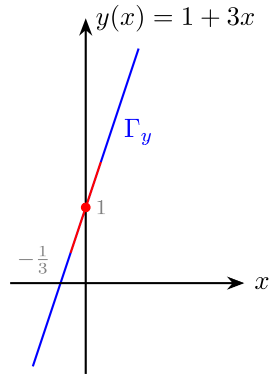


(h)

$$y'' = 0, \quad y(0) = 1, \, y'(0) = 3$$

♣ La sustitución $z(x) = y'(x)$, transforma la ecuación diferencial dada en la lineal de primer orden $z'(x) = 0$, de donde $z(x) = c_1$, pero como $z(0) = y'(0) = 3$ resulta que $c_1 = 1$, y entonces $z(x) = y'(x) = 3$. Resulta así que $y(x) = 3x + c_2$, y con la condición $y(0) = 1$ queda $c_2 = 1$, luego la única solución del problema de valor inicial es $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y(x) = 1 + 3x$.

Observación. El ejercicio, leído en clave geométrica hace innecesaria la secuencia seguida arriba para obtener la solución, pues está preguntando por todas las curvas de concavidad nula (esto se dice en $y'' = 0$), esto es todas las rectas, con pendiente en el origen 3 (esto se dice en $y'(0) = 3$), con ordenada al origen 1 (esto se dice en $y(0) = 1$). Naturalmente, no se necesitan las ecuaciones diferenciales para responder con la recta de ecuación $y = 1 + 3x$.



5. (a) Dadas las funciones escalares p y q, continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y el número real $n \neq 1$, probar que la ecuación de Bernoulli dada por $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)\, y^n(x)$ se puede reducir a una lineal de primer orden en la incógnita $z = z(x)$ mediante la siguiente sustitución:

$$z(x) = \frac{y^{1-n}(x)}{1-n}$$

♣ Derivando como función compuesta la función z resulta:

$$z'(x) = \left[\frac{y^{1-n}(x)}{1-n}\right]' = \frac{1-n}{1-n}\, y^{1-n-1}(x)\, y'(x) = y^{-n}(x)\, y'(x)$$

Reescribiendo la ecuación original $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)\, y^n(x)$ en la variable z se obtiene $z'(x) + (1-n)p(x)z(x) = q(x)$ que es, efectivamente, una ecuación diferencial de primer orden. Resuelta la ecuación en la variable z, luego se recupera mediante la sustitución original la función y, que resultará definida en un intervalo $I^\star$ incluido en I.

(b) Detallar el procedimiento para resolver el siguiente problema de valor inicial.

$$y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 2xy^2(x), \text{ tal que la gráfica de } y \text{ pase por } P_0 = (1, 1)$$

♣ En este ejemplo la función $p : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 1/x$ y la función $q : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 2x$ son continuas (de hecho, son de clase C^∞) en el intervalo $I = (0, +\infty)$; observar que el intervalo no puede incluir al cero, pero debe incluir a $x_0 = 1$, puesto que se exige que $y(1) = 1$. Por otra parte, es $n = 2 \neq 1$, de modo que la sustitución $z(x) = -1/y(x)$ con derivada $z'(x) = y'(x)/y^2(x)$ convierte la ecuación $y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 2xy^2(x)$ en la ecuación diferencial lineal en la incógnita z dada por $z'(x) - \frac{1}{x} z(x) = 2x$.

$$y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 2xy^2(x) \quad \longrightarrow \quad z'(x) - \frac{1}{x} z(x) = 2x, \text{ con } z(x) = -1/y(x)$$

La resolución de la ecuación diferencial lineal es rutinaria: multiplicando por el factor integrante $\mu(x) = \exp(\int(-1/x)\,\mathrm{d}x) = \exp(-\ln(x)) = \exp(\ln(1/x)) = 1/x$ se convierte en $(1/x)z'(x) - (1/x^2)z(x) = 2$ y entonces:

$$\left[\frac{z(x)}{x}\right]' = 2 \text{ o bien } \frac{z(x)}{x} = 2x + c, \text{ de donde es } z(x) = 2x^2 + cx$$

