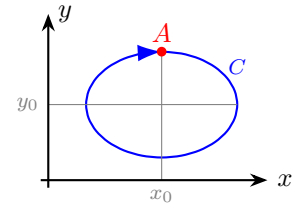


Los ejemplos resueltos de integrales curvilíneas de estas notas tienen el tenor de los ejercicios que integran el Trabajo Práctico VII de la [Guía de Trabajos Prácticos](#).

1. **Parametrización y orientación de curvas.** Para cada una de las siguientes curvas dar una parametrización regular que induzca la orientación indicada y graficar la curva indicando el punto inicial y final.

(a) $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}^+, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R} \right\}$, orientada en sentido horario.

♣ La función vectorial $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (x_0 + a \sin(t), y_0 + b \cos(t))$ parametriza regularmente la elipse y la orienta en sentido horario, iniciando (y terminando) en el punto rojo $A = (x_0, y_0 + b)$ de la figura, pues $\vec{\sigma}(0) = (x_0, y_0 + b) = \vec{\sigma}(2\pi)$. Otra parametrización con la misma orientación (pero duplicando la rapidez) es $\vec{\omega} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\omega}(t) = (x_0 + a \sin(2t), y_0 + b \cos(2t))$.

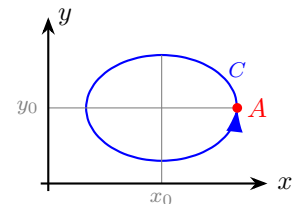


En general, si se introduce una constante positiva k en la parametrización de la elipse de modo de tener $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (x_0 + a \sin(kt), y_0 + b \cos(kt))$, el efecto de k es aumentar o disminuir la velocidad del recorrido de la curva, según que k sea mayor o menor que 1, respectivamente. Desde luego, si se deja dominio en el intervalo $[0, 2\pi]$, el aumento de velocidad hará que se supere una vuelta (y su disminución, que no llegue a completarse la vuelta). Si se pone $k < 0$, la orientación será invertida.

Este interactivo [FIUBA applet-elipse](#) ha sido creado precisamente para observar de manera instantánea los impactos en la geometría de los parámetros algebraicos, a la vez que permite observar dos parametrizaciones simultáneas, registrando visulamente las carreras entre las partículas.

(b) $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}^+, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R} \right\}$, orientada en sentido antihorario.

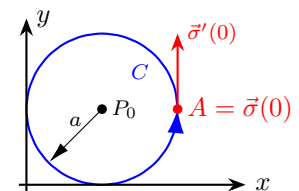
♣ La función vectorial $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (x_0 + a \cos(t), y_0 + b \sin(t))$ parametriza regularmente la elipse y la orienta en sentido antihorario, iniciando (y terminando) en el punto rojo $A = (x_0 + a, y_0)$ de la figura, pues $\vec{\sigma}(0) = (x_0 + a, y_0) = \vec{\sigma}(2\pi)$.



Puede observarse que, de haberse querido, también se pudo haber cambiado la orientación de esta curva con solo cambiar el signo del argumento en la parametrización original dada en (a); teniendo en cuenta que $\sin(-t) = -\sin(t)$ y que $\cos(-t) = \cos(t)$, la parametrización en sentido antihorario, pero ahora partiendo de $(x_0, y_0 + b)$ resultaría $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (x_0 - \sin(t), y_0 + b \cos(t))$.

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2\}$, con $a \in \mathbb{R}^+$, orientada en sentido antihorario.

♣ La función vectorial $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (a + a \cos(t), a + a \sin(t))$ parametriza regularmente la circunferencia y la orienta en sentido antihorario, iniciando (y terminando) en el punto rojo $A = (2a, a)$ de la figura, pues $\vec{\sigma}(0) = (2a, a) = \vec{\sigma}(2\pi)$.

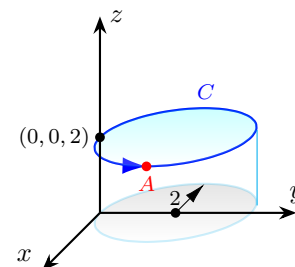


Naturalmente, esta curva no es sino un caso particular de la misma (a) con los semiejes iguales e iguales a las coordenadas del centro, esto es $x_0 = y_0 = a = b$, lo que produce la circunferencia centrada en el punto $P_0 = (0, 0)$ de la figura. También se observa la velocidad en el punto A: el vector $\sigma'(0) = (0, a)$. Si se quisiera orientar la curva en sentido inverso, circulando como las agujas del reloj y manteniendo el mismo punto de inicio, bastaría la parametrización $\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\gamma}(t) = (a + a \cos(t), a - a \sin(t))$.

También es pertinente observar que la parametrización $\vec{\omega} : [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\omega}(t) = (a + a \cos(t), a + a \sin(t))$ parametriza la misma curva, pero ya perdiendo inyectividad, dado que es recorrida tres veces. En las integrales curvilíneas esta cuestión es de importancia: si se calculase, por ejemplo, la longitud de una curva, debe cuidarse de recorrerla solo una vez con la parametrización, en caso contrario el resultado devolverá la longitud triplicada, puesto que se la ha recorrido tres veces.

- (d) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - 2)^2 = 4, z = 2\}$, orientada de modo que en el punto $(2, 2, 2)$ la segunda componente del vector tangente sea positiva.

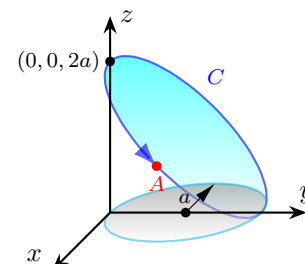
♣ La curva C está contenida en el cilindro de ecuación $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ a la vez que en el plano horizontal de ecuación $z = 2$; esta consideración basta para asegurar que $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{\sigma}(t) = (2 \cos(t), 2 + 2 \sin(t), 2)$ parametriza regularmente la curva, iniciando (y terminando) en el punto rojo $A = (2, 2, 2)$ de la figura, pues $\vec{\sigma}(0) = (2, 2, 2) = \vec{\sigma}(2\pi)$. Por otra parte, $\vec{\sigma}'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t), 0)$, de donde $\vec{\sigma}'(0) = (0, 2, 0)$, cumple con la orientación pedida.



Se puede observar algo que es propio de todas las curvas planas: su vector tangente debe evolucionar manteniéndose constantemente en el plano de ecuación $z = 2$ (sombreado celeste), y entonces, normal a una normal al plano. Es lo que sucede aquí, el vector tangente $\vec{\sigma}'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t), 0)$ es, para cualquier t , normal al eje z .

- (e) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - a)^2 = a^2, y + z = 2a, \text{ con } a \in \mathbb{R}^+\}$, orientada de modo que en el punto (a, a, a) la tercera componente del vector tangente sea negativa.

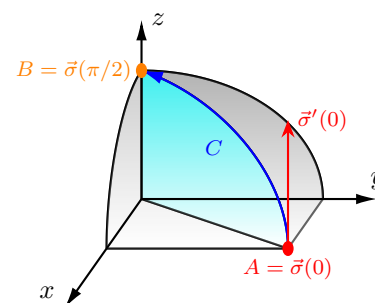
♣ La curva C está contenida en el cilindro de ecuación $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ a la vez que en el plano paralelo al eje x de ecuación $z = 2a - y$; esta consideración basta para asegurar que $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{\sigma}(t) = (a \cos(t), a + a \sin(t), a - a \sin(t))$ parametriza regularmente la curva, iniciando (y terminando) en el punto rojo $A = (a, a, a)$ de la figura, pues $\vec{\sigma}(0) = (a, a, a) = \vec{\sigma}(2\pi)$. Por otra parte, $\vec{\sigma}'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), -a \cos(t))$, de donde $\vec{\sigma}'(0) = (0, a, -a)$, cumple con la orientación pedida.



Se reitera la observación anterior para las curvas planas: su vector tangente debe evolucionar manteniéndose en el plano de ecuación $z + y = 2a$ (sombreado celeste), y entonces, normal a cualquier vector normal al plano, tal como $\vec{n} = (0, 1, 1)$. Es lo que sucede aquí, el vector tangente $\vec{\sigma}'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), -a \cos(t))$ es, para cualquier t , normal al vector $\vec{n} = (0, 1, 1)$, pues $\vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{n} = 0$.

- (f) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, y^2 + 4z^2 = 4, 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z\}$, orientada en sentido ascendente.

♣ La curva C , intersección de los dos cilindros, puede parametrizarse regularmente con $\vec{\sigma} : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{\sigma}(t) = (\cos(t), 2 \cos(t), \sin(t))$ parametriza regularmente la curva, iniciando en el punto rojo $A = (1, 2, 0)$ de la figura, pues $\vec{\sigma}(0) = (1, 2, 0)$ y terminando en el punto naranja $B = (0, 0, 1)$, pues $\vec{\sigma}(\pi/2) = (0, 0, 1)$. La orientación es, efectivamente, ascendente, pues $\vec{\sigma}'(t) = (-\sin(t), -2 \sin(t), \cos(t))$ tiene la tercera componente positiva en el intervalo $0 \leq t < \pi/2$.

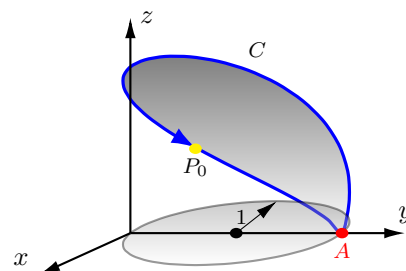


¿Cómo se llegó a esa parametrización de la curva? Conviene decir que por lo general se recurren a parametrizaciones conocidas. En este caso, la condición $x^2 + z^2 = 1$ se satisface con $x = \cos(t), z = \sin(t)$, de modo que solo queda asignar el casillero de y : pero debe cumplirse que $y^2 + 4z^2 = 4$, y como ya se asignó $z = \sin(t)$, es que se advierte que basta hacer $y = 2 \cos(t)$. Observar además que se ha graficado el vector velocidad en el arranque $\vec{\sigma}'(0)$ apuntando hacia arriba al iniciar el movimiento: ese vector rojo se va moviendo con el movimiento ubicándose tangente a la trayectoria en cada punto, pero su tercera componente, que se mantiene positiva, manifiesta que el movimiento es ascendente (lo que desde el punto de vista intuitivo es evidente, por otra parte).

Ulteriormente, es interesante observar que esta curva es plana, puesto que cualquiera sea t se cumple $y = 2x$, y puede comprobarse que un vector normal a ese plano (sombreado celeste en la figura) tal como $\vec{n} = (2, -1, 0)$ es normal al vector tangente a la curva en cualquier punto, pues el producto escalar es $\vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{n} = 0$, cualquiera sea t .

- (g) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 2y, z \geq 0\}$, orientada de modo que en el punto $P_0 = (1, 1, \sqrt{2})$ el vector tangente tenga la tercera componente negativa.

♣ La curva C (de Viviani), intersección del cilindro con la esfera, puede parametrizarse regularmente con $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{\sigma}(t) = (-\sin(t), 1 + \cos(t), 2\sin(t/2))$, iniciando (y terminando) en el punto rojo $A = (0, 2, 0)$ de la figura, pues $\vec{\sigma}(0) = (0, 2, 0) = \vec{\sigma}(2\pi)$. La orientación es, efectivamente, la requerida, pues $\vec{\sigma}'(t) = (-\cos(t), -\sin(t), \cos(t/2))$ es tal que en $t_0 = 3\pi/2$ (que es donde $\vec{\sigma}(t_0) = P_0$) tiene su vector tangente dirigido por $\vec{\sigma}'(t_0) = (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.



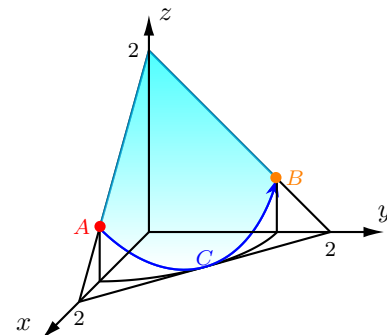
Para la conocida curva de este ejercicio que remite a un problema de repercusión planteado hace más de tres siglos, ha sido creado específicamente este interactivo [FIUBA applet curva de Viviani](#) que añade a la explicación la posibilidad de manipular las perspectivas y las superficies que se intersectan para definir la curva.

¿Cómo se llegó a esa parametrización de la curva? En lugar del problema particular, se presenta el problema general de la intersección de la semiesfera dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, z \geq 0$ con el cilindro dado por $x^2 + y^2 = 2ay$ (el enunciado del problema corresponde al caso $a = 1$). El detalle comienza por completar cuadrados en la expresión $x^2 + y^2 = 2ay$, que equivale a $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, o lo que es lo mismo $x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2$ y de allí se tiene la ecuación del cilindro $x^2 + (y - a)^2 = a^2$. Desde aquí se comprende que la elección $x = -a\sin(t), y - a = a\cos(t)$ responde a esa ecuación (la elección del signo menos en x resulta de la orientación pretendida). Lo que resta es sencillamente reemplazar en la ecuación de la esfera, quedando $2a^2 + 2a^2\cos(t) + z^2 = 4a^2$. De esta expresión es $z^2 = 2a^2(1 - \cos(t)) = 4a^2\sin^2(t/2)$ [recordar la identidad $1 - \cos(t) = 2\sin^2(t/2)$], y como $z \geq 0$, esto es $z = 2a\sin(t/2)$.

Observación. Esta curva cerrada difiere de las otras curvas cerradas vistas hasta aquí en una cuestión fundamental: es claro que el punto de inicio y terminación A es tal que $\vec{\sigma}(0) = A = \vec{\sigma}(2\pi)$, pero en cambio, y esta es la singularidad ¡ $\vec{\sigma}'(0) = (-1, 0, 1) \neq (-1, 0, -1) = \vec{\sigma}'(2\pi)$!, lo que puede casi “verse” en la figura, pues en el arranque la partícula está subiendo, mientras que tras su vuelta, está bajando, de ahí el cambio de signo en la tercera componente.

- (h) La curva C es la intersección (primer octante) entre el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 2$ y el plano de ecuación $x + y + z = 2$, orientada de manera que su vector tangente tenga segunda componente positiva.

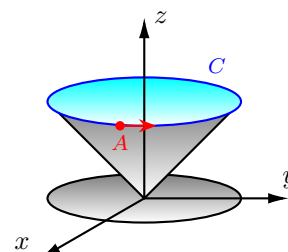
♣ La curva se encuentra en el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 2$ y también en el plano de ecuación $z = 2 - x - y$. Una parametrización regular de la curva puede ser $\vec{\sigma} : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(t) = (\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\sin(t), 2 - \sqrt{2}\cos(t) - \sqrt{2}\sin(t))$, que la recorre en el sentido indicado por la figura. El vector velocidad es entonces $\vec{\sigma}'(t) = (-\sqrt{2}\sin(t), \sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\sin(t) - \sqrt{2}\cos(t))$, cuya segunda componente en el intervalo $0 \leq t < \pi/2$ es positiva, como se requiere. Se inicia en $A = \vec{\sigma}(0) = (\sqrt{2}, 0, 2 - \sqrt{2})$ y finaliza en $B = \vec{\sigma}(\pi/2) = (0, \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.



