**Ejemplos resueltos del TP II - Funciones, límite y continuidad. Curvas y superficies**

1. *(Ejercicio 3 del parcial del 11/12/18. Funciones)*

   Dado $\vec{f}: D \subset \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2 / \vec{f}(x,y) = \left(ln(y-x^2), \sqrt{9-y-x^2}\right)$, donde $D$ es el dominio natural de $\vec{f}$, **determine y grafique** el mencionado dominio $D$ y el conjunto $H$ en cuyos puntos alguna de las componentes del campo resulta nula.

   *Solución*

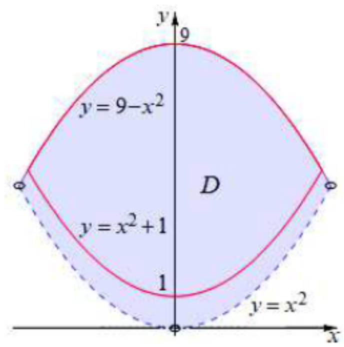
   Los puntos $(x,y)$ del dominio natural son aquellos que cumplen con:

   $$\begin{cases} ln(y-x^2) \in \mathcal{R} & \Rightarrow \quad y > x^2 \\ \sqrt{9-y-x^2} \in \mathcal{R} & \Rightarrow \quad 9-y-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

   de donde resulta:

   $D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 / y > x^2 \wedge y \leq 9-x^2\}$

   que se representa sombreado en la figura de la derecha.

   Por otra parte, alguna de las componentes del campo resulta nula en todos los puntos de $D$ donde

   $ln(y-x^2) = 0 \quad \Rightarrow y - x^2 = 1$ o bien $\sqrt{9-y-x^2} = 0 \quad \Rightarrow 9 - y - x^2 = 0$. Entonces

   $H = \{(x,y) \in D / y = x^2 + 1 \vee y = 9 - x^2\}$ que son los dos arcos de curva (incluidos en $D$) que se representan en el gráfico en color rojo.

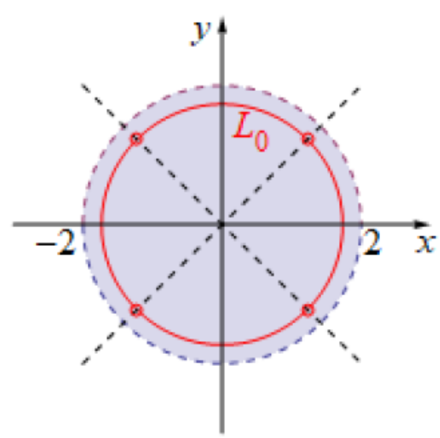
2. *(Ejercicio 2 del parcial del 21/10/19, funciones)*

   Sea $f(x,y) = \frac{ln(4-x^2-y^2)}{y^2-x^2}$ definida en su dominio natural $D$. **Determine y grafique** $D$ y el conjunto de nivel 0 de $f$.

   *Solución*

   Los puntos $(x,y) \in D$ deben cumplir con: $x^2+y^2 < 4 \wedge y^2 \neq x^2$, por lo tanto

   $D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 / x^2 + y^2 < 4 \wedge y \neq x \wedge y \neq -x\}$ que se representa sombreado en el gráfico.

   Por otra parte el conjunto de nivel $L_0$ de $f$ contiene a los puntos del dominio para los cuales $f(x,y) = 0$.

   Esto se cumple cuando $4 - x^2 - y^2 = 1$. Así, el conjunto de nivel 0 de $f$ es:

   $L_0 = \{(x,y) \in D / x^2 + y^2 = 3\}$ el cual se representa en color rojo en la figura.