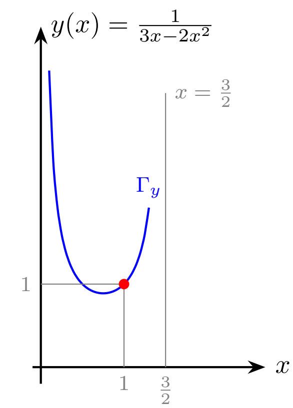
Regresando a la variable original mediante la sustitución original $y(x) = -1/z(x)$ se tiene que:

$$y(x) = -\frac{1}{2x^2 + cx}, \text{ imponiendo la condición } y(1) = 1 \text{ resulta } c = -3$$

De este modo, la única función que satisface el problema de valor inicial está definida en el intervalo $I^\star = (0, 3/2)$ (observar que el intervalo original $I = (0, +\infty)$ se ha reducido.

$$y : (0, 3/2) \to \mathbb{R} \text{ tal que } y(x) = \frac{1}{3x - 2x^2}$$

En la figura se observa la gráfica Γ_y de la solución, que presenta asíntotas verticales de ecuación $x = 0$ y $x = 3/2$.

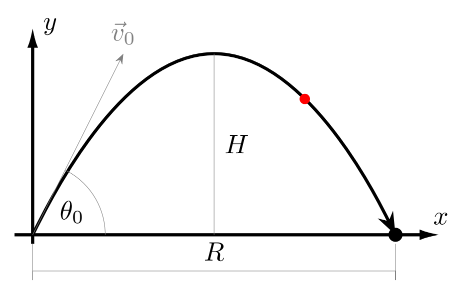


6. Se dispara verticalmente, en el instante $t = 0$, hacia arriba una partícula con velocidad $\vec{v}_0 = v_0\,\check{\jmath}$ (observar que entonces $v_0 > 0$) desde la posición $\vec{y}_0 = y_0\,\check{\jmath}$ (con $y_0 \geq 0$), bajo la única acción de la aceleración de la gravedad $\vec{g} = -g\,\check{\jmath}$. Determinar la máxima altura H_0 que asciende la partícula por encima del punto de disparo y el instante t_M en que alcanza esa altura. ¿En qué instante t_N alcanza el nivel del terreno $y = 0$ y con qué velocidad $\vec{v}_N$ lo impacta? Si, en particular, el dsiparo se hace a ras del terreno $(y_0 = 0)$ ¿Cuál es la velocidad de impacto en el regreso?

♣ La aplicación de la ley de Newton a la partícula de masa m conduce a la ecuación diferencial $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = -mg\,\check{\jmath}$ con la condición inicial $\vec{v}_0 = v_0\,\check{\jmath}$. Siendo $v = v(t)$ la rapidez de la partícula en el instante t, se tiene el problema de valor inicial $\dot{v}(t) = -g, \quad, v(0) = v_0$ cuya solución inmediata es $v(t) = v_0 - gt$. Como a su vez, $\dot{y}(t) = v(t) = v_0 - gt, \quad y(0) = y_0$, la solución resulta $y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. La altura máxima se alcanza en el instante t_M en que $v(t) = v_0 - gt$ se anula, esto es $t_M = v_0/g$, y su valor es $H_M = y(t_M) = v_0^2/(2g)$. El instante en que la partícula alcanza el nivel $y = 0$ resulta de igualar $y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$, resultando $t_N = (\sqrt{v_0^2 + 2gy_0} + v_0)/g$ y la correspondiente velocidad del impacto es $\vec{v}_N = \vec{v}(t_N) = -\sqrt{v_0^2 + 2gy_0}\,\check{\jmath}$. Si, en particular, es $y_0 = 0$, la velocidad del impacto es $\vec{v}_N = -v_0\,\check{\jmath}$, opuesta a la del disparo.