La curva C es plana, se encuentra contenida en el plano de ecuación $x + y + z = 2$ (sombreado celeste en la figura), un vector normal a ese plano es $\vec{n} = (1, 1, 1)$, y el vector velocidad que evoluciona a lo largo de la curva debe necesariamente ser ortogonal a $\vec{n}$. Es lo que algebraicamente sucede: el producto escalar entre $\vec{\sigma}'(t) = (-\sqrt{2}\sin(t), \sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\sin(t) - \sqrt{2}\cos(t))$ y $\vec{n}$ es $\vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{n} = 0$.

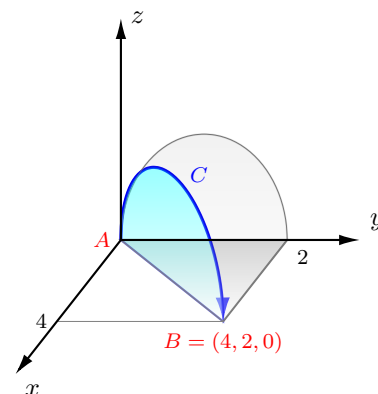
- (i) La curva C es la intersección entre el cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano de ecuación $z = 2$, orientada de manera que su vector tangente tenga en el punto $A = (2, 0, 2)$ segunda componente positiva.

♣ La curva se encuentra en el cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y también en el plano de ecuación $z = 2$. Una parametrización regular de la curva puede ser $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 2)$, que la recorre en el sentido indicado por la figura. El vector velocidad es entonces $\vec{\sigma}'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t), 0)$, cuya segunda componente en el punto $A = (2, 0, 2)$ es positiva. Se inicia y finaliza en $A = \vec{\sigma}(0) = (2, 0, 2)$.



- (j) La curva C es la intersección en el primer octante del cilindro de ecuación $y^2 + z^2 = 2y$ con el plano de ecuación $x = 2y$, orientada con primera componente positiva.

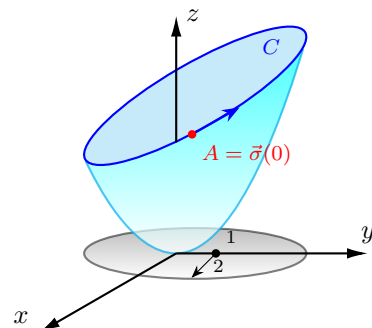
♣ La curva se encuentra en el cilindro de ecuación $(y - 1)^2 + z^2 = 1$ y también en el plano de ecuación $x = 2y$. Una parametrización regular de la curva puede ser $\vec{\sigma} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(t) = (2 + 2\sin(t), 1 + \sin(t), \cos(t))$, que la recorre en el sentido indicado por la figura. El vector velocidad es entonces $\vec{\sigma}'(t) = (2\cos(t), \cos(t), -\sin(t))$, cuya primera componente en el intervalo $-\pi/2 < t < \pi/2$ es positiva, como se requiere. Se inicia en $A = \vec{\sigma}(-\pi/2) = (0, 0, 0)$ y finaliza en $B = \vec{\sigma}(\pi/2) = (4, 2, 0)$.



La parametrización se obtiene de completar cuadrados en la expresión del cilindro de ecuación $y^2 + z^2 = 2y$, quedando entonces $(y - 1)^2 + z^2 = 1$ de donde se pone $y - 1 = \sin(t)$, $z = \cos(t)$; por último, dado que $x = 2y$, es que se hace $x = 2 + 2\sin(t)$. En cuanto al rango de variación del parámetro, está claro que el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ barre el recorrido de la curva (observar que es en ese tramo que $z = \cos(t) \geq 0$).

- (k) La curva C es la intersección del paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ con el plano de ecuación $z = 3 + 2y$, orientada de manera que en el punto $A = (2, 1, 5)$ su vector tangente tenga la tercera componente positiva.

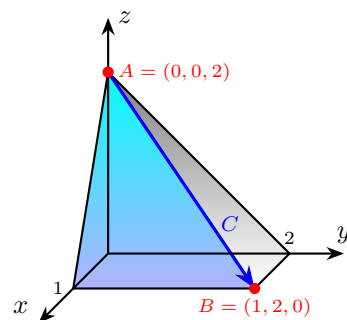
♣ Una parametrización regular de la curva puede ser $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(t) = (2\cos(t), 1 + 2\sin(t), 5 + 4\sin(t))$, que la recorre en el sentido indicado por la figura. El vector velocidad es entonces $\vec{\sigma}'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t), 4\cos(t))$, que en el punto $A = \vec{\sigma}(0) = (2, 1, 5)$ tiene una velocidad $\vec{\sigma}'(0) = (0, 2, 4)$, cumpliendo lo exigido.



La parametrización se obtiene hallando el cilindro proyectante sobre el plano xy eliminando z entre las dos ecuaciones, quedando $x^2 + y^2 = 3 + 2y$, lo que completando cuadrados equivale a $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ de donde se pone $x = 2\cos(t)$, $y - 1 = 2\sin(t)$; siendo que $z = 3 + 2y$ es que resulta $z = 5 + 4\sin(t)$. La sombra de la porción del plano de ecuación $z = 3 + 2y$ es el círculo sombreado gris de la figura, donde también se señala el punto $A = (2, 1, 5)$.

- (l) La curva C es la intersección (primer octante) entre el plano de ecuación $2x + z = 2$ con el plano de ecuación $y + z = 2$, orientada de modo descendente.

♣ La arista intersección C debe cumplir a la vez que $y = 2x$, $z = 2 - 2x$ de modo que una parametrización regular es $\vec{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{\sigma}(t) = (t, 2t, 2 - 2t)$, iniciando en el punto $A = (0, 0, 2) = \vec{\sigma}(0)$ de la figura, y terminando en $B = (1, 2, 0) = \vec{\sigma}(1)$. Debe ser claro que cumple la orientación requerida en el enunciado. La figura muestra el plano de ecuación $y + z = 2$ (gris) y el plano de ecuación $2x + z = 2$ (celeste), con la arista intersección (azul).



Observación. Se hace más evidente la parametrización escrita así: $\vec{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{\sigma}(t) = (0, 0, 2) + t(1, 2, -2)$ donde se ve claramente la estructura $\vec{\sigma}(t) = A + t(B - A)$, $0 \leq t \leq 1$. Si se quisiera la orientación opuesta se haría $\vec{\sigma}(t) = B + t(A - B)$, $0 \leq t \leq 1$.

2. Integral de campos escalares a lo largo de curvas. En este apartado se agrupan los ejemplos de integración a lo largo de una curva C sobre la que toma valores un campo escalar f (esto es, la curva está contenida en su dominio); cualquiera sea el problema, deben entonces identificarse con claridad los dos actores esenciales de una integral curvilínea de este tipo: la curva misma C (donde se integra) y el campo escalar f (lo que se integra). La integral se escribe como $\int_C f \, ds$ que se lee “integral sobre la curva C del campo escalar f ”, y que con una parametrización regular en casi todas partes dada por $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y un campo escalar f continuo en un dominio D_f que contiene a la curva admite las siguientes (entre otras) interpretaciones.

- La integral de un campo escalar $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuo cuyo dominio D_f contiene a la curva $C \subset \mathbb{R}^n$ parametrizada regularmente por $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt \quad \boxed{\text{integral de un campo escalar}}$$

- La longitud de la curva $C \subset \mathbb{R}^n$ parametrizada regularmente por $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (Observar que no es más que el anterior con el campo escalar de valor constantemente 1).

$$L_C = \int_C ds = \int_a^b \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt \quad \boxed{\text{longitud de una curva}}$$

- Si el campo escalar densidad (positivo) $\delta : D_\delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuo cuyo dominio D_δ contiene a la curva $C \subset \mathbb{R}^n$ parametrizada regularmente por $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, la integral de la densidad resulta ser la masa del alambre de forma C y densidad δ .

$$m_C = \int_C \delta \, ds = \int_a^b \delta(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt \quad \boxed{\text{masa de un alambre de la forma } C}$$

- El valor medio $\bar{f}_C$ del campo escalar $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuo cuyo dominio D_f contiene a la curva $C \subset \mathbb{R}^n$ parametrizada regularmente por $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$\bar{f}_C = \frac{\int_C f \, ds}{\int_C ds} = \frac{\int_a^b f(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt}{\int_a^b \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt} \quad \boxed{\text{valor medio del campo escalar } f \text{ en } C}$$

- La posición $\vec{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ del baricentro de un alambre de forma C y densidad δ de la curva $C \subset \mathbb{R}^n$ parametrizada regularmente por $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tiene sus k -ésimas coordenadas dadas por la siguiente expresión.

$$\bar{x}_k = \frac{\int_C x_k \delta \, ds}{\int_C \delta \, ds} = \frac{\int_a^b x_k(t) \delta(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt}{\int_a^b \delta(t) \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \boxed{\text{coordenadas del baricentro de un alambre}}$$

Observación. Si el alambre es homogéneo, el centro de gravedad solo depende de la forma de la curva C , lo que es intuitivamente cierto: el baricentro de un hilo, ya de algodón, ya de cobre, se encuentra en la misma posición en tanto sean homogéneos y de la misma forma. Desde las expresiones anteriores, esto se evidencia considerando que, siendo δ una constante, se extrae fuera de las expresiones integrales tanto en el numerador como en el denominador, cancelándose. Suele llamarse *centroide* a la posición del baricentro en este caso.

- Momentos estáticos S_x, S_y respecto de cada uno de los dos ejes coordenados de un alambre de forma C y densidad δ de la curva $C \subset \mathbb{R}^2$ parametrizada regularmente por $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$$S_x = \int_C y \delta \, ds = \int_a^b y(t) \delta(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt \quad \boxed{\text{momento estático respecto del eje } x}$$

$$S_y = \int_C x \delta \, ds = \int_a^b x(t) \delta(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt \quad \boxed{\text{momento estático respecto del eje } y}$$

- Momentos de inercia I_x, I_y respecto de cada uno de los dos ejes coordenados de un alambre de forma C y densidad δ de la curva $C \subset \mathbb{R}^2$ parametrizada regularmente por $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$$I_x = \int_C y^2 \delta \, ds = \int_a^b y^2(t) \delta(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt \quad \boxed{\text{momento de inercia respecto del eje } x}$$

$$I_y = \int_C x^2 \delta \, ds = \int_a^b x^2(t) \delta(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt \quad \boxed{\text{momento de inercia respecto del eje } y}$$

- Momento polar de inercia I_O respecto del origen de coordenadas O de un alambre de forma C y densidad δ de la curva $C \subset \mathbb{R}^2$ parametrizada regularmente por $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$$I_O = \int_C (x^2 + y^2) \delta \, ds = \int_a^b (x^2(t) + y^2(t)) \delta(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt \quad \boxed{\text{momento polar de inercia respecto del origen } O}$$

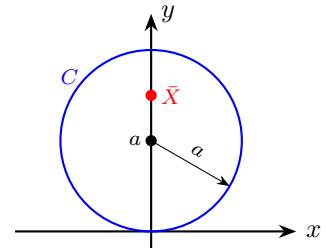
Observación. El momento de inercia polar respecto del origen es la suma de los momentos de inercia respecto de cada uno de los ejes coordenados, como resulta de las tres últimas expresiones, esto es $I_O = I_x + I_y$.

Ejemplos resueltos

- (a) Dada la curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2ay, a > 0\}$, determinar su longitud L_C ; si la densidad de un alambre cuya forma es la de la curva C es $\delta(x, y) = ky$, con k constante positiva, calcular la masa m_C , momento estático respecto a cada uno de los ejes (S_x, S_y) y la posición del baricentro $\bar{X}$. ¿Cuál es la densidad media?

♣ Completando cuadrados se tiene que la circunferencia de ecuación $x^2 + (y-a)^2 = a^2$, parametrizada regularmente por $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (a \cos(t), a + a \sin(t))$ y como $\vec{\sigma}'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t))$ es de norma constante $\|\vec{\sigma}'(t)\| = a$, se obtiene la ya sabida longitud de la circunferencia.

$$L_C = \int_C ds = \int_0^{2\pi} \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt = a \int_0^{2\pi} dt = 2a\pi$$



El momento estático respecto del eje y es claramente nulo, por la simetría de la curva a la vez que la de la densidad respecto de ese eje (desde luego, puede hacerse el cálculo $S_y = \int_C x \delta \, ds = \int_0^{2\pi} \underbrace{a \cos(t)}_x \underbrace{k(a + a \sin(t))}_\delta \underbrace{a \, dt}_{ds} = 0$).

Ahora respecto de x es $S_x = \int_C y \delta \, ds = \int_0^{2\pi} \underbrace{(a + a \sin(t))}_y \underbrace{k(a + a \sin(t))}_\delta \underbrace{a \, dt}_{ds} = ka^3 \int_0^{2\pi} (1 + 2 \sin(t) + \sin^2(t)) \, dt$, y

como $\int_0^{2\pi} (1 + 2 \sin(t) + \sin^2(t)) \, dt = (3t/2 - 2 \cos(t) - \sin(2t)/4)|_0^{2\pi} = 3\pi$, queda $S_x = 3\pi ka^3$.

Vale la pena observar que el momento estático tiene las dimensiones de una masa por una longitud (como lo exige su definición). Ahora, el cálculo de la masa es bastante directo: $m_C = \int_C \delta \, ds = \int_0^{2\pi} \delta(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt = ka^2 \int_0^{2\pi} (1 + \sin(t)) \, dt = ka^2(t - \cos(t))|_0^{2\pi} = 2\pi ka^2$. El baricentro tiene, por lo dicho antes, abscisa $\bar{x} = 0$, mientras que la ordenada se obtiene del siguiente cálculo.

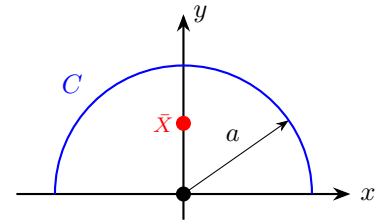
$$\bar{y} = \frac{\int_C y \delta \, ds}{\int_C \delta \, ds} = \frac{S_x}{m_C} = \frac{3\pi ka^3}{2\pi ka^2} = \frac{3}{2}a$$

Finalmente, la posición del baricentro es entonces $\bar{X} = (0, \frac{3}{2}a)$. Observar que es dimensionalmente correcto y que está por encima del centro del alambre (posición que ocuparía de ser homogéneo), como se muestra en la figura, lo que se explica considerando que la masa del alambre crece con la altura. La densidad media: $\bar{\delta}_C = m_C/L_C = 2\pi ka^2/2\pi a = ka$ (observar que la densidad es nula en $(0, 0)$ y máxima en $(0, 2a)$, donde vale $2ak$).

