Teoremas Integrales - Ejemplos resueltos

1. Sea $\vec{f}(x,y) = (2y^2, 6xy)$. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq 0\}$.

   a) Calcular la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la frontera de D recorrida en sentido positivo, utilizando integrales de línea.

   b) Calcular la circulación del item a) utilizando el teorema de Green.

   Solución

   La región plana D está formada por los puntos (x,y) que satisfacen las desigualdades $x^2 + y^2 \leq 4x$, $y \geq 0$ las que pueden escribirse como $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$. Vemos que los puntos de D pertenecen al semidisco de centro $(2,0)$ y radio 2 en el primer cuadrante. La Figura 1 es un gráfico de la región D y su frontera, para la cual se indica el sentido de recorrido positivo que se pide para la circulación del campo $\vec{f}$.

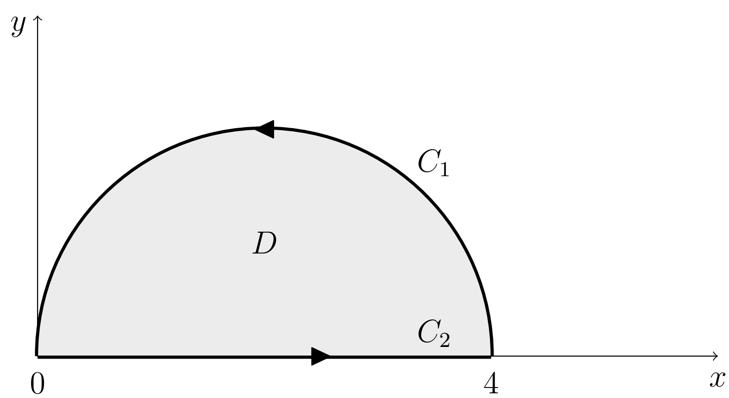

Figura 1: región D y su frontera $\partial D = C_1 \cup C_2$

Vamos a suponer que el dominio de $\vec{f}$, no indicado en el enunciado, es $\mathbb{R}^2$. Ver que $\vec{f}$ es de clase C^∞ en su dominio.

a) La frontera de D, que simbolizamos ∂D, es la unión de dos curvas. La curva superior, que llamaremos C_1, es la semicircunferencia de ecuación $(x-2)^2 + y^2 = 4$ con $y \geq 0$. La curva inferior, que llamaremos C_2, es el segmento del eje x con $0 \leq x \leq 4$. Se pide calcular la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la frontera de D recorrida en sentido positivo. Esto es, la integral de línea $\vec{f}$ a lo largo de ∂D, recorrida en sentido antihorario. Siendo $\partial D = C_1 \cup C_2$ se tiene que

$$\oint_{\partial D^+} \vec{f}(x,y) \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{f}(x,y) \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{f}(x,y) \cdot d\vec{s}$$

donde ∂D^+ indica el sentido positivo de recorrido. Por lo tanto C_1 y C_2 deben recorrerse en los sentidos indicados en la Figura 1. Para la integral sobre C_1 parametrizamos la curva mediante la función $\vec{r} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ con $\vec{r}(t) = (2 + 2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t))$. Calculamos primero el producto

$\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = \big(8sen^2(t), 24\mathrm{sen}(t) + 24\mathrm{sen}(t)\cos(t)\big) \cdot \big(-2\mathrm{sen}(t), 2\cos(t)\big)$

$= -16\mathrm{sen}^3(t) + 48\mathrm{sen}(t)\cos(t) + 48\mathrm{sen}(t)\cos^2(t)$

$= -64\mathrm{sen}^3(t) + 48\mathrm{sen}(t)\cos(t) + 48\mathrm{sen}(t)$

Entonces

$$\int_{C_1} \vec{f}(x,y) \cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi} \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{\pi} \big(-64\mathrm{sen}^3(t) + 48\mathrm{sen}(t)\cos(t) + 48\mathrm{sen}(t)\big) dt$$

$$= -64\Big(\tfrac{\cos^3(t)}{3} - \cos(t)\Big) - 12\cos(2t) - 48\cos(t)\Big|_0^{\pi} = \tfrac{32}{3}$$

Para la integral sobre C_2 observar primero que sobre los puntos (x,y) de C_2 es $y = 0$ por lo que el campo vectorial $\vec{f}(x,y)$ resulta nulo en esos puntos. Por lo tanto: $\int_{C_2} \vec{f}(x,y) \cdot d\vec{s} = 0$.

Finalmente:

$$\int_{\partial D^+} \vec{f}(x,y) \cdot d\vec{s} = \boxed{\tfrac{32}{3}}$$

b) El teorema de Green establece que si D es una región de $\mathbb{R}^2$ encerrada por una curva C cerrada simple regular o regular a trozos y $\vec{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ es un campo vectorial de clase C^1 en un dominio abierto que incluya a D y a su borde C entonces la integral de $\vec{f}$ sobre la curva C recorrida en sentido antihorario es:

$$\oint_{C^+} \vec{f}(x,y) \cdot d\vec{s} = \iint_D \big(Q'_x - P'_y\big) dxdy$$

La función $\vec{f}$ y la región D del problema satisfacen las hipótesis del teorema. Entonces la circulación pedida en a) se puede calcular mediante la integral doble sobre D de $Q'_x - P'_y$. Siendo $P(x,y) = 2y^2$ y $Q(x,y) = 6xy$ resulta:

$$\iint_D \big(Q'_x - P'_y\big) dxdy = \iint_D 2ydxdy = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-(x-2)^2}} 2ydydx$$

$$= \int_0^4 (4-(x-2)^2)dx = \boxed{\frac{32}{3}}$$

---

2. Sean la curva C_1 parametrizada por $\vec{\alpha}(t) = (t\,\text{sen}(t), t\cos(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$ y el segmento C_2, que va desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(0, 2\pi)$. Calcular el área de la región encerrada por $C_1 \cup C_2$.