7. Sea el tiro oblicuo de la figura, con velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_0\cos(\theta_0)\,\check{\imath} + v_0\,\mathrm{sen}(\theta_0)\,\check{\jmath}$, con H la altura máxima y R el alcance del proyectil disparado en $t_0 = 0$.

   Escribir la ecuación paramétrica de la trayectoria y eliminar t para obtener la ecuación explícita $y = y(x)$. Determinar H y R, el instante t_H en que se alcanza la altura máxima y el instante t_R. Probar que, para un dado v_0, el alcance máximo se obtiene con $\theta_0 = \pi/4$.



♣ La ecuación diferencial del movimiento $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = -mg\,\check{\jmath}$ con la condición inicial $\vec{v}_0 = v_0\cos(\theta_0)\,\check{\imath} + v_0\sin(\theta_0)\,\check{\jmath}$, da origen a las ecuaciones diferenciales escalares en cada una de las dos componentes de la velocidad $\vec{v}(t) = v_x(t)\,\check{\imath} + v_y(t)\,\check{\jmath}$ siguientes, con sus soluciones inmediatas.

$$\begin{cases} \dot{v}_x(t) &= 0, \quad v_x(0) = v_0\cos(\theta_0) \to v_x(t) = v_0\cos(\theta_0) \\ \dot{v}_y(t) &= -g, \quad v_y(0) = v_0\,\mathrm{sen}(\theta_0) \to v_y(t) = v_0\,\mathrm{sen}(\theta_0) - gt \end{cases}$$

Ahora, considerando a su vez la condición inicial de la posición, esto es que en $t_0 = 0$ es $x(0) = y(0) = 0$ y las correspondientes definiciones $\dot{x}(t) = v_x(t)$, $\dot{y}(t) = v_y(t)$, resultan las ecuaciones diferenciales que permiten obtener la posición de la partícula en cualquier instante t.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &=& v_0\cos(\theta_0), \quad x(0)=0, \to x(t)=v_0\cos(\theta_0)t \\ \dot{y}(t) &=& v_0\,\mathrm{sen}(\theta_0)-gt, \quad y(0)=0 \to y(t)=v_0\,\mathrm{sen}(\theta_0)t-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

De esta manera, conocida la posición $(x(t),y(t))=(v_0\cos(\theta_0)t, v_0\,\mathrm{sen}(\theta_0)t-\frac{1}{2}gt^2)$, puede eliminarse t para obtener la ecuación de la trayectoria $y(x)=\tan(\theta_0)x-gx^2/(2v_0^2\cos^2(\theta_0))$.

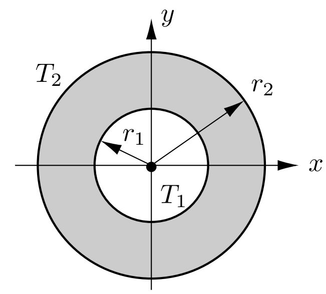
De las ecuaciones anteriores, es inmediato obtener las expresiones de la altura máxima alcanzada, del alcance del tiro, y de los instantes en que se producen.

$$H=\frac{v_0^2}{2g}\,\mathrm{sen}^2(\theta_0), R=\frac{v_0^2}{g}\,\mathrm{sen}(2\theta_0), t_H=\frac{v_0}{g}\,\mathrm{sen}(\theta_0), t_R=\frac{2v_0}{g}\,\mathrm{sen}(\theta_0)=2t_H$$

8. El modelo estacionario de distribución de temperaturas para un tubo macizo circular infinito de espesor r_2-r_1, con su superficie interior (radio r_1) a temperatura T_1, y su superficie exterior (radio r_2) a temperatura T_2 exige resolver la ecuación diferencial de Laplace

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0,$$

donde $T=T(r)$ es la temperatura a una distancia r del eje del cilindro (con $r_1\le r\le r_2$). Hallar y graficar $T(r)$ y determinar el flujo de calor por unidad de longitud del cilindro (recordando que la ley de Fourier establece la intensidad q del flujo por unidad de área como $q=-k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$, siendo k el coeficiente de conductibilidad del cilindro, supuesto constante.