- (b) Determinar la posición $\bar{X}$ del baricentro de un alambre homogéneo (esto es densidad k una constante positiva) de la forma de la curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0\}$ siendo a una constante positiva. Calcular además el momento de inercia del alambre respecto del eje x .

♣ La semicircunferencia es parametrizada regularmente por $\vec{\sigma} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{\sigma}(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$ y como $\vec{\sigma}'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t))$ es de norma constante $\|\vec{\sigma}'(t)\| = a$, y sabiendo que la longitud de C es πa , es claro que la abscisa del baricentro es $\bar{x} = 0$ (¿por qué es claro?), mientras que para la ordenada se tiene el siguiente cálculo breve.

$$\bar{y} = \frac{\int_C y \delta ds}{\int_C \delta ds} = \frac{\int_C y ds}{L_C} = \frac{\int_0^\pi a \sin(t) a dt}{\pi a} = \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) dt = \frac{2}{\pi} a$$



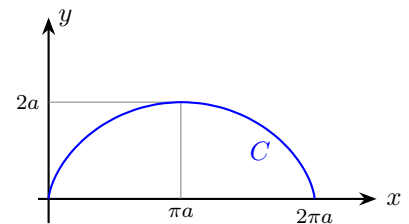
Entonces, la posición del baricentro es $\bar{X} = (0, \frac{2}{\pi} a)$. El momento de inercia del alambre respecto del eje X está dado por la siguiente expresión.

$$I_x = \int_C y^2 \delta ds = \int_0^\pi a^2 \sin^2(t) k a dt = k a^3 (t/2 - \sin(2t)/4)|_0^\pi = \frac{1}{2} k \pi a^3 = \frac{1}{2} m_C a^2$$

- (c) Determinar la longitud de la curva C ([FIUBA applet cicloide](#)) parametrizada por $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{\sigma}(t) = a(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, siendo a una constante positiva. Determinar también el valor medio del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x - \pi a$

♣ La velocidad para esta parametrización es $\vec{\sigma}'(t) = a(1 - \cos(t), \sin(t))$ y su rapidez es $\|\vec{\sigma}'(t)\| = a\sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} = a\sqrt{2 - 2\cos(t)} = a\sqrt{4\sin^2(t/2)} = 2a \sin(t/2)$, de modo que la longitud de la cicloide es:

$$L_C = \int_0^{2\pi} \|\vec{\sigma}'(t)\| dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = -4a [\cos(t/2)]_0^{2\pi} = 8a.$$



El valor medio del campo escalar dado es nulo, lo que debiera ser evidente sin necesidad de calcularlo, ya que la función es antisimétrica respecto del eje de simetría dado por la ecuación $x = \pi a$, señalado en gris en la figura. Desde luego, de plantearse el cálculo quedaría $\int_C f ds = 0$.

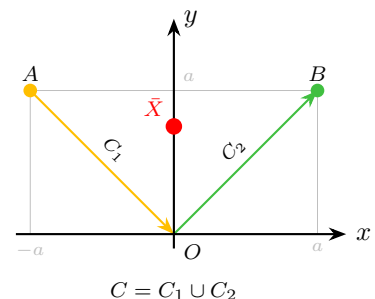
$$I_x = \int_C y^2 \delta ds = \int_0^\pi a^2 \sin^2(t) k a dt = k a^3 (t/2 - \sin(2t)/4)|_0^\pi = \frac{1}{2} k \pi a^3 = \frac{1}{2} m_C a^2$$

- (d) Sea $a > 0$; calcular la masa de un hilo metálico cuya densidad en cada punto es proporcional al valor absoluto del producto de las coordenadas del punto, si su forma es la del gráfico de la función $y : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $y = |x|$. ¿Cuál es su densidad media $\bar{\delta}$? ¿Cuál es la posición $\bar{X}$ de su baricentro?

♣ El gráfico es la curva $C = C_1 \cup C_2$, con sendas parametrizaciones regulares $\vec{\sigma}_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{\sigma}_1(t) = a(t - 1, 1 - t)$ y $\vec{\sigma}_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{\sigma}_2(t) = a(t, t)$ ambas de rapidez constante $\|\vec{\sigma}'_1(t)\| = \|\vec{\sigma}'_2(t)\| = \sqrt{2}a$. La densidad es $\delta(x, y) = k|xy|$ con $k > 0$. La masa de C se obtiene sumando las masas de cada rama.

$$m_C = \int_C \delta ds = \int_{C_1} \delta ds + \int_{C_2} \delta ds$$

$$m_C = \sqrt{2}ka^3 \left(\int_0^1 (1-t)^2 dt + \int_0^1 t^2 dt \right) = \sqrt{2}ka^3 (1/3 + 1/3) = \frac{2\sqrt{2}}{3} ka^3$$



Observar que la masa obtenida es dimensionalmente correcta, dado que k tiene la unidad de masa por unidad de longitud al cubo. También conviene decir que, dada la simetría respecto del eje y tanto geométrica como funcional (esto es que $\delta(x, y) = k|xy| = k|(-x)y| = \delta(-x, y)$), la masa del tramo C_1 es igual a la masa del tramo C_2 , lo que pudo haberse aprovechado para aliviar el cálculo. Para el cálculo de la densidad media es suficiente efectuar el cociente entre la masa obtenida y la longitud de la curva, que se obtiene sin necesidad de integrales: es $L_C = 2\sqrt{2}a$.

$$\bar{\delta}_C = \frac{m_C}{L_C} = \frac{2\sqrt{2}ka^3/3}{2\sqrt{2}a} = \frac{1}{3}ka^2$$

Ahora, por la simetría geométrica y funcional ya mencionada, se puede ver de modo inmediato que $\bar{x} = 0$; para la ordenada, ya se necesita del cálculo.

$$\bar{y} = \frac{1}{m_C} \left(\int_{C_1} y \delta \, ds + \int_{C_2} y \delta \, ds \right)$$

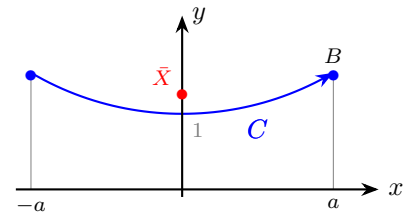
$$\bar{y} = \frac{\sqrt{2}ka^4}{m_C} \left(\int_0^1 (1-t)^3 \, dt + \int_0^1 t^3 \, dt \right) = (3a/2)(1/4 + 1/4) = \frac{3}{4}a$$

La posición del baricentro resulta, entonces $\bar{X} = (0, \frac{3}{4}a)$.

- (e) Determinar la longitud, posición del baricentro y momento de inercia respecto del eje x de un cable homogéneo de la forma de la curva C (catenaria) parametrizada por $\vec{\sigma} : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{\sigma}(t) = (t, \cosh(t))$ (con $a > 0$), si su densidad δ_0 es constante.

♣ La velocidad para esta parametrización es $\vec{\sigma}'(t) = (1, \sinh(t))$ y su rapidez es $\|\vec{\sigma}'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2(t)} = \sqrt{\cosh^2(t)} = \cosh(t)$, de modo que la longitud de la catenaria es:

$$L_C = \int_{-a}^a \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt = \int_{-a}^a \cosh(t) \, dt = \sinh \Big|_{-a}^a = 2 \sinh(a)$$



Es de interés observar que $2 \sinh(a) > 2a$ e interpretar la curva como la forma que adopta un cable homogéneo suspendido de dos postes de la misma altura separados una distancia $2a$, como lo sugiere la figura. Siendo el hilo homogéneo, el baricentro se encuentra necesariamente sobre el eje de simetría, de modo que $\bar{x} = 0$, de modo que solo debe calcularse su ordenada $\bar{y}$ para tener así $\bar{X} = (0, \bar{y})$. El cálculo del momento de inercia es también directo.

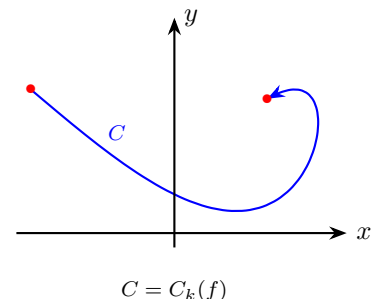
$$\bar{y} = \frac{\int_C y \delta_0 \, ds}{\int_C \delta_0 \, ds} = \frac{\int_C y \, ds}{L_C} = \frac{1}{2 \sinh(a)} \int_{-a}^a \cosh^2(t) \, dt = \frac{1}{2 \sinh(a)} \left(t/2 + \sinh(2t)/4 \right) \Big|_{-a}^a = \frac{2a + \sinh(2a)}{4 \sinh(a)}$$

$$I_x = \int_C y^2 \delta_0 \, ds = \delta_0 \int_{-a}^a \cosh^3(t) \, dt = \delta_0 \left[\sinh(t) + \frac{1}{3} \sinh^3(t) \right]_{-a}^a = \frac{2}{3} \delta_0 (3 \sinh(a) + \sinh^3(a))$$

- (f) Sea $C = C_k(f)$, la curva de nivel k del campo escalar continuo $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que está parametrizada regularmente por $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Sabiendo que la longitud de C es L_C , calcular $\int_C f \, ds$. ¿Cuál es el valor medio de f sobre la curva?

♣ Dado que, por definición, el valor que toma la función sobre *todos* los puntos de su curva de nivel k es, precisamente, k , el valor medio de f sobre $C_k(f)$ coincide con k (obviamente, el valor medio de una función constante es ese mismo valor constante). En cuanto al cálculo de la integral, también es inmediato, puesto que el integrando es, sobre la curva, constantemente k .

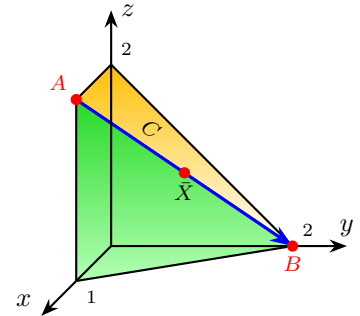
$$\int_C f \, ds = k \int_C ds = k L_C$$



- (g) Calcular la masa de una varilla recta que tiene la forma de la curva C , intersección (primer octante) entre el plano de ecuación $2x + y = 2$ con el plano de ecuación $y + z = 2$, si su densidad es $\delta(x, y, z) = 1 + 2z + 2y + z$. Determinar además la posición de su baricentro.

♣ La arista intersección C debe cumplir a la vez que $y = 2 - 2x, z = 2x$ de modo que una parametrización regular es $\vec{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{\sigma}(t) = (1 - t, 2t, 2 - 2t)$, iniciando en el punto $A = (1, 0, 2) = \vec{\sigma}(0)$ de la figura, y terminando en $B = (0, 2, 0) = \vec{\sigma}(1)$. La figura muestra el plano de ecuación $y + z = 2$ (ocre) y el plano de ecuación $2x + y = 2$ (verde), con la arista intersección (azul).

Observación: se hace más evidente la parametrización escrita así: $\vec{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{\sigma}(t) = (1, 0, 2) + t(-1, 2, -2)$ donde se ve claramente la estructura de la ecuación vectorial de la recta $\vec{\sigma}(t) = A + t(B - A), 0 \leq t \leq 1$.



Ahora el cálculo de la masa; teniendo en cuenta que con $\vec{\sigma}(t) = (1 - t, 2t, 2 - 2t)$ resulta una velocidad $\vec{\sigma}'(t) = (-1, 2, -2)$ cuya rapidez es $\|\vec{\sigma}'(t)\| = 3$ y que la densidad sobre la curva es $\delta(\sigma(t)) = 1 + 2(1 - t) + 2(2t) + (2 - 2t) = 5$, el cálculo es muy simple y se muestra a continuación; se deja como ejercicio el cálculo de la posición del baricentro, que resulta ser $\bar{X} = (1/2, 1, 1)$.

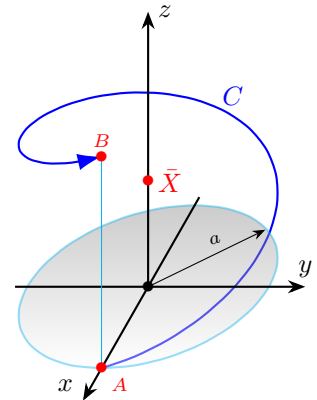
$$m_C = \int_C \delta \, ds = \int_0^1 \delta(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt = \int_0^1 (5)(3) \, dt = 15 \int_0^1 dt = 15$$

- (h) Una vuelta de la hélice circular C de radio a y paso h con eje z es parametrizada regularmente por $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), ht/2\pi)$. Calcular la longitud, la masa y la posición del baricentro de un resorte homogéneo (densidad constante δ_0) de la forma de C

♣ Dado que $\vec{\sigma}$ es una parametrización regular e inyectiva de la curva C , su longitud es $L_C = \int_C ds = \int_0^{2\pi} \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt$, y como $\vec{\sigma}'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), h/(2\pi))$, su norma (rapidez) resulta un valor constante, $\|\vec{\sigma}'(t)\| = \sqrt{a^2 + h^2/(2\pi)^2}$ y el cálculo es, entonces, inmediato; la masa, siendo la densidad δ_0 constante es sencillamente un producto.

$$L_C = \int_0^{2\pi} \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt = \sqrt{a^2 + h^2/(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} dt = \sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}$$

$$m_C = \int_C \delta_0 \, ds = \delta_0 \int_C ds = \delta_0 L_C = \delta_0 \sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}$$

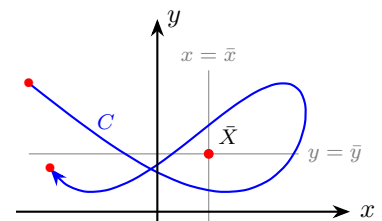


La parametrización orienta la curva desde el punto $A = \vec{\sigma}(0) = (a, 0, 0)$ hasta el punto $B = \vec{\sigma}(2\pi) = (a, 0, h)$, que se encuentra al final de una vuelta completa (h mide la penetración de un tornillo de este filete por cada vuelta) Siendo el resorte homogéneo la simetría geométrica hace evidente la posición del baricentro: $\bar{X} = (0, 0, h/2)$, pero es un buen ejercicio llegar mediante el cálculo a esa misma conclusión.

- (i) Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regularmente por $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la forma de una alambre cuya función densidad δ es continua, y sea $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{y})$ su baricentro. Mostrar que los momentos estáticos respecto $S_{\bar{x}}, S_{\bar{y}}$ respecto de las rectas de ecuación $y = \bar{y}, x = \bar{x}$ son nulos.