3. *(Ejercicio 2.7, curvas )* Dados los siguientes conjuntos de puntos descriptos mediante ecuaciones cartesianas, expréselos paramétricamente mediante una ecuación vectorial e indique si con la parametrización adoptada el conjunto cumple con la definición de curva.

   a. Puntos de $\mathcal{R}^2$ que satisfacen la ecuaciones:
      - $y = x^2$
      - $x^2 + y^2 = 4$

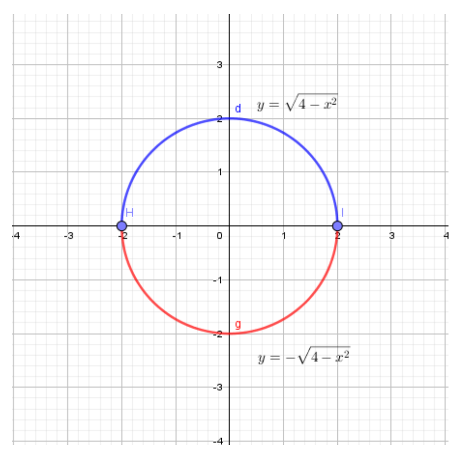
   b. Puntos de $\mathcal{R}^3$ que satisfacen las ecuaciones
      - $y = x^2 \wedge x + z = y$
      - $x + y = 5 \wedge z = x^2 + y^2$

   *Solución*

   a.

   - De la ecuación cartesiana $y = x^2$ podemos definir $x = t$ e $y = t^2$, con $t \in \mathcal{R}$ y obtener una parametrización de la curva $C_1 : \vec{X} = \vec{g}_1(t) = (t, t^2); \quad t \in \mathcal{R}$.
     Notar que $\vec{g}_1$ tiene componentes polinómicas por lo que $\vec{g}_1$ es continua en $\mathcal{R}$ de modo que, con la parametrización elegida, el conjunto cumple la definición de curva.

   - De la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ si queremos adoptar el mismo camino que el caso anterior $x = t$, al despejar $y$ obtenemos $|y| = \sqrt{4 - x^2}$,con $t \in [-2, 2]$, y necesitamos dos funciones para describir la circunferencia completa $y = +\sqrt{4 - x^2}$ para la semicircunferencia con $y \geq 0$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$ para la semicircunferencia con $y \leq 0$, por lo que buscaremos una solución para describir toda la circunferencia con una sola función continua.
     Recordando los conceptos de trigonometría en el rectángulo de la figura de abajo podemos ver que:

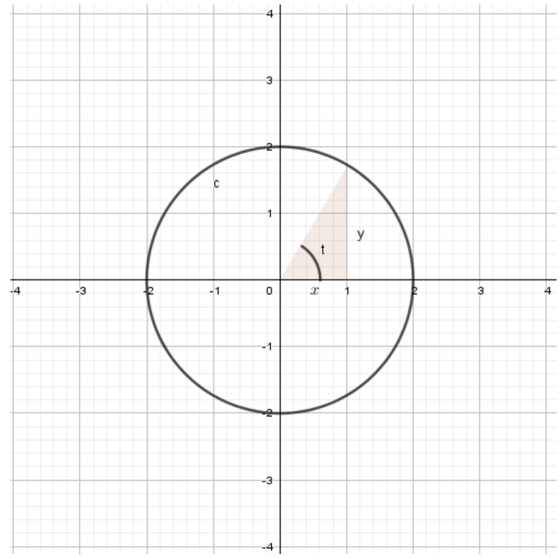


$$\begin{cases} cos(t) = \frac{x}{a} & \Rightarrow \quad x = a\ cos(t) \\ sen(t) = \frac{y}{a} & \Rightarrow \quad y = a\ sen(t) \end{cases}$$

Por lo que ambas coordenadas quedan expresadas en función del ángulo $t$. Entonces una parametrización posible para toda la circunferencia es:

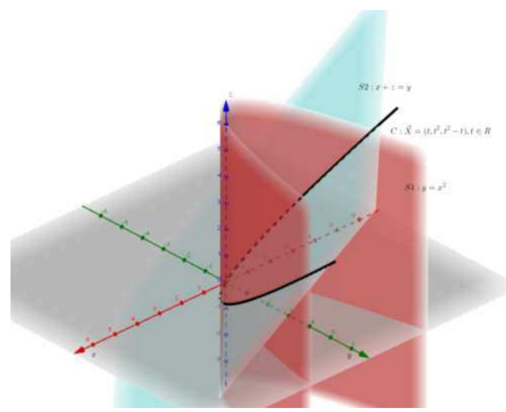
$C_2 : \vec{X} = \vec{g}_2(t) = (2\ cos(t), 2\ sen(t)); \quad t \in [0, 2\pi]$.