♣ Aunque la ecuación de Laplace es de segundo orden, puede en este caso sencillo resolverse en etapas, como lo muestra la siguiente secuencia.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0 \text{ o bien } \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0 \text{ de donde } r\frac{dT}{dr}=C_1 \text{ entonces } \frac{dT}{dr}=\frac{C_1}{r} \text{ y queda } T(r)=C_1\ln(r)+C_2$$

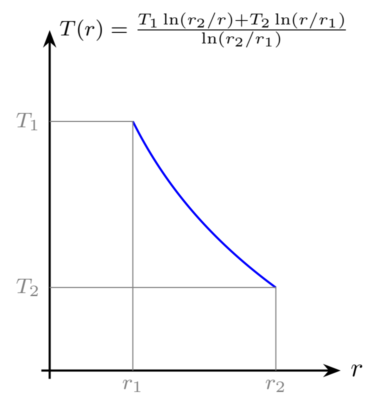
Los valores de las constantes C_1 y C_2 se obtienen de imponer las condiciones de frontera a las temperaturas, lo que conduce a la función temperatura T.

$$T(r_1)=T_1=C_1\ln(r_1)+C_2 \quad T(r_2)=T_2=C_1\ln(r_2)+C_2$$

$$C_1=\frac{T_2-T_1}{\ln(r_2/r_1)}, \quad C_2=T_1-\frac{T_2-T_1}{\ln(r_2/r_1)}\ln(r_1)=\frac{T_1\ln(r_2)-T_2\ln(r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$

Reemplazando las constantes C_1 y C_2 en $T(r)=C_1\ln(r)+C_2$ se tiene finalmente la tempertura.

$$T(r)=\frac{T_1\ln(r_2/r)+T_2\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}, \quad \text{para } r_1\le r\le r_2$$



Ahora, siguiendo la ley de Fourier, si Q es el flujo de calor por unidad de tiempo, el flujo por unidad de área perpendicular a la dirección radial es para una longitud L dado por $q(r)=Q/(2\pi rL)$. Entonces se tiene que el flujo por unidad de longitud $q^\star=Q/L$ está dado por la siguiente expresión.

$$q(r)=\frac{Q}{2\pi rL}=-k\frac{dT}{dr}=-k\frac{C_1}{r}=\frac{k}{r}\frac{T_1-T_2}{\ln(r_2/r_1)} \Rightarrow q^\star=\frac{Q}{L}=2k\pi\frac{T_1-T_2}{\ln(r_2/r_1)}$$

Observación. El valor de $q^\star$ es un parámetro de diseño de instalaciones termomecánicas, pues es la pérdida que cada metro de tubería sufre en el transporte de fluido.

9. Un cuerpo a temperatura T mayor que la temperatura del ambiente T_a se enfría siguiendo la ley de Newton si para una constante $k > 0$ satisface la ecuación diferencial $\mathrm{d}T/dt = -k(T - T_a)$. Determinar la temperatura del cuerpo si inicialmente es $T(0) = T_0$. Si, en particular es $T_0 = 20\,°\mathrm{C}, T_a = 10\,°\mathrm{C}$ y en el instante $t_1 = 60\,\mathrm{s}$ la temperatura es $T_1 = T(t_1) = 15\,°\mathrm{C}$, determinar el valor de k y el instante en que el cuerpo se hallará $1\,°\mathrm{C}$ por encima de la temperatura ambiente.

♣ La ecuacón diferencial es de resolución inmediata, pues separando las variables se escribe como $\mathrm{d}T/(T - T_a) = k\,\mathrm{d}t$ cuya solución es $\ln(T - T_a) = -kt + c_1$, siendo con la condición inicial $c_1 = \ln(T_0 - T_a)$, y de esta manera queda que $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$. En el caso particular, reemplazando los valores, es $5/10 = e^{-kt_1}$ de donde se tiene que $k = \frac{\ln(2)}{t_1}$. Una vez obtenido el valor de k es cómodo introducirlo en la expresión de la temperatura.

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)\left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_1}$$

Solo resta determinar el instante t_2 en que la temperatura es $T_2 = T(t_2) = 11\,°\mathrm{C}$, lo que se reduce a resolver la ecuación con incógnita t dada por

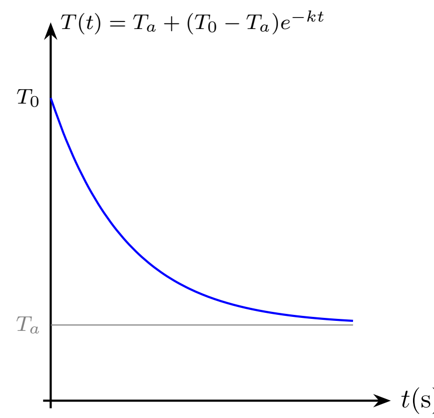
$$T_2 = T_a + (T_0 - T_a)\left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_1}$$

Reemplazando los valores correspondientes esto equivale a:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_1} = \frac{T_2 - T_a}{T_0 - T_a} = \frac{1}{10}$$

Y de allí, finalmente, el instante t_2:

$$t_2 = \frac{\ln(10)}{\ln(2)}t_1 = 60\frac{\ln(10)}{\ln(2)}\ \mathrm{s} \approx 199\ \mathrm{s}$$



10. La rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente. Si inicialmente la cantidad de sustancia es $x_0 = 50\,\mathrm{g}$ y al cabo de tres días solo quedan $10\,\mathrm{g}$, determinar el porcentaje de la cantidad incicial que quedará al cabo de cuatro días.

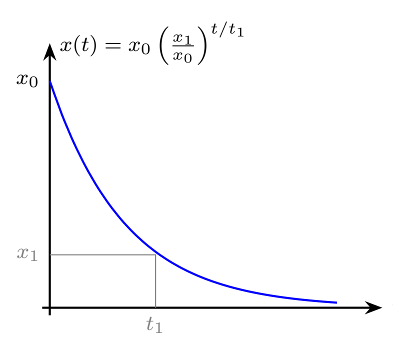
♣ Llamando $x(t)$ a la cantidad de sustancia en el instante t, la ecuación diferencial del proceso es, para $k > 0$, dada por $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -kx$, y los datos establecen que $x(0) = x_0 = 50\,\mathrm{g}$, que en $t_1 = 3$ días es $x_1 = x(t_1) = 10\,\mathrm{g}$, y siendo $t_2 = 4$ días, con $x_2 = x(t_2)$ la cantidad remanente en ese momento, se pregunta por la relación porcentual x_2/x_0.

La ecuación diferencial es de resolución inmediata, pues separando las variables se escribe como $\mathrm{d}x/x = -k\,\mathrm{d}t$ cuya solución es $\ln(x) = -kt + c_1$, siendo con la condición inicial $c_1 = \ln(x_0)$, y de esta manera queda que $x(t) = x_0e^{-kt}$. De esta ecuación, resulta que $x(t_1) = x_1 = x_0e^{-kt_1}$, de donde puede obtenerse k, o mejor aún, $e^{-k} = (x_1/x_0)^{1/t_1}$, de modo que ya se tiene, en función de los datos conocidos, la ecuación que devuelve la cantidad $x(t)$ de sustancia presente en el instante t como $x(t) = x_0\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{t/t_1}$.