♣ Se muestra para $S_{\bar{y}}$, y se deja el hacer los mismo con $S_{\bar{x}}$; por supuesto, este hecho es en realidad el que define la expresión dada más arriba.

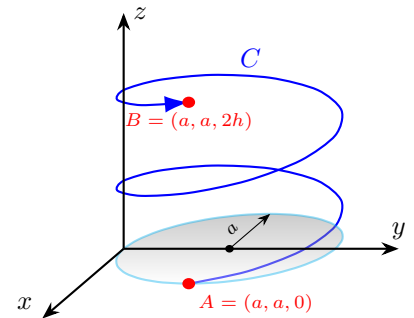
$$\begin{aligned} S_{\bar{y}} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_C (x - \bar{x}) \delta \, ds = \int_C x \delta \, ds - \int_C \bar{x} \delta \, ds = \int_C x \delta \, ds - \bar{x} \int_C \delta \, ds = \\ &= \int_C x \delta \, ds - \frac{\int_C x \delta \, ds}{\int_C \delta \, ds} \int_C \delta \, ds = \int_C x \delta \, ds - \int_C x \delta \, ds = 0 \end{aligned}$$



- (j) Dos vueltas de la hélice circular C de radio a y paso h con el eje pasando por el punto $(0, a, 0)$ paralelo al eje z es parametrizada regularmente por $\vec{\sigma} : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), (ht/2\pi))$. Calcular la longitud de la curva C y la masa de un alambre de la forma de C cuya densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia del punto al eje z . ¿Cuál es su densidad media?

♣ Dado que $\vec{\sigma}$ es una parametrización regular e inyectiva de la curva C , su longitud es $L_C = \int_C ds = \int_0^{4\pi} \|\vec{\sigma}'(t)\| dt$, y como $\vec{\sigma}'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), h/(2\pi))$, su norma (rapidez) resulta un valor constante, $\|\vec{\sigma}'(t)\| = \sqrt{a^2 + h^2/(2\pi)^2}$ y el cálculo es, entonces, inmediato.

$$L_C = \int_0^{4\pi} \|\vec{\sigma}'(t)\| dt = \sqrt{a^2 + h^2/(2\pi)^2} \int_0^{4\pi} dt = 2\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}$$



El cuadrado de la distancia de un punto (x, y, z) al eje z es $d^2(x, y, z) = x^2 + y^2$, lo que valuado en los puntos de la curva es $d^2(\vec{\sigma}(t)) = a^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = a^2$, de modo que la densidad en tales puntos es $\delta(t) = 2ka^2(1 + \sin(t))$ con k la constante de proporcionalidad ($k > 0$).

$$m_C = \int_C \delta ds = \int_0^{4\pi} \delta(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| dt = 2ka^2 \sqrt{a^2 + h^2/(2\pi)^2} \int_0^{4\pi} (1 + \sin(t)) dt$$

Esta última integral es $\int_0^{4\pi} (1 + \sin(t)) dt = (t - \cos(t))|_0^{4\pi} = 4\pi$ de modo que, finalmente se obtiene la masa pedida.

$$m_C = 4ka^2 \sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}$$

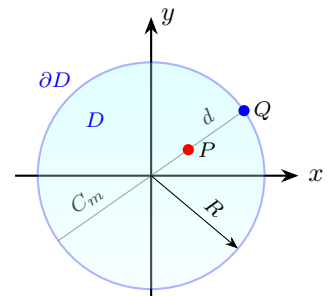
Por último, para el cálculo del valor medio de la densidad, solo resta efectuar un cociente (no es más que la masa del alambre dividida en su longitud).

$$\bar{\delta}_{C_m} = \frac{\int_C \delta ds}{\int_C ds} = \frac{m_C}{L_C} = \frac{4ka^2 \sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}}{2\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}} = 2ka^2$$

- (k) Sean $R > 0, f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = R - \sqrt{x^2 + y^2}$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ (observar que el campo escalar admite ser interpretado como la distancia d de un punto $P = (x, y) \in D$ a un punto $Q = (x, y) \in \partial D$). Si C_m es la curva parametrizada regularmente para cada constante $m \in \mathbb{R}$ por $\vec{\sigma}_m : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\sigma}_m(t) = (t, mt)$, donde $a = R/\sqrt{1+m^2}$, calcular (e interpretar el resultado) el valor medio de f sobre C_m , esto es $\bar{f}_{C_m}$.

♣ Para cualquier $m \in \mathbb{R}$, la longitud de C_m es $L_{C_m} = 2R$, puesto que no es más que un diámetro de D (al mismo resultado se llega observando que $\vec{\sigma}'_m(t) = (1, m)$, $\|\vec{\sigma}'_m(t)\| = \sqrt{1+m^2}$, $L_{C_m} = \int_{C_m} \|\vec{\sigma}'(t)\| dt = \int_{-a}^a \sqrt{1+m^2} dt = 2a\sqrt{1+m^2} = 2R$). Ahora, considerando que sobre la curva es $f(\vec{\sigma}_m(t)) = R - \sqrt{t^2 + m^2 t^2} = R - |t|\sqrt{1+m^2}$, el cálculo del valor medio $\bar{f}_{C_m}$ es sencillo.

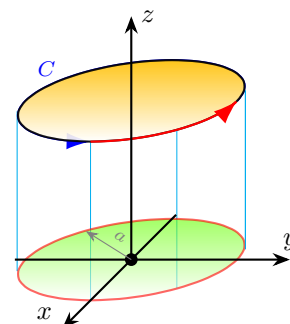
$$\begin{aligned} \bar{f}_{C_m} &= \frac{1}{L_{C_m}} \int_{C_m} f ds = \frac{1}{L_{C_m}} \int_{-a}^a (R - |t|\sqrt{1+m^2}) \sqrt{1+m^2} dt = \\ &= \frac{2\sqrt{1+m^2}}{L_{C_m}} \int_0^a (R - t\sqrt{1+m^2}) dt = \frac{2\sqrt{1+m^2}}{L_{C_m}} \left[Rt - t^2\sqrt{1+m^2}/2 \right]_0^a = \frac{R^2}{2R} = \frac{1}{2}R \end{aligned}$$



El resultado obtenido se podría percibir como “razonable”: sobre un rayo radial, por cada punto P que se halla a una distancia de la circunferencia $d = R/2 - b$ se tiene otro punto P' , simétrico respecto del punto medio del rayo, a una distancia $d' = R/2 + b$, y esto para cualquier b tal que $0 \leq b \leq R/2$, de manera que sus contribuciones a la distancia media, ahora medida respecto de la circunferencia de radio $R/2$ son de la misma magnitud y de signo contrario, cancelándose. Otra manera de verlo, es considerar la función f restringida a un diámetro: su gráfico (una V invertida con el vértice de altura R forma, con el diámetro un triángulo de base $2R$, cuya área es $(1/2)R(2R) = R^2$, de modo que el rectángulo de la misma base de igual área tiene por altura, precisamente $\bar{f}_{C_m} = R/2$.

- (l) Calcular la masa de un hilo metálico cuya densidad en cada punto es proporcional al producto de las distancias desde el punto a los planos coordenados, si la forma del alambre coincide con la de la curva C , intersección del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ con el plano de ecuación $z = h$, siendo a y h dos constantes positivas.

♣ La curva C se recorre una vez con la parametrización regular $\vec{\sigma} : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), h)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ con una velocidad $\vec{\sigma}'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), 0)$ cuya rapidez es $\|\vec{\sigma}'(t)\| = a$. Dado que la densidad es $\delta(x, y, z) = k|x||y||z| = k|xyz|$, con $k > 0$, se tiene que, sobre la curva, es $\delta(\vec{\sigma}(t)) = kha^2 \cos(t) \sin(t)$, que en $0 \leq t \leq \pi/2$ se convierte sencillamente en $\delta(\vec{\sigma}(t)) = kha^2 \cos(t) \sin(t) = \frac{1}{2}kha^2 \sin(2t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.



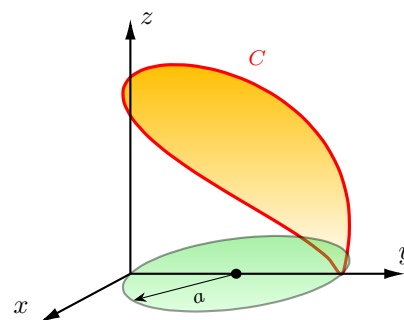
Considerando entonces la simetría geométrica de la curva C y la simetría funcional de la densidad δ , puede calcularse la masa cuadruplicando la masa del tramo rojo de la figura (el tramo de C dado por la parametrización con $0 \leq t \leq \pi/2$), simplificando el cálculo.

$$m_C = \int_C \delta \, ds = 4 \int_0^{\pi/2} \delta(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt = 2kha^3 \int_0^{\pi/2} \sin(2t) \, dt = -kha^3 [\cos(2t)]_0^{\pi/2} = 2kha^3$$

- (m) Calcular $\int_C f \, ds$, siendo C la curva $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, x^2 + y^2 = 2ay, z \geq 0\}$ y f el campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y, z) = x$.

♣ La curva C , intersección del cilindro con la esfera, puede parametrizarse regularmente con $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{\sigma}(t) = (-a \sin(t), a + a \cos(t), 2a \sin(t/2))$, con velocidad $\vec{\sigma}'(t) = (-a \cos(t), -a \sin(t), a \cos(t/2))$ y rapidez $\|\vec{\sigma}'(t)\| = a\sqrt{1 + \cos^2(t/2)}$.

$$\int_C f \, ds = a^2 \int_0^{2\pi} (-\sin(t) \sqrt{1 + \cos^2(t/2)}) \, dt = \frac{2}{3} a^2 \left[(1 + \cos^2(t/2))^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2\pi} = 0$$

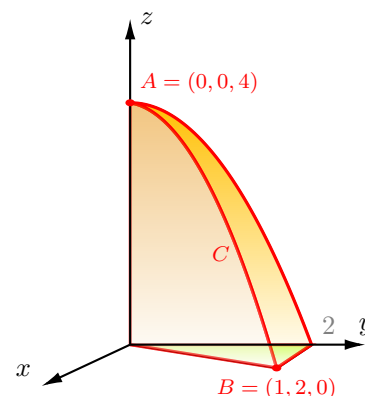


El resultado del cálculo sobre esta curva ([FIUBA applet curva de Viviani](#)) pudo haberse previsto, dada la simetría de la curva respecto del plano de ecuación $x = 0$ y la antisimetría de la función respecto de ese mismo plano (esto es $f(-x, y, z) = -x = -f(x, y, z)$).

- (n) Calcular la masa de un alambre que tiene la forma de la curva C (primer octante) que es la intersección entre el cilindro de ecuación $z = 4 - y^2$ con el plano de ecuación $y = 2x$. La densidad del alambre en cada punto es proporcional a la distancia del punto al plano xz .

♣ La curva C puede parametrizarse regularmente con $\vec{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{\sigma}(t) = (t, 2t, 4 - 4t^2)$ que la orienta desde $A = (0, 0, 4)$, pues $\vec{\sigma}(0) = (0, 0, 4)$ hacia $B = (1, 2, 0)$, con velocidad $\vec{\sigma}'(t) = (1, 2, -8t)$ y rapidez $\|\vec{\sigma}'(t)\| = \sqrt{5 + 64t^2}$. La densidad, $\delta(x, y, z) = ky$, con $k > 0$ la constante de proporcionalidad, sobre la curva es $\delta(\vec{\sigma}(t)) = 2kt$.

$$\begin{aligned} m_C &= \int_C \delta \, ds = \int_0^1 \delta(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt = 2k \int_0^1 t \sqrt{5 + 64t^2} \, dt = \frac{1}{48} k \left[(\sqrt{5 + 64t^2})^3 \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{48} k (69\sqrt{69} - 5\sqrt{5}) \end{aligned}$$



3. Integral de campos vectoriales a lo largo de curvas (circulación). En este apartado se agrupan los ejemplos de integración de campos vectoriales a lo largo de una curva C sobre la que toma valores un campo vectorial $\vec{f}$ (esto es, la curva está contenida en su dominio); cualquiera sea el problema, deben entonces identificarse con claridad los dos actores esenciales de una integral curvilínea de este tipo: la curva misma C (donde se integra) y el campo vectorial $\vec{f}$ (lo que se integra). La integral de línea se escribe como $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, lo que se lee “circulación del campo vectorial $\vec{f}$ a lo largo de la curva C ”.

Una interpretación directa de la circulación se da considerando el campo vectorial $\vec{f}$ como un campo de fuerzas, siendo C la trayectoria que describe una partícula. En tal caso, por definición, el valor de la integral es el trabajo del campo a lo largo de la trayectoria. Observar que el *resultado* de la integral es un escalar (que en el caso de interpretarse como el trabajo tiene las dimensiones de una energía), aunque los actores involucrados sean vectoriales.

Si $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular en casi todas partes que orienta la curva C desde $A = \vec{\sigma}(a)$ hasta $B = \vec{\sigma}(b)$, y $\vec{f}$ un campo vectorial continuo en un dominio $D_f \supset C$ entonces vale la siguiente expresión.

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt$$

Si a la misma curva anterior con la orientación inducida por $\vec{\sigma}$, se la recorre ahora con la orientación opuesta dada por $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (lo que puede lograrse, por ejemplo, definiéndola como $\vec{\gamma}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\sigma}(a + b - t)$), se obtiene el valor opuesto al anterior:

$$\int_{C^*} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt = - \int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

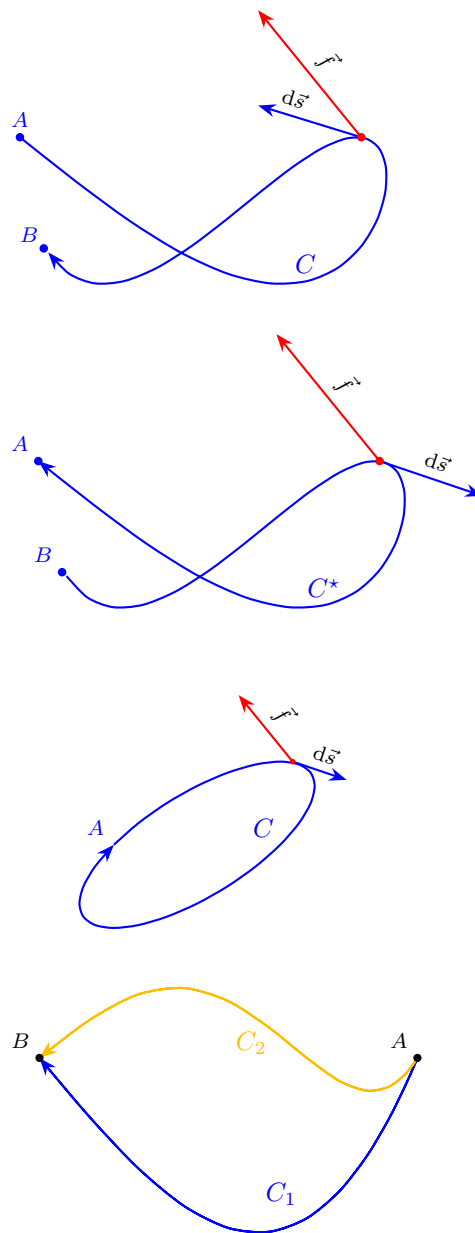
Si $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular en casi todas partes que orienta la curva cerrada (lazo) C desde $A = \vec{\sigma}(a)$ hasta el mismo $A = \vec{\sigma}(b)$, y $\vec{f}$ un campo vectorial continuo en un dominio $D_f \supset C$ entonces vale la siguiente expresión.

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt$$

Siendo C_1 y C_2 dos curvas contenidas en el dominio de un campo vectorial $\vec{f}$ orientadas partiendo ambas del punto A y llegando ambas al punto B , tal como se muestra en la figura, *en general*, no cabe esperar que se obtenga la misma circulación para *cualquier* campo vectorial $\vec{f}$. Suele abreviarse diciendo que la circulación depende de la trayectoria.

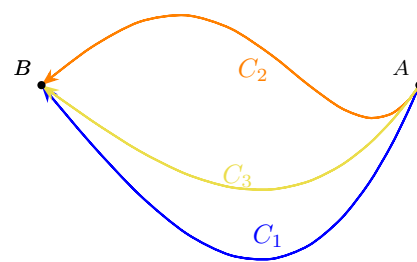
$$\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} \neq \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}, \quad \text{¡en general!}$$

Para los campos de gradientes $\vec{f}$ (que derivan de un potencial Φ , esto es $\vec{f} = \nabla\Phi$), la situación anterior ya no es posible, *la circulación deja de depender de la trayectoria*, dado que tiene lugar la versión n -dimensional de la regla de Barrow: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \Phi(B) - \Phi(A)$, siendo $\vec{f} = \nabla\Phi$. En tal caso, como es evidente, resulta indiferente la curva que materializa la conexión entre el punto A y el punto B y ahora para cualesquier par de curvas C_1 y C_2 que unan A con B ha de resultar $\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}$, puesto que tanto una como otra son iguales a $\Phi(B) - \Phi(A)$.



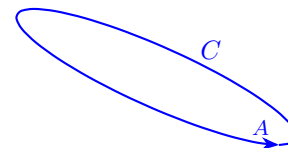
Para los campos de gradientes $\vec{f}$ (derivan de un potencial Φ , esto es $\vec{f} = \nabla\Phi$) si $C_1, C_2, C_3, \dots$ son curvas contenidas en el dominio de un campo vectorial $\vec{f}$ orientadas partiendo del punto A y llegando al punto B , tal como se muestra en la figura, resulta la misma circulación sobre cualquiera de estas curvas, dado que todas ellas se obtienen como $\Phi(B) - \Phi(A)$. Suele abreviarse diciendo que la circulación no depende de la trayectoria.

$$\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{C_3} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \Phi(B) - \Phi(A), \text{ con } \vec{f} = \nabla\Phi$$



Una consecuencia inmediata de la independencia de la trayectoria propia de la circulación de los campos de gradientes es la nulidad de la circulación en cualquier lazo C contenido en su dominio (dado que en un lazo es $B = A$, por lo que $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \Phi(B) - \Phi(A) = \Phi(A) - \Phi(A) = 0$).

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0, \quad \text{siendo } \vec{f} \text{ un campo de gradientes}$$



Obtención de una función potencial Φ , versión 2D. Si el campo vectorial diferenciable $\vec{f}: D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{f} = (P, Q)$ cumple en su dominio D_f abierto simplemente conexo la condición de simetría $P_y(x, y) = Q_x(x, y), \forall (x, y) \in D_f$, entonces es el gradiente de un campo escalar (llamado función potencial) Φ , esto es $\vec{f} = \nabla\Phi$, y tomando $P_0 = (x_0, y_0) \in D_f$, se halla una Φ con la siguiente expresión.

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt, \quad \text{con cualquier } P_0 = (x_0, y_0) \in D_f$$

Obtención de una función potencial Φ , versión 3D. Si el campo vectorial diferenciable $\vec{f}: D_f \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{f} = (P, Q, R)$ cumple en su dominio D_f abierto simplemente conexo la condición $P_y(x, y, z) = Q_x(x, y, z), P_z(x, y, z) = R_x(x, y, z), Q_z(x, y, z) = R_y(x, y, z), \forall (x, y, z) \in D_f$ entonces es el gradiente de un campo escalar (llamado función potencial) Φ , esto es $\vec{f} = \nabla\Phi$, y tomando $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D_f$, se halla una Φ con la siguiente expresión.

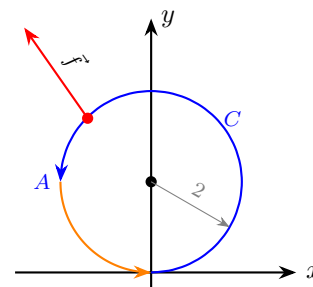
$$\Phi(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt, \quad \text{con cualquier } P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D_f$$

Ejemplos

- (a) Sean la curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4y\}$ y el campo vectorial $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\vec{f}(x, y) = (-y, 2)$. Calcular la circulación a lo largo de la curva C , indicando la orientación de la curva adoptada.

♣ Completando cuadrados se tiene que la circunferencia de ecuación $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, parametrizada regularmente por $\vec{\sigma}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{\sigma}(t) = (2\cos(t), 2 + 2\sin(t))$ con $\vec{\sigma}'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t))$ (sentido antihorario). El campo vectorial, de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, evaluado sobre la curva C es $\vec{f}(\vec{\sigma}(t)) = (-2 - 2\sin(t), 2)$ de modo que el producto escalar es $\vec{f}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) = 4\sin(t) + 4\cos(t) + 4\sin^2(t)$. Solo resta el cálculo.

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt = [-4\cos(t) + 4\sin(t) + 2t - \sin(2t)]_0^{2\pi} = 4\pi$$

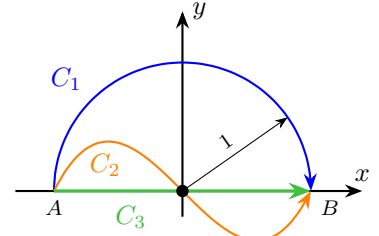


Observación. Se puede asegurar que el campo vectorial $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x, y) = (-y, 2)$ no admite una función potencial, no es un campo de gradientes, puesto que, de serlo, esta circulación sobre la circunferencia debiera dar cero. También vale la pena decir que si se interpreta $\vec{f}$ como una fuerza, a lo largo del ciclo el trabajo es positivo, pero que este resultado es un balance global (es una integral): claramente hay partes del recorrido en que el trabajo es negativo, por ejemplo el tramo (en naranja) entre el punto $A = (-1, 1)$ y el origen de coordenadas.

- (b) Calcular el trabajo realizado por una fuerza de magnitud constante 3 con dirección y sentido del vector $\vec{i}$ sobre una partícula que va desde $A = (-1, 0)$ hasta $B = (1, 0)$ siguiendo la trayectoria de la semicircunferencia dada por $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$. Rehacer el cálculo, ahora siguiendo la trayectoria de la curva de ecuación $y = x^3 - x$.

♣ La semicircunferencia C_1 se parametriza regularmente por $\vec{\sigma}_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\sigma}_1(t) = (-\cos(t), \sin(t))$ con velocidad $\vec{\sigma}'_1(t) = (\sin(t), \cos(t))$, mientras que el tramo de parábola cúbica C_2 se parametriza regularmente por $\vec{\sigma}_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\sigma}_2(t) = (t, t^3 - t)$ con velocidad $\vec{\sigma}'_2(t) = (1, 3t^2 - 1)$.

Por otra parte, el campo vectorial es $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x, y) = (3, 0)$.



El campo vectorial, de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, evaluado sobre la curva C_1 es $\vec{f}(\vec{\sigma}_1(t)) = (3, 0)$ de modo que el producto escalar correspondiente es $\vec{f}(\vec{\sigma}_1(t)) \cdot \vec{\sigma}'_1(t) = 3\sin(t)$; del mismo modo, el campo vectorial evaluado sobre la curva C_2 es $\vec{f}(\vec{\sigma}_2(t)) = (3, 0)$ de modo que el producto escalar correspondiente es $\vec{f}(\vec{\sigma}_2(t)) \cdot \vec{\sigma}'_2(t) = 3$. Luego el cálculo de las integrales es inmediato.

$$\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^\pi \vec{f}(\vec{\sigma}_1(t)) \cdot \vec{\sigma}'_1(t) dt = \int_0^\pi 3\sin(t) dt = [-3\cos(t)]_0^\pi = 6$$

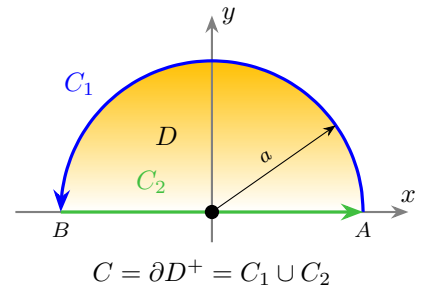
$$\int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{-1}^1 \vec{f}(\vec{\sigma}_2(t)) \cdot \vec{\sigma}'_2(t) dt = \int_{-1}^1 3 dt = [3t]_{-1}^1 = 6$$

Observación. Es fácil comprobar que el campo dado es el gradiente de $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(x, y) = 3y$ ya que es inmediato ver que $\vec{f} = \nabla\Phi$, de modo que el resultado es previsible, el trabajo es independiente de la trayectoria que conecta a con B, y por lo tanto sería el mismo que siguiendo cualquier curva, como por ejemplo la señalada como C_3 en la figura:

$$\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{C_3} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \Phi(B) - \Phi(A) = (3)(1) - 3(-1) = 6$$

- (c) Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0\}$ siendo a una constante positiva. Calcular la circulación a lo largo de $C = \partial D^+$ (orientada dejando el recinto D a su izquierda) del campo vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x, y) = (-y, x)$.

♣ El semicírculo D tiene por frontera C la unión de la semicircunferencia C_1 y el segmento C_2 con las orientaciones indicadas en la figura. Una parametrización regular de C_1 es $\vec{\sigma}_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\sigma}_1(t) = (a\cos(t), a\sin(t))$ con velocidad $\vec{\sigma}'_1(t) = (-a\sin(t), a\cos(t))$, mientras que C_2 se parametriza regularmente por $\vec{\sigma}_2 : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\sigma}_2(t) = (t, 0)$ con velocidad $\vec{\sigma}'_2(t) = (1, 0)$. De esta manera, queda la frontera $C = \partial D = C_1 \cup C_2$ con la orientación exigida por el enunciado.



$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_1 \cup C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

El campo vectorial, de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, evaluado sobre la curva C_1 es $\vec{f}(\vec{\sigma}_1(t)) = (-a\sin(t), a\cos(t))$ de modo que el producto escalar correspondiente es $\vec{f}(\vec{\sigma}_1(t)) \cdot \vec{\sigma}'_1(t) = (-a\sin(t), a\cos(t)) \cdot (-a\sin(t), a\cos(t)) = a^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) = a^2$; del mismo modo, el campo vectorial evaluado sobre la curva C_2 es $\vec{f}(\vec{\sigma}_2(t)) = (0, t)$ de modo que el producto escalar correspondiente es $\vec{f}(\vec{\sigma}_2(t)) \cdot \vec{\sigma}'_2(t) = (0, t) \cdot (1, 0) = 0$. Luego, el cálculo de las integrales es inmediato (Observación: este ejercicio resulta mucho más directo conociendo un resultado posterior, el Teorema de Green).

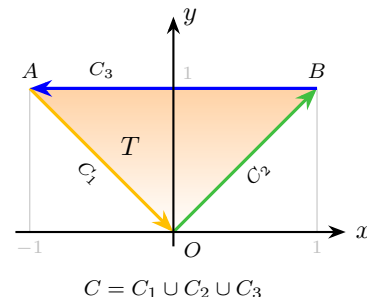
$$\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^\pi a^2 dt = a^2 [t]_0^\pi = \pi a^2, \quad \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{-a}^a (0) dt = 0$$

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_1 \cup C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \pi a^2 + 0 = \pi a^2$$

- (d) Sea T el triángulo de vértices $A = (-1, 1)$, $O = (0, 0)$, $B = (1, 1)$. Calcular la circulación a lo largo de $C = \partial D^+$ (orientada dejando el recinto D a su izquierda) del campo vectorial $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x, y) = (x^2, x^2 - y^2)$.

♣ El triángulo T tiene por frontera $C = \partial T^+ = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ la unión de los segmentos $C_1 = AO$, $C_2 = OB$, $C_3 = BA$, con las orientaciones indicadas en la figura. Una parametrización regular de C_1 es $\vec{\sigma}_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}_1(t) = (t-1, 1-t)$ con velocidad $\vec{\sigma}'_1(t) = (1, -1)$, de C_2 es $\vec{\sigma}_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}_2(t) = (t, t)$ con velocidad $\vec{\sigma}'_2(t) = (1, 1)$ y de C_3 es $\vec{\sigma}_3: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}_3(t) = (1-t, 1)$ con velocidad $\vec{\sigma}'_3(t) = (-1, 0)$.

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{C_3} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$



El campo vectorial, de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, evaluado sobre la curva C_1 es $\vec{f}(\vec{\sigma}_1(t)) = ((t-1)^2, 0)$ de modo que el producto escalar correspondiente es $\vec{f}(\vec{\sigma}_1(t)) \cdot \vec{\sigma}'_1(t) = ((t-1)^2, 0) \cdot (1, -1) = (t-1)^2$; del mismo modo, el campo vectorial evaluado sobre la curva C_2 es $\vec{f}(\vec{\sigma}_2(t)) = (t^2, 0)$ de modo que el producto escalar correspondiente es $\vec{f}(\vec{\sigma}_2(t)) \cdot \vec{\sigma}'_2(t) = (t^2, 0) \cdot (1, 1) = t^2$; finalmente, el campo vectorial evaluado sobre la curva C_3 es $\vec{f}(\vec{\sigma}_3(t)) = ((1-t)^2, (1-t)^2 - 1)$ de modo que el producto escalar correspondiente es $\vec{f}(\vec{\sigma}_3(t)) \cdot \vec{\sigma}'_3(t) = ((1-t)^2, (1-t)^2 - 1) \cdot (-1, 0) = -(1-t)^2$. Con estas especificaciones, lo que resta es la ejecución de cada una de las tres integrales, para luego sumarlas.