Notar que $\vec{g}_2$ es una función continua y por lo tanto el conjunto de puntos cumple con la definición de curva.

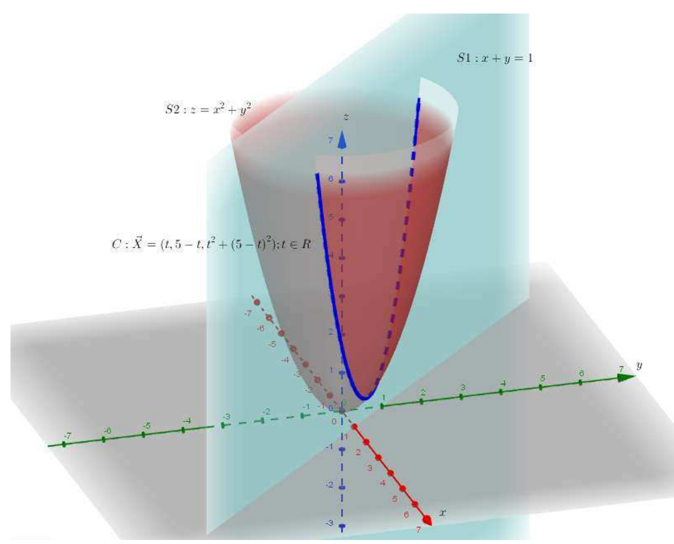


*b.*

- Para el conjunto de puntos de $\mathcal{R}^3$ que cumplen que $y = x^2 \quad \wedge \quad x + z = y$ elegiremos como parámetro la variable $x$, así:
  $x = t$, $y = t^2$, $z = t^2 = t$
  con lo cual la paramentrización queda:
  $C_3 : \vec{X} = \vec{g}_3(t) = (t, t^2, t^2 - t); \quad t \in \mathcal{R}$.



- Para el conjunto de puntos de $\mathcal{R}^3$ que cumplen que $x + y = 5 \quad \wedge \quad z = x^2 + y^2$ en forma análoga al caso anterior eligiendo como parámetro a la variable $y$, obtenemos la parametrización:
  $C_4 : \vec{X} = \vec{g}_4(t) = (5 - t, t, (5 - t)^2 + t^2);$
  $t \in \mathcal{R}$.
  Las funciones $\vec{g}_3$ y $\vec{g}_4$ son continuas en $\mathcal{R}$, por lo que ambos conjuntos cumplen con la definición de curva.



4. *(Ejercicio 2.10, límite y continuidad )*

   Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-x(y+1)^2}{x^2+(y+1)^2)} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,-1) \\ k & \text{si} \quad (x,y) = (0,-1) \end{cases}$

   Determine, si es posible, el valor de $k$ para que $f$ resulte continua en $\mathcal{R}^2$.

   *Solución*

   La función $f$ es continua en todo punto $(x,y) \neq (0,-1)$ pues su expresión es cociente de funciones continuas con denominador no nulo.

   Ahora analizaremos para el punto $(0,-1)$, primero calculando (si existe) el límite:

   $$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{x^3-x(y+1)^2}{x^2+(y+1)^2}$$

   así expresado observamos que resulta una indeterminación del tipo "0/0", pero operando podemos reescribir el límite como:

   $$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \left[ x\frac{x^2}{x^2+(y+1)^2} - x\frac{(y+1)^2}{x^2+(y+1)^2} \right]$$

   En los dos términos dentro del límite observamos que es un producto donde un factor tiende a cero y los otros factores están acotados (ver síntesis S2 y justifique calculando entre que valores están) , por lo tanto el límite existe y vale cero.

   $$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{x^3-x(y+1)^2}{x^2+(y+1)^2} = 0$$

   Por lo tanto alcanza con tomar el valor de $k=0$ para que la función sea continua en todo $\mathcal{R}^2$ (ver definición de continuidad).