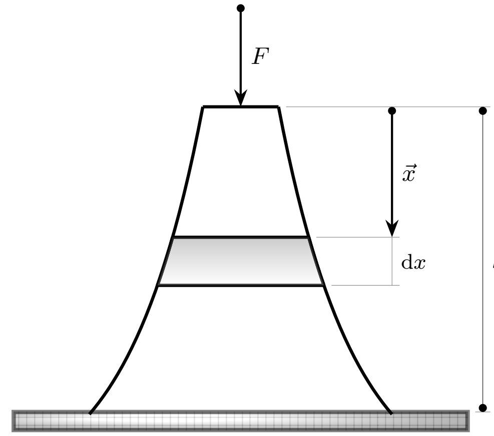
Como se conoce el instante $t_2 = 4$ días el cálculo de la cantidad remanente en en ese momento resulta del reemplazo directo en la ecuación anterior.

$$x(t_2) = x_2 = x_0\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{t_2/t_1},\ \text{y entonces es}\ \frac{x_2}{x_0} = \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{t_2/t_1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4/3} \approx 0,117$$

Lo que expresado en porcentaje es aproximadamente, un 12%.



11. El pilar sólido de altura h de la figura soporta en su cumbrera la carga de intensidad F, es de material homogéneo de peso específico γ y en condiciones de sevicio admite una tensión de compresión σ. Se quiere diseñarlo de tal manera que en todas sus secciones horizontales se aproveche su máxima capacidad (por tal motivo se lo llama *sólido de igual resistencia a la compresión*). Determinar la forma del sólido, y el área que debe tener en la base.
Observación: tener en cuenta que, además de la carga F, el pilar debe soportar, en cualquier sección horizontal, el propio peso que queda por encima de esa sección.



♣ Con el eje x orientado como indica la figura, sea $A(x)$ el área de la sección a la distancia x de la cumbrera, y sobrentendiendo el teorema del valor medio, considerando la rebanada sombreada de la figura, el planteo se limita a igualar el peso de la rebanada ($\gamma A(x)\mathrm{d}x$) con la fuerza vertical ascendente que solo puede estar proporcionada por la diferencia $\mathrm{d}A(x)$ de áreas entre la sección superior e inferior ($\sigma \mathrm{d}A(x)$), ya que la tensión σ es constante. Por otra parte, es conocido el valor $A_0 = A(0) = F/\sigma$.

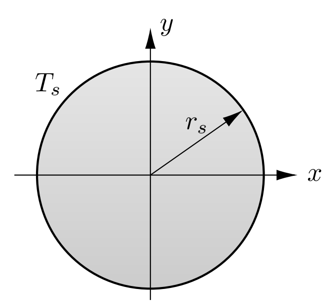
$$\sigma \mathrm{d}A(x) = \gamma A(x)\mathrm{d}x, \quad A(0) = F/\sigma \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}A}{A} = \frac{\gamma}{\sigma}\int \mathrm{d}x, \text{ que con la condición inicial da } A(x) = \frac{F}{\sigma}e^{\frac{\gamma}{\sigma}x}$$

Una vez obtenida la expresión anterior, el área de la base es inmediata: basta reemplazar x por h. Observar que el área de la base tiene una relación con el área en la cumbre dada por $A(h)/A(0) = \exp(\gamma h/\sigma)$, que es independiente de la carga externa F.

12. El problema de conducción de calor en régimen estacionario en un cilindro infinito macizo homogéneo de conductividad térmica k, con su superficie exterior (radio $r = r_s$) a temperatura $T = T_s$, con generación interna de calor de intensidad por unidad de volumen $g > 0$ exige resolver la ecuación de Poisson:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{g}{k} = 0.$$

Hallar y graficar la temperatura en función del radio $T(r)$ (en particular determinar la temperatura T_e en el eje del cilindro) y calcular el flujo de calor disipado por unidad de longitud $q^\star$ a través de la supeficie del cilindro.