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 (t-1)^2 dt = \frac{1}{3} [(t-1)^3]_0^1 = \frac{1}{3}, & \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} [t^3]_0^1 = \frac{1}{3} \\ \int_{C_3} \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \int_0^2 \vec{f}(\vec{\sigma}_3(t)) \cdot \vec{\sigma}'_3(t) dt = - \int_0^2 (1-t)^2 dt = -\frac{1}{3} [(1-t)^3]_0^2 = -\frac{2}{3} \\ \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \oint_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{C_3} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 0 \end{aligned}$$

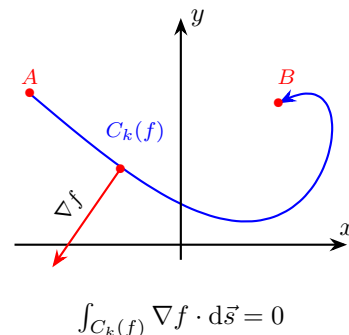
La circulación del campo sobre *esta curva cerrada* resultó nula, lo que de ninguna manera indica que se trate de un campo de gradientes (para el que se tiene la garantía de la nulidad en *toda* curva cerrada en su dominio). De hecho, puede afirmarse que *no es un campo de gradientes* ya que no se cumple una condición necesaria para ello, que es la condición de simetría jacobiana de $\vec{f}$. En efecto, siendo $P(x, y) = x^2$ es $P_y(x, y) = 0$, mientras que con $Q(x, y) = x^2 - y^2$ es $Q_x(x, y) = 2x$, de modo que la condición de simetría solo se cumple sobre el eje y , mas no en todo el triángulo T .

Observación. Este ejercicio se torna muy simple tras el conocimiento de un tema posterior: el Teorema de Green.

- (e) Sea $C = C_k(f)$, la curva de nivel k del campo escalar diferenciable $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que está parametrizada regularmente por $\vec{\sigma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{h} = \nabla f$ a lo largo de la curva C .

♣ El campo vectorial $\vec{h}$ es un campo de gradientes, lo que es obvio por definición: es el gradiente de una función potencial f . Dado que, por definición, el valor que toma la función f sobre *todos* los puntos de su curva de nivel k es, precisamente, k , en particular se tiene que, siendo $A = \vec{\sigma}(a)$, $B = \vec{\sigma}(b)$, debe ser $f(A) = k = f(B)$. De allí se tiene que el valor de la circulación es nulo.

$$\int_C \vec{h} \cdot d\vec{s} = \int_{C_k(f)} \nabla f \cdot d\vec{s} = f(B) - f(A) = k - k = 0$$



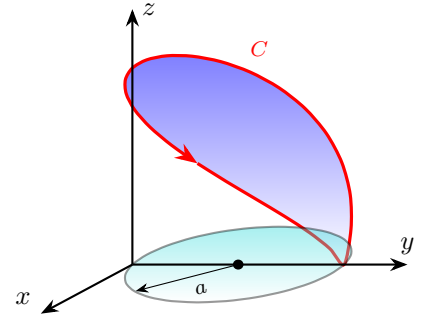
$$\int_{C_k(f)} \nabla f \cdot d\vec{s} = 0$$

Observación. Se puede decir todavía más: no solo es nula la circulación a lo largo de la curva C (resultado global) sino que también lo es en cualquier tramo de esa curva (resultado local), puesto que el vector ∇f es en cada punto ortogonal a la curva, de modo que el producto escalar $\nabla f \cdot d\vec{s}$ es idénticamente nulo.

- (f) Calcular la circulación $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, x^2 + y^2 = 2ay, z \geq 0\}$ y $\vec{f}$ el campo vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (a - y, x, z)$. Orientar la curva C de manera que se recorra en sentido descendente en el tramo incluido en el primer octante.

♣ La curva C , intersección del cilindro con la esfera, puede parametrizarse regularmente con $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{\sigma}(t) = (-a \sin(t), a + a \cos(t), 2a \sin(t/2))$, con velocidad $\vec{\sigma}'(t) = (-a \cos(t), -a \sin(t), a \cos(t/2))$. El campo vectorial, de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, sobre la curva C es $\vec{f}(\vec{\sigma}(t)) = (-a \cos(t), -a \sin(t), 2a \sin(t/2))$ de modo que el producto escalar correspondiente es $\vec{f}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) = (-a \cos(t), -a \sin(t), 2a \sin(t/2)) \cdot (-a \cos(t), -a \sin(t), a \cos(t/2)) = a^2(1 + \sin(t))$.

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \sin(t)) dt = a^2 [t - \cos(t)]_0^{2\pi} = 2\pi a^2$$

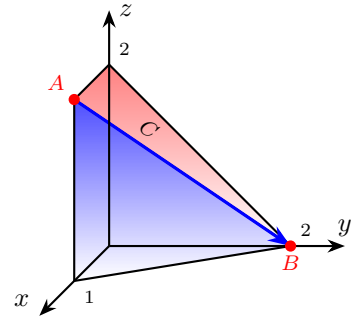


El cálculo sobre esta curva ([FIUBA applet curva de Viviani](#)) habría resultado simplificado conociendo un tema posterior: el Teorema de Stokes.

- (g) Calcular la circulación $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ siendo C la curva intersección (primer octante) entre el plano de ecuación $2x + y = 2$ y el plano de ecuación $y + z = 2$, en tanto que $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (1 + 4y + 2x^2, x^2 + 2y + z, -1 + z)$. Orientar la curva C de manera que se recorra en sentido descendente.

♣ La arista intersección C debe cumplir a la vez que $y = 2 - 2x, z = 2x$ de modo que una parametrización regular es $\vec{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{\sigma}(t) = (1 - t, 2t, 2 - 2t)$, iniciando en el punto $A = (1, 0, 2) = \vec{\sigma}(0)$ de la figura, y terminando en $B = (0, 2, 0) = \vec{\sigma}(1)$. La figura muestra el plano de ecuación $y + z = 2$ (rosa) y el plano de ecuación $2x + y = 2$ (azulado), con la arista intersección (azul).

Observación: se hace más evidente la parametrización escrita así: $\vec{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{\sigma}(t) = (1, 0, 2) + t(-1, 2, -2)$ donde se ve claramente la estructura de la ecuación vectorial de la recta $\vec{\sigma}(t) = A + t(B - A), 0 \leq t \leq 1$.



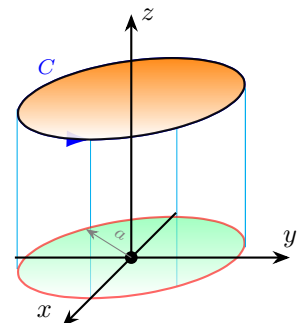
Ahora el cálculo de la circulación; teniendo en cuenta que $\vec{\sigma}(t) = (1 - t, 2t, 2 - 2t)$, resulta una velocidad $\vec{\sigma}'(t) = (-1, 2, -2)$. El campo vectorial, de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, sobre la curva C es $\vec{f}(\vec{\sigma}(t)) = (3 + 4t + 2t^2, 3 + t^2, 1 - 2t)$ de modo que el producto escalar correspondiente es $\vec{f}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) = (3 + 4t + 2t^2, 3 + t^2, 1 - 2t) \cdot (-1, 2, -2) = 1$.

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{f}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt = \int_0^1 1 dt = 1$$

- (h) Dado $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, z = h\}$ con $h > 0$, sea $C = \partial D$ orientada de modo que el vector tangente en el tramo del primer octante tenga segunda componente positiva. Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (-y, x, z^2 + x + y^2)$.

♣ La curva C se recorre una vez con la parametrización regular $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), h), 0 \leq t \leq 2\pi$ con una velocidad $\vec{\sigma}'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), 0)$. El campo vectorial, de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, sobre la curva C es $\vec{f}(\vec{\sigma}(t)) = (-a \sin(t), a \cos(t), h^2 + a \cos(t) + a^2 \sin^2(t))$ de modo que el producto escalar correspondiente es $\vec{f}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), h^2 + a \cos(t) + a^2 \sin^2(t)) \cdot (-a \sin(t), a \cos(t), 0) = a^2$.

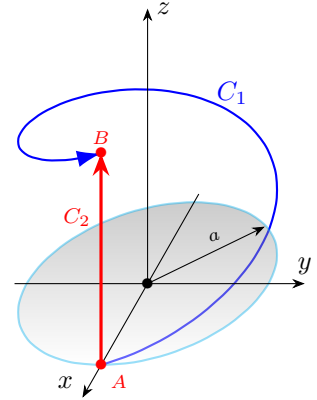
$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi a^2$$



- (i) Una vuelta de la hélice circular C_1 de radio a y paso h con eje z es parametrizada regularmente por $\vec{\sigma}_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}_1(t) = (a \cos(t), a \sin(t), (ht/2\pi))$. Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (-y, x, 2z)$ a lo largo de la hélice C_1 , y a lo largo del segmento orientado C_2 desde $A = (a, 0, 0)$ hasta $B = (a, 0, h)$.

♣ $\vec{\sigma}_1$ es una parametrización regular de la curva C_1 , con velocidad $\vec{\sigma}'_1(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), h/(2\pi))$; el campo vectorial, de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, sobre la curva C_1 es $\vec{f}(\vec{\sigma}_1(t)) = (-a \sin(t), a \cos(t), 2t(h/2\pi))$ con el producto escalar correspondiente $\vec{f}(\vec{\sigma}_1(t)) \cdot \vec{\sigma}'_1(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), 2t(h/2\pi)) \cdot (-a \sin(t), a \cos(t), (h/2\pi)) = a^2 + 2(h/2\pi)^2 t$.

$$\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (a^2 + 2(h/2\pi)^2 t) dt = [a^2 t + (h/2\pi)^2 t^2]_0^{2\pi} = 2\pi a^2 + h^2$$



Una parametrización regular para el segmento orientado C_2 es $\vec{\sigma}_2 : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}_2(t) = (a, 0, t)$, con velocidad $\vec{\sigma}'_2(t) = (0, 0, 1)$, de modo que sobre la curva C_2 es $\vec{f}(\vec{\sigma}_2(t)) = (0, 1, 2t)$ con el producto escalar correspondiente $\vec{f}(\vec{\sigma}_2(t)) \cdot \vec{\sigma}'_2(t) = (0, 1, 2t) \cdot (0, 0, 1) = 2t$.

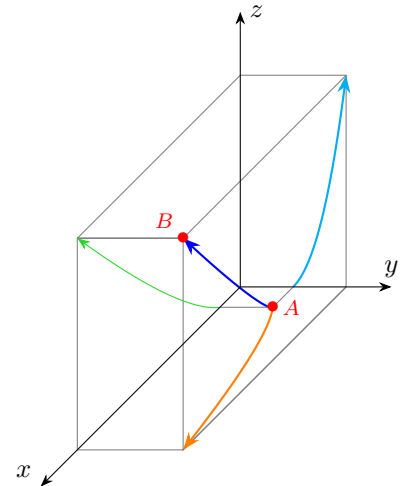
$$\int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^h \vec{f}(\vec{\sigma}_2(t)) \cdot \vec{\sigma}'_2(t) dt = \int_0^h 2t dt = t^2 \Big|_0^h = h^2$$

- (j) Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (2g(x, y, z), xy - 9xg(x, y, z), 3yg(x, y, z))$, siendo $g \in C(\mathbb{R}^3)$, desde el punto $A = (1, y_0, z_0)$ hasta $B = (8, y_1, z_1)$ a lo largo de la curva C contenida en la superficie de ecuación $z = x - y^2$, sabiendo que la proyección de C sobre el plano xy cumple la ecuación $x = y^3$.

♣ Lo primero, es ver una parametrización de la curva, de la que sabemos que está en la intersección de la superficie de ecuación $z = x - y^2$, con el cilindro proyectante de ecuación $x = y^3$, de modo que una parametrización regular es $\vec{\sigma} : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(t) = (t^3, t, t^3 - t^2)$.

Conviene puntualizar que el intervalo $[1, 2]$ surge del dato conocido del punto inicial $A = (1, y_0, z_0)$, de donde $t_0^3 = 1$ y de allí el valor (único) $t_0 = 1$; del mismo modo, $B = (8, y_1, z_1)$ de donde $t_1^3 = 8$, lo que obliga al valor $t_1 = 2$. De allí surgen entonces los puntos $A = \vec{\sigma}(1) = (1, 1, 0)$, $B = \vec{\sigma}(2) = (8, 2, 4)$.

En la figura se observa la curva C (color azul) recorrida desde A hasta B y se han dibujado también las trazas de los cilindros proyectantes; en particular, la correspondiente al dato inicial del ejercicio, $x = y^3$ se observa de color ocre. Las restantes proyecciones están distinguidas con color verde (sobre el plano xz) y celeste (sobre el plano yz).



Para la parametrización establecida, se tiene que su velocidad es $\vec{\sigma}'(t) = (3t^2, 1, 3t^2 - 2t)$. Por otra parte, el campo vectorial, es de clase $C(\mathbb{R}^3)$ (su regularidad es heredada por lo que dice sobre el campo escalar g , siendo el resto de las componentes polinómicas que no restringen la continuidad). El campo vectorial, evaluado sobre la curva C es $\vec{f}(\vec{\sigma}(t)) = (2g(\vec{\sigma}(t)), t^4 - 9t^3g(\vec{\sigma}(t)), 3tg(\vec{\sigma}(t)))$ y el producto escalar correspondiente resulta ser el siguiente.

$$\vec{f}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) = (2g(\vec{\sigma}(t)), t^4 - 9t^3g(\vec{\sigma}(t)), 3tg(\vec{\sigma}(t))) \cdot (3t^2, 1, 3t^2 - 2t) = t^4$$

Solo resta el cálculo mismo de la circulación, que resulta inmediato.

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 \vec{f}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt = \int_1^2 t^4 dt = [t^5/5]_1^2 = 31/5$$

Observación. En el ejercicio anterior, el campo escalar g se halla valuado en el punto (x, y, z) , y la circulación resultó independiente de g ; lo mismo habría resultado de estar g evaluada en cualquier terna obtenida a partir de la anterior, siempre que resultara la función continua en el espacio que contiene a la curva C . Por ejemplo, de reemplazar en el enunciado $g(x, y, z)$, por $g(xy + z, \cos(xyz), \ln(x^2 + z^4 + 1))$.

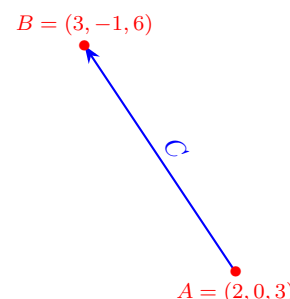
- (k) Sea $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (x + g(xy + z), y + g(xy + z), 2z)$, con $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}$. Probar que la circulación de $\vec{f}$ desde $A = (2, 0, 3)$ hasta $B = (3, -1, 6)$ a lo largo del segmento $C = AB$ no depende de g .

♣ Lo primero, es ver una parametrización regular del segmento, que es inmediata pues tiene la estructura $\vec{\sigma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(t) = A + t(B - A)$, lo que reemplazando los datos queda entonces como $\vec{\sigma}(t) = (2 + t, -t, 3 + 3t)$, con velocidad $\vec{\sigma}'(t) = (1, -1, 3)$. El campo vectorial, que es continuo en el espacio $\mathbb{R}^3$ (dada la continuidad de g en $\mathbb{R}$), evaluado sobre el segmento C es $\vec{f}(\vec{\sigma}(t)) = (2 + t + g(\vec{\sigma}(t)), -t + g(\vec{\sigma}(t)), 6 + 6t)$ y el producto escalar correspondiente resulta ser el siguiente.

$$\vec{f}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) = \vec{f}(\vec{\sigma}(t)) = (2 + t + g(\vec{\sigma}(t)), -t + g(\vec{\sigma}(t)), 6 + 6t) \cdot (1, -1, 3) = 20 + 20t$$

Solo resta el cálculo mismo de la circulación, que resulta inmediato.

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{f}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt = \int_0^1 (20 + 20t) dt = [20t + 10t^2]_0^1 = 30$$



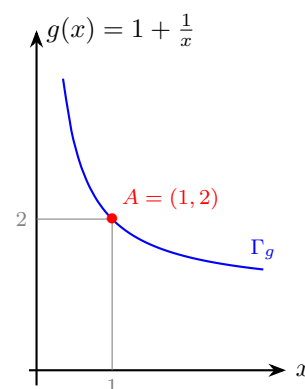
- (l) Sea $\vec{f}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x, y) = (y + xg(x), 3y + xg(x))$, con $\vec{f}(1, 1) = (3, 5)$. Hallar una función escalar g tal que $\vec{f}$ admita una función potencial en su dominio y obtener, para tal g , una función potencial Φ . ¿Es única?

♣ Siendo el dominio $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ un abierto simplemente conexo, es suficiente suponer que exista una función escalar $g \in C^1(\mathbb{R})$ e imponer la condición de simetría a las componentes del campo $f = (P, Q)$, para asegurar la existencia de una función potencial en ese dominio.

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1 = [xg(x)]' = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \text{ entonces es } [xg(x)]' = 1$$

La condición $\vec{f}(1, 1) = (3, 5)$ exige una condición inicial sobre la función buscada g .

$$\vec{f}(1, 1) = (3, 5) \text{ equivale a } \begin{cases} 1 + g(1) = 3 \\ 3 + g(1) = 5 \end{cases} \text{ entonces } g(1) = 2$$



Puestas las dos cosas juntas se tiene el problema de valor inicial $[xg(x)]' = 1, g(1) = 2$. La solución general de la ecuación diferencial es $xg(x) = x + c$, que con la condición inicial queda la única solución del problema de valor inicial, que es la función $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 1 + 1/x$, cuyo gráfico se ve en la figura. Conviene ver que, de hecho, la suposición de que fuese $g \in C^1(\mathbb{R})$, queda cumplida por la g encontrada.

Reemplazando la hallada función g , es $\vec{f}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x, y) = (x + y + 1, x + 3y + 1)$, y llamando como habitualmente $P(x, y) = x + y + 1, Q(x, y) = x + 3y + 1$ y eligiendo cualquier punto en el dominio, como puede ser $P_0 = (1, 0)$, se calcula una función potencial $\Phi: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int_1^x P(t, 0) dt + \int_0^y Q(x, t) dt = \int_1^x (t + 1) dt + \int_0^y (x + 3t + 1) dt = \\ &= [t^2/2 + t]_1^x + [xt + 3t^2/2 + t]_0^y = x^2/2 + x + xy + 3y^2/2 + y - 3/2 \end{aligned}$$

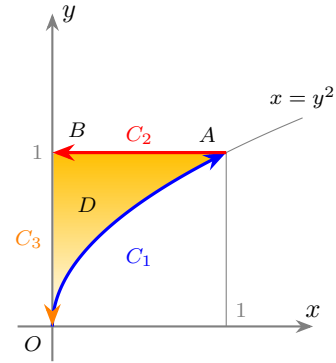
Observación. Las infinitas funciones potenciales posibles en el abierto simplemente conexo son tales que dos cualesquiera de ellas difieren de una constante, por lo que otra función potencial es

$$\Phi_1(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x + xy + \frac{3}{2}y^2 + y.$$

- (m) Sea $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x, y) = (x, x - y^2)$. Probar que $\vec{f}$ no admite función potencial y calcular la circulación en sentido positivo a lo largo de la curva $C = \partial D$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$.

♣ Siendo $\vec{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ con $P(x, y) = x, Q(x, y) = x - y^2$, la condición (que es necesaria para la existencia de una función potencial para $\vec{f}$) de simetría no se cumple: $P_y(x, y) = 0 \neq 1 = Q_x(x, y)$; esto basta para asegurar que $\vec{f}$ no admite función potencial. La circulación sobre la curva regular por tramos $C = \partial D^+ = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ se calcula como la suma de las circulaciones sobre cada uno de los tres tramos.

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{C_3} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$



$$C = \partial D^+ = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

Una parametrización regular de la curva C_1 es $\vec{\sigma}_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\sigma}_1(t) = (t^2, t)$, con velocidad $\vec{\sigma}'_1(t) = (2t, 1)$; el campo vectorial, de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, sobre la curva C_1 es $\vec{f}(\vec{\sigma}_1(t)) = (t^2, t^2 - t^2) = (t^2, 0)$ con el producto escalar correspondiente $\vec{f}(\vec{\sigma}_1(t)) \cdot \vec{\sigma}'_1(t) = (t^2, 0) \cdot (2t, 1) = 2t^3$.

$$\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (2t^3) dt = \left[\frac{1}{2} t^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Una parametrización regular de la curva C_2 es $\vec{\sigma}_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\sigma}_2(t) = (1-t, 1)$, con velocidad $\vec{\sigma}'_2(t) = (-1, 0)$; el campo vectorial, de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, sobre la curva C_2 es $\vec{f}(\vec{\sigma}_2(t)) = (1-t, 1-t-1^2) = (1-t, -t)$ con el producto escalar correspondiente $\vec{f}(\vec{\sigma}_2(t)) \cdot \vec{\sigma}'_2(t) = (1-t, -t) \cdot (-1, 0) = t-1$.

$$\int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (t-1) dt = \left[\frac{1}{2} t^2 - t \right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

Una parametrización regular de la curva C_3 es $\vec{\sigma}_3: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\sigma}_3(t) = (0, 1-t)$, con velocidad $\vec{\sigma}'_3(t) = (0, -1)$; el campo vectorial, de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, sobre la curva C_3 es $\vec{f}(\vec{\sigma}_3(t)) = (0, 0 - (1-t)^2) = (0, -(1-t)^2)$ con el producto escalar correspondiente $\vec{f}(\vec{\sigma}_3(t)) \cdot \vec{\sigma}'_3(t) = (0, -(1-t)^2) \cdot (0, -1) = (1-t)^2$.

$$\int_{C_3} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (1-t)^2 dt = -\left[\frac{1}{3} (1-t)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Poniendo todo junto, finalmente se tiene la circulación pedida:

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{C_3} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

- (n) Sea $\vec{f}: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (4x/z, 2y/z, -(2x^2 + y^2)/z^2)$, siendo $D = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$. Probar que $\vec{f}$ admite una función potencial $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Phi(1, 1, 1) = 3$ y describir las superficies equipotenciales. Luego, calcular la circulación a lo largo de la curva C con la orientación dada por la parametrización $\vec{\sigma}: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(t) = (1 + \ln(1 + \sin^4(t)), e^{t(\pi-t)}, 1 + t/\pi)$.

♣ El campo vectorial $\vec{f}: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{f} = (P, Q, R)$ es C^∞ en el dominio D_f abierto simplemente conexo, siendo $P(x, y, z) = 4x/z, Q(x, y, z) = 2y/z, R(x, y, z) = -(2x^2 + y^2)/z^2$ tales que cumplen la condición de simetría $P_y(x, y, z) = 0 = Q_x(x, y, z), P_z(x, y, z) = -4x/z^2 = R_x(x, y, z), Q_z(x, y, z) = -2y/z^2 = R_y(x, y, z), \forall (x, y, z) \in D$. Esto permite afirmar que $\vec{f}$ es el gradiente de un campo escalar (llamado función potencial) $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}$, esto es $\vec{f} = \nabla \Phi$, y tomando $P_0 = (0, 0, 1) \in D$, se halla una Φ con la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= \int_0^x P(t, 0, 1) dt + \int_0^y Q(x, t, 1) dt + \int_1^z R(x, y, t) dt = \int_0^x 4t dt + \int_0^y 2t dt + \int_1^z (-(2x^2 + y^2)/t^2) dt \\ \Phi(x, y, z) &= [2t^2]_0^x + [t^2]_0^y + \left[\frac{2x^2 + y^2}{t} \right]_1^z = \frac{2x^2 + y^2}{z} \end{aligned}$$

se verifica con facilidad que, efectivamente, $\vec{f} = \nabla \Phi$.

La función potencial obtenida cumple, además la condición $\Phi(1, 1, 1) = 3$ (de no haberla cumplido, bastaría añadir una constante para ajustar la condición). Las superficies equipotenciales son los conjuntos de nivel de $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Phi(x, y, z) = \frac{2x^2 + y^2}{z}$, esto es que, por definición, la superficie de potencial $k \in \mathbb{R}$ es:

$$C_k(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, y, z) \in D : \frac{2x^2 + y^2}{z} = k \text{ con } k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dado que $z > 0$ es claro que $C_k(\Phi) = \emptyset$ si $k < 0$, mientras que si $k = 0$ es $C_0(\Phi) = \{(x, y, z) \in D : x = y = 0, z > 0\}$ (esto es, el semieje positivo z). Finalmente, para $k > 0$, se tienen los paraboloides elípticos de ecuación $z = (2x^2 + y^2)/k, z > 0$ (observar que el origen no es parte de la equipotencial, la función potencial allí no está definida).

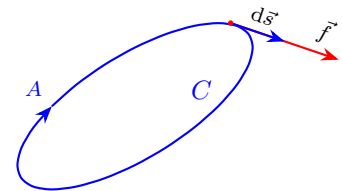
Para el campo de gradientes $\vec{f}$ que deriva de un potencial Φ , esto es $\vec{f} = \nabla\Phi$, se tiene que la circulación no depende de la trayectoria, dado que la curva C está contenida en D (observar que $\forall t \in [0, \pi] : z(t) = 1 + t/\pi > 0$) y se recorre desde $A = \vec{\sigma}(0) = (1, 1, 1)$ hasta $B = \vec{\sigma}(\pi) = (1, 1, 2)$. El cálculo es entonces directamente mediante la función potencial:

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \Phi(B) - \Phi(A) = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

- (o) Sea $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo tal que, para alguna curva cerrada regular en casi todas partes $C \subset D$ cumpla que, en cada punto de la curva, es proporcional a la velocidad. Probar que no admite una función potencial en D .

♣ Si $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular que orienta la curva cerrada (lazo) C desde $A = \vec{\sigma}(a)$ hasta el mismo $A = \vec{\sigma}(b)$, y $\vec{f}(\vec{\sigma}(t)) = k\vec{\sigma}'(t)$ siendo k una constante no nula, resulta que la circulación sobre el camino cerrado C no es nula, como lo muestra la siguiente expresión.

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt = k \int_a^b \|\vec{\sigma}'(t)\|^2 dt \neq 0$$



En efecto, siendo regular en casi todas partes la parametrización $\vec{\sigma}$ existe al menos un punto $t_0 \in (a, b)$ donde $\vec{\sigma}'(t_0)$ no es el vector nulo, y entonces $\|\vec{\sigma}'(t_0)\|^2 > 0$; como además es $\vec{\sigma}'$ continua en ese punto, existe un intervalo $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ que contiene a t_0 tal que para todo $t \in (a_1, b_1) : \|\vec{\sigma}'(t)\|^2 > 0$ y entonces es $\int_{a_1}^{b_1} \|\vec{\sigma}'(t)\|^2 dt > 0$ donde resulta que:

$$\int_a^b \|\vec{\sigma}'(t)\|^2 dt \geq \int_{a_1}^{b_1} \|\vec{\sigma}'(t)\|^2 dt > 0.$$

De modo que, efectivamente (dado que $k \neq 0$) es $k \int_a^b \|\vec{\sigma}'(t)\|^2 dt \neq 0$. De modo que el campo no puede admitir una función potencial, pues en tal caso esta integral resultaría nula.

- (p) Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar $C^2(\mathbb{R}^n)$ y sea C una curva orientada en $\mathbb{R}^n$ que va desde A hasta B . Probar que $\vec{f} = \varphi \nabla \varphi$ es un campo de gradientes y calcular $\int_C \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{s}$, sabiendo que $\varphi(B) = 7$ y que $\int_C \nabla \varphi \cdot d\vec{s} = 4$.

♣ En primer lugar, dado que se sabe que $\int_C \nabla \varphi \cdot d\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A)$, los datos permiten calcular el valor de φ en el punto A .

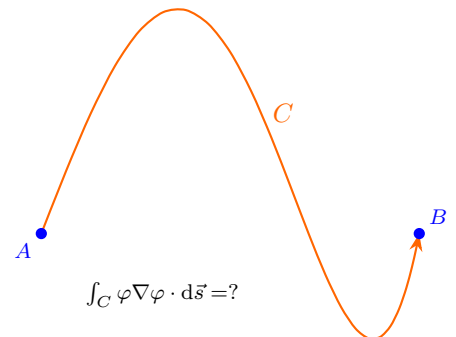
$$\int_C \nabla \varphi \cdot d\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A) = 4, \varphi(B) = 7 \text{ de donde } \varphi(A) = 3$$

El campo $\vec{f} = \varphi \nabla \varphi$ es $C^1(\mathbb{R}^n)$ (dado que φ es C^2) y se comprueba directamente que es el gradiente de una función potencial $\Phi = \frac{1}{2}\varphi^2$, puesto que por la regla de la cadena se tiene la siguiente expresión:

$$\nabla \Phi = \nabla\left(\frac{1}{2}\varphi^2\right) = \frac{1}{2}\nabla(\varphi^2) = \frac{1}{2}(2\varphi \nabla \varphi) = \varphi \nabla \varphi = \vec{f}$$

Solo resta entonces el cálculo pedido:

$$\int_C \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{s} = \Phi(B) - \Phi(A) = \frac{1}{2}(\varphi^2(B) - \varphi^2(A)) = \frac{1}{2}(7^2 - 3^2) = \frac{1}{2}40 = 20.$$



- (q) Hallar los valores de las constantes a y b para que resulte conservativo el siguiente campo vectorial:

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \vec{f}(x, y, z) = (ax \sin(\pi y), x^2 \cos(\pi y) + bye^{-z}, y^2 e^{-z}).$$

Para los valores de a y b así obtenidos, calcular la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva C parametrizada por $\vec{\sigma}_1: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}_1(t) = (\cos^3(t), \sin^2(2t), \sin^3(t))$.