   Solución

   La región encerrada por la espiral C_1 y el segmento C_2 se muestra en la Figura 2.

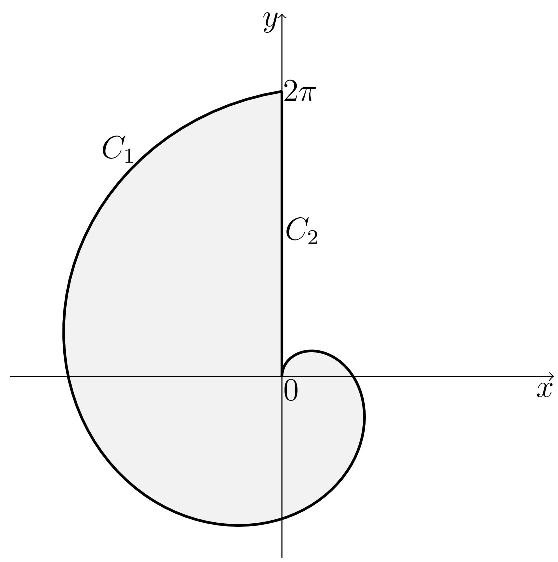

Figura 2

Vamos a calcular el área pedida aplicando el teorema de Green. Sea el campo vectorial $\vec{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (-y/2, x/2)$ para el cual se cumple $Q'_x - P'_y = 1$. Entonces, si R es una región plana encerrada por una curva C el teorema de Green establece que

$$\oint_{C^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \iint_R (Q'_x - P'_y)dxdy = \iint_R dxdy = \text{área de } R$$

Podemos entonces tomar $C = C_1 \cup C_2$ y R, la región interior a C, para calcular el área de R evaluando la integral de línea de $\vec{f}$ sobre la curva C recorrida en sentido antihorario. Simbolicemos C_2^+ el recorrido del segmento C_2 en el sentido del semieje $+y$. De la misma forma, simbolicemos C_1^+ el recorrido de la curva C_1 desde $(0, 2\pi)$ como punto inicial hasta $(0,0)$ como punto final. Entonces, si C^+ simboliza el recorrido antihorario de la curva C, resulta $C^+ = C_1^+ \cup C_2^+$. Por lo tanto

$$\oint_{C^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{C_1^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} + \int_{C_2^+} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

La curva C_1 está parametrizada por la función $\vec{\alpha}$ la cual recorre la curva desde $(0,0)$ como punto inicial hasta $(0,2\pi)$ como punto final. Este recorrido, que simbolizamos C_1^-, es opuesto a C_1^+ por lo tanto

$$\int_{C_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\int_{C_1^-} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t)dt$$

Calculamos:
$\vec{f}(\vec{\alpha}(t)) = \big(-\frac{1}{2}t\cos(t), \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}(t)\big)$
$\vec{\alpha}'(t) = (\mathrm{sen}(t) + t\cos(t), \cos(t) - t\mathrm{sen}(t))$
$\vec{f}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) = -\frac{1}{2}t^2$
Entonces:

$$\int_{C_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}t^2 dt = \frac{4}{3}\pi^3$$

C_2^+ puede parametrizarse $(0,y)$ con $y \in [0,2\pi]$ con lo cual resulta $\int_{C_2^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$. Por lo tanto: $\oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} =$ área de $R = \boxed{\frac{4}{3}\pi^3}$

---

3. Sea $\vec{E}(x,y) = kq\big(x(x^2+y^2)^{-3/2}, y(x^2+y^2)^{-3/2}\big)$, con $k > 0$, el campo eléctrico en un punto $(x,y) \neq (0,0)$ creado por una carga eléctrica q colocada en el origen. Mostrar que la circulación de $\vec{E}$ sobre toda curva simple cerrada que no pase por $(0,0)$ es nula.

   Solución

   Ver que $\vec{E}$ es una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Sean $P(x,y) = kqx(x^2+y^2)^{-3/2}$ y $Q(x,y) = kqy(x^2+y^2)^{-3/2}$ las componentes de $\vec{E}$. Se comprueba fácilmente que resulta $Q'_x = P'_y$. Sea C una curva simple cerrada que no pasa por $(0,0)$ y sea R la región encerrada por C. Supongamos que $(0,0) \notin R$. Si aplicamos el teorema de Green para R y su borde C resulta:

$$\oint_{C^+} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_R (Q'_x - P'_y)dxdy = 0$$

   Supongamos ahora $(0,0) \in R$. El teorema de Green no es aplicable en este caso ya que $\vec{E}$ no está definido en $(0,0)$. Pero el teorema admite la siguiente generalización