♣ Aunque la ecuación de Poisson es de segundo orden, puede en este caso sencillo resolverse en etapas, como lo muestra la siguiente secuencia.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{g}{k} \text{ o bien } \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{gr}{k} \text{ de donde } r\frac{dT}{dr} = C_1 - \frac{gr^2}{2k} \text{ entonces } \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r} - \frac{gr}{2k}$$

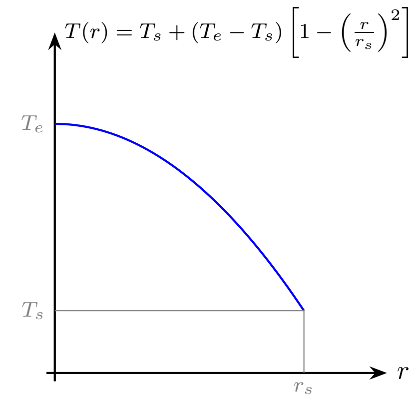
Integrando en esta última expresión resulta la expresión de la temperatura, con dos constantes C_1 y C_2 que se determinan por la condición de contorno $T(r_s) = T_s$ y la condición de acotación de la temperatura en el eje ($r = 0$) del cilindro.

$$T(r) = C_1 \ln(r) + C_2 - \frac{gr^2}{4k} \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = T_s + \frac{gr_s^2}{4k} \text{ y entonces queda } T(r) = T_s + \frac{gr_s^2}{4k}\left[1 - \left(\frac{r}{r_s}\right)^2\right]$$

La tempaeratura T_e en el eje del cilindro se obtiene haciendo en la ecuación anterior $r = 0$ resultando así:

$$T_e = T_s + \frac{gr_s^2}{4k}, \text{ y también la expresión adimensional } \frac{T - T_s}{T_e - T_s} = 1 - \left(\frac{r}{r_s}\right)^2$$

Ahora, siguiendo la ley de Fourier ($q = -k\frac{dT}{dr}$), si Q es el flujo de calor por unidad de tiempo, el flujo por unidad de área perpendicular a la dirección radial es, para una longitud L, dado por $q(r) = Q/(2\pi r L)$. Entonces se tiene que el flujo por unidad de longitud $q^\star = Q/L$ está dado por la siguiente expresión.



$$q(r) = \frac{Q}{2\pi r L} = -k\frac{dT}{dr} = -k\frac{-gr}{2k} = \frac{gr}{2} \Rightarrow q^\star(r) = \frac{Q}{L} = 2\pi r\frac{gr}{2} = \pi g r^2$$

En la superficie se disipa, por unidad de longitud, la cantidad $q^\star(r_s) = \pi g r_s^2$.

Textos. Esta limitada selección de ejercicios puede ser, con muchísimo provecho, completada por los múltiples ejemplos que se presentan en los libros de texto, que además se hallan acompañados por discusiones previas y posteriores de los fundamentos y motivaciones de tales ejemplos.

Birkhoff, G., Rota, G.-C. (1989). Ordinary Differential Equations (Cuarta edición ed.). Singapore: John Wiley and Sons.

Blanchard, P., Devaney, R., y Hall, G. (1999). Ecuaciones diferenciales (Tercera edición). México, D. F.: Paraninfo.

Kreyszig, E. (1993). Advanced Engineering Mathematics (Séptima edición). Singapore: John Wiley and Sons.

Simmons, G. (1991). Differential Equations with applications and historical notes. Second Edition. With a new chapter on numerical methods by John S. Robertson (Segunda edición ed.). New York: McGraw-Hill.

Spiegel, M. (1984). Ecuaciones diferenciales aplicadas (Tercera edición). (H. Rivera García, Trad.) México: Prentice Hall.

Zill, D. (2007). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (Segunda Edición). (E. Ojeda Peña, and Á. Cofré Mata, Trads.) México: Thomson.