♣ El campo vectorial $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{f} = (P, Q, R)$ es $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ (es claro que $\mathbb{R}^3$ es un abierto simplemente conexo), siendo $P(x, y, z) = ax \sin(\pi y)$, $Q(x, y, z) = x^2 \cos(\pi y) + bye^{-z}$, $R(x, y, z) = y^2 e^{-z}$. En tales condiciones, basta hallar valores (si existen) tales que se cumpla la condición de simetría, como se impone en el siguiente sistema, que debe cumplirse para todo (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} P_y(x, y, z) = Q_x(x, y, z) & \text{equivale a } ax \cos(\pi y) = 2x \cos(\pi y) \text{ de donde } a = 2/\pi \\ P_z(x, y, z) = R_x(x, y, z) & \text{equivale a } 0 = 0 \text{ que se verifica en todo caso} \\ Q_z(x, y, z) = R_y(x, y, z) & \text{equivale a } -bye^{-z} = 2ye^{-z} \text{ de donde } b = -2 \end{cases} \quad \text{luego } a = 2/\pi, b = -2$$

De este modo, el campo vectorial, con esta elección de las constantes a y b , resulta ser el siguiente:

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \vec{f}(x, y, z) = \left(\frac{2}{\pi} x \sin(\pi y), x^2 \cos(\pi y) - 2ye^{-z}, y^2 e^{-z} \right).$$

Siendo que $\vec{f}$ es el gradiente de un campo escalar $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, esto es $\vec{f} = \nabla \Phi$, tomando $P_0 = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, se halla una Φ con la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= \int_0^x P(t, 0, 0) dt + \int_0^y Q(x, t, 0) dt + \int_0^z R(x, y, t) dt = 0 + \int_0^y (x^2 \cos(\pi t) - 2t) dt + \int_0^z y^2 e^{-t} dt \\ \Phi(x, y, z) &= \left[\frac{1}{\pi} x^2 \sin(\pi t) - t^2 \right]_0^y + [(-y^2 e^{-t})]_0^z = \frac{1}{\pi} x^2 \sin(\pi y) - y^2 e^{-z}; \text{ se verifica que, efectivamente, } \vec{f} = \nabla \Phi. \end{aligned}$$

Para el campo de gradientes $\vec{f}$ que deriva del potencial Φ , se tiene que la circulación no depende de la trayectoria, y se recorre desde $A = \vec{\sigma}(0) = (1, 0, 0)$ hasta $B = \vec{\sigma}(\pi) = (-1, 0, 0)$. El cálculo es entonces directamente mediante la función potencial:

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \Phi(B) - \Phi(A) = 0 - 0 = 0$$

Observación. En este ejercicio tal vez resultara más expeditivo, una vez asegurada la independencia de la trayectoria, reemplazar la curva dada por otra cualquiera que haga más sencillo el cálculo de la circulación, sin pasar por el la obtención de la función potencial. Por ejemplo, si se va desde A hasta B por el segmento C^* parametrizado por $\vec{\sigma}^*: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}^*(t) = (1 - 2t, 0, 0)$, con velocidad $(\vec{\sigma}^*)'(t) = (-2, 0, 0)$, se ve de inmediato que:

$$\vec{f}(\vec{\sigma}^*(t)) \cdot (\vec{\sigma}^*)'(t) = (0, t^2, 0) \cdot (-2, 0, 0) = 0 \Rightarrow \int_{C^*} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0.$$

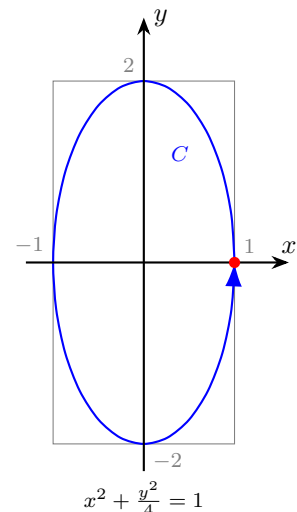
- (r) Sea $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x, y) = (e^x \sin(y) + 3y, e^x \cos(y) + 2x - 2y)$, con C la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 4$ recorrida una vez en sentido antihorario. Calcular la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de C .

♣ La función vectorial $\vec{\sigma}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (\cos(t), 2 \sin(t))$ parametriza regularmente la elipse y la orienta en sentido antihorario. Por otra parte, el campo vectorial $\vec{f}$ es de clase C -infinito en el abierto simplemente conexo $\mathbb{R}^2$, y siendo $\vec{f} = (P, Q)$, con $P(x, y) = e^x \sin(y) + 3y$, $Q(x, y) = e^x \cos(y) + 2x - 2y$, se advierte que el campo no es conservativo, puesto que no se cumple la condición de simetría.

$$P_y(x, y) = e^x \cos(y) + 3 \neq e^x \cos(y) + 2 = Q_x(x, y)$$

Sin embargo, haciendo $\vec{f} = \vec{g} + \vec{h}$ con $\vec{g}(x, y) = (e^x \sin(y) + 2y, e^x \cos(y) + 2x - 2y)$, $\vec{h}(x, y) = (y, 0)$, se tiene que el campo $\vec{g}$ es conservativo, pues (verificarlo) $\vec{g} = \nabla \Phi$ con $\Phi(x, y) = e^x \sin(y) + 2xy - y^2$, quedando entonces que $\vec{f} = \nabla \Phi + \vec{h}$. Esto simplifica el cálculo, dado que la circulación de $\vec{g}$ a lo largo de la curva cerrada se anula, quedando solamente el cálculo de la circulación del campo vectorial $\vec{h}$.

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\oint_C \vec{g} \cdot d\vec{s}}_0 + \oint_C \vec{h} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{h} \cdot d\vec{s}$$



El campo vectorial $\vec{h}$ evaluado sobre la curva C es $\vec{h}(\vec{\sigma}(t)) = (2\sin(t), 0)$ y entonces el producto escalar con el vector velocidad queda $\vec{h}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) = (2\sin(t), 0) \cdot (-\sin(t), 2\cos(t)) = -2\sin^2(t)$. De allí, entonces, la circulación pedida:

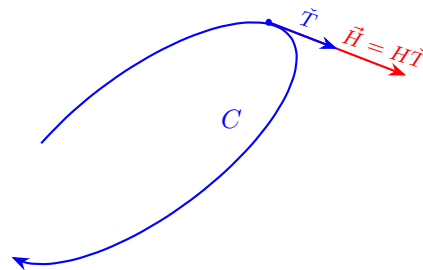
$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{h} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{h}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-2\sin^2(t)) dt = \left[-t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{2\pi} = -2\pi.$$

Observación. Este ejercicio resulta de resolución mucho más sencilla aplicando el Teorema de Green, uno de los próximos temas de la asignatura.

- (s) Sea $\vec{H} : HT$ donde $H = \|\vec{H}\|$ es constante y $\vec{T}$ el versor tangente a una curva simple suave C de longitud L , contenida en el dominio de $\vec{H}$. Probar que $\int_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = HL$ y que, por lo tanto, el campo $\vec{H}$ no puede ser un campo de gradientes.

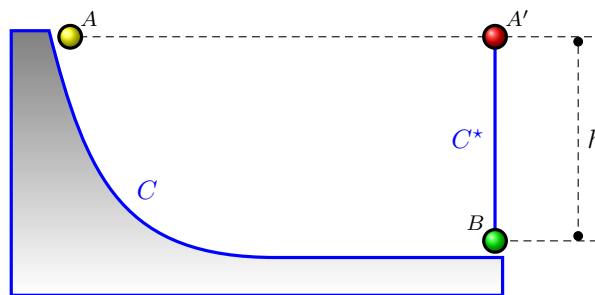
♣ Si $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular que orienta la curva C entonces el versor tangente en cada punto $\vec{\sigma}(t)$ es $\vec{T} = \vec{\sigma}'(t)/\|\vec{\sigma}'(t)\|$ y de esta manera se tiene el campo vectorial es $\vec{H} : HT = H\vec{\sigma}'(t)/\|\vec{\sigma}'(t)\|$. El cálculo de la circulación resulta entonces:

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_a^b H \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|} \cdot \vec{\sigma}'(t) dt = H \int_a^b \|\vec{\sigma}'(t)\| dt = HL$$



Es inmediata la imposibilidad de que el campo $\vec{H}$ sea de gradientes: si lo fuera, esta circulación debería ser independiente de la trayectoria que une dos puntos $A = \vec{\sigma}(a)$ y $B = \vec{\sigma}(b)$, pero dado que esos dos puntos pueden unirse con curvas de diferente longitud, tal independencia es imposible. Otro modo de verlo: si la curva C es cerrada, el resultado anterior dice que $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = HL \neq 0$.

- (t) Una partícula de masa m se deja caer desde el punto $A = (x_a, y_a)$ por la curva C constituida por la rampa prolongada con la pista horizontal; tras el movimiento, alcanza la posición $B = (x_b, y_b)$, tal como se muestra en la figura. Calcular el trabajo W_{AB} efectuado por la fuerza peso a lo largo de la trayectoria que recorre la partícula desde A hasta B . ¿Cuál sería el trabajo $W_{A'B}$ de la misma fuerza obrando en la caída libre desde $A' = (x_b, y_a)$ hasta $B = (x_b, y_b)$?



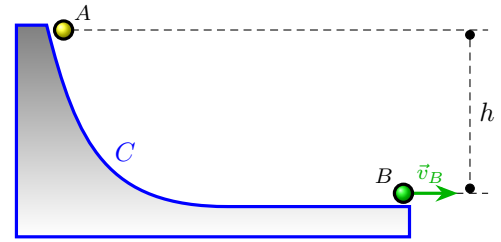
♣ La fuerza peso está dada por $\vec{f}(x, y) = (0, -mg)$ que es claramente conservativa, una función potencial para ella es el campo escalar $\Phi(x, y) = -mgy$ pues $\vec{f} = \nabla\Phi$ (con m y g constantes). Pero entonces el trabajo efectuado por esta fuerza es independiente de la forma de la rampa:

$$W_{AB} = \int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \Phi(B) - \Phi(A) = -mgy_b - (-mgy_a) = mg(y_a - y_b) = mgh.$$

Si, ahora, la partícula siguiera la vertical C^* de ecuación $x = x_b$, desde el punto $A' = (x_b, y_a)$ hasta el punto $B = (x_b, y_b)$, nuevamente el trabajo se obtiene de modo directo mediante la función potencial y, previsiblemente, da el mismo valor, ya que solo interviene la diferencia de las ordenadas entre el punto inicial y el punto final (lo que en la figura se indica con h).

$$W_{A'B} = \int_{C^*} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \Phi(B) - \Phi(A') = -mgy_b - (-mgy_a) = mg(y_a - y_b) = mgh.$$

- (u) Probar el teorema de conservación de la energía mecánica y aplicarlo al problema siguiente: la partícula de masa m se deja caer desde el punto $A = (x_a, y_a)$ por la curva C constituida por la rampa prolongada con la pista horizontal, siendo los rozamientos despreciables; determinar la velocidad $\vec{v}_B$ en la posición $B = (x_b, y_b)$, tal como se muestra en la figura.



♣ En general, si una partícula sigue una trayectoria suave C parametrizada por $\vec{\sigma}$ desde $A = \vec{\sigma}(a)$ hasta $B = \vec{\sigma}(b)$ bajo la acción de un campo conservativo $\vec{f} = \nabla\Phi$, definiendo la energía potencial como $U \stackrel{\text{def}}{=} -\Phi$ es:

$$W_{AB} = \int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \Phi(B) - \Phi(A) = U(A) - U(B).$$

Por otra, parte se tiene que por la segunda ley de Newton es $\vec{f}(\vec{\sigma}(t)) = m\vec{\sigma}''(t)$, de modo que el trabajo también es $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt = \int_a^b m\vec{\sigma}''(t) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt = \frac{1}{2}m \int_a^b [\vec{\sigma}'(t) \cdot \vec{\sigma}'(t)]' dt$. Designando la rapidez con $v(t) = \|\vec{\sigma}'(t)\|$ entonces queda que:

$$W_{AB} = \int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}m \int_a^b [v^2(t)]' dt = \left[\frac{1}{2}mv^2(t) \right]_a^b = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Llamando K (energía cinética) a $\frac{1}{2}mv^2$, reuniendo las dos expresiones anteriores, resulta el teorema de la conservación de la energía mecánica (de donde las fuerzas involucradas heredan su nombre de *conservativas*):

$$W_{AB} = \int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = U(A) - U(B) = K(B) - K(A) \Rightarrow U(A) + K(A) = U(B) + K(B)$$

Aplicando esto al ejercicio, dado que $U(x, y) = -\Phi(x, y) = mgy$ se obtiene el muy conocido resultado la rapidez en el punto B : $mgy_b + \frac{1}{2}m(0^2) = mgy_a + \frac{1}{2}mv_B^2$ de donde $v_B = \sqrt{2g(y_b - y_a)} = \sqrt{2gh}$. Finalmente, la velocidad pedida es $\vec{v}_B = (\sqrt{2gh}, 0)$.

Textos. Esta limitada selección de ejercicios puede ser, con muchísimo provecho, completada por los múltiples ejemplos que se presentan en los libros de texto, que además se hallan acompañados por discusiones previas y posteriores de los fundamentos y motivaciones de tales ejemplos.

Apostol, T. (1980). Calculus volumen 2. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades (Segunda edición). (F. Véllez Cantarell, Trad.) Barcelona: Reverté.

Lang, S. (1976). Cálculo II (Primera edición ed.). (H. Pereyra, Trad.) México: Fondo educativo interamericano.

Marsden, J. E., y Tromba, A. J. (1991). Cálculo Vectorial (Cuarta edición). (M. López Mateos, y S. Adarve, Trans.) Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana.

Pita Ruiz, C. (1995). Cálculo Vectorial (Primera edición ed.). Naucalpan de Juárez: Prentice Hall Hispanoamericana.

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., y Trejo, C. (1968). Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones (Séptima edición). Buenos Aires: Kapelusz.

Santaló, L. (1993). Vectores y tensores con sus aplicaciones (Decimocuarta edición). Buenos Aires: Eudeba.