5. *(Ejercicio 2.16, superficies )* Determine la ecuación de las líneas coordenadas de las siguientes superficies. Interprete gráficamente.

   - $\vec{F}(u,v) = (u,v,u^2+v^2),\ \text{con}\ (u,v) \in \mathcal{R}^2$

   *Solución*

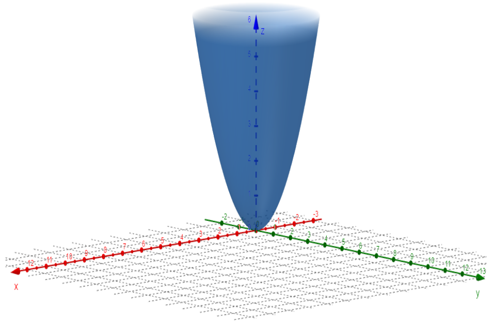
   - $\vec{F}(u,v) = (u,v,u^2+v^2),\ \text{con}\ (u,v) \in \mathcal{R}^2$

     Los puntos genéricos $\vec{X} = (x,y,z)$ cumplen:

     $$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2+v^2 \end{cases}$$

     Lo que equivale a escribir:

$z = x^2 + y^2$ con $(x, y) \in \mathcal{R}^2$.
En la figura se representa la región correspondiente a la superficie $S = Im(\vec{F})$. El gráfico fue realizado con *Geogebra*, cuyo link es: *https://www.geogebra.org/geometry*



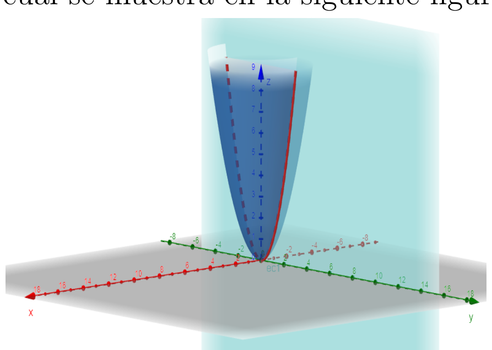
Observe que la superficie $S$ es el paraboloide $z = x^2 + y^2$ el cual no está limitado dado que $(x, y) \in \mathcal{R}^2$.

Las líneas coordenadas se obtienen dando un valor particular de $u$ y de $v$ siendo $u = u_0$ y $v = v_0$. Asi obtenemos:
$\vec{\alpha}(v) = \vec{F}(u_0, v) = (u_0, v, u_0^2 + v^2)$ con $v \in \mathcal{R}$.
$\vec{\beta}(u) = \vec{F}(u, v_0) = (u, v_0, u^2 + v_0^2)$ con $u \in \mathcal{R}$..
Así si damos un valor particular a $u$ por ejemplo $u_0 = 0$ obtenemos la curva $C_1$ cuya parametrización es:
$\vec{\alpha}(v) = (0, v, v^2)$ con $v \in \mathcal{R}$.
Que es la parábola intersección del paraboloide con el plano $x = 0$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = v \\ z = v^2 \end{cases}$$

Que equivale a la parábola $z = y^2 \wedge x = 0$.

La cual se muestra en la siguiente figura:



Análogamente si damos un valor particular a $v$ por ejemplo $v_0 = 1$ obtenemos la curva $C_2$ cuya parametrización es:

$\vec{\beta}(u) = (u, 1, u^2 + 1)$ con $u \in \mathcal{R}$.

Que equivale a:

$$\begin{cases} x = u \\ y = 1 \\ z = u^2 + 1 \end{cases}$$

Que es la parábola $z = x^2 + 1 \wedge y = 1$, la cual se muestra en la siguiente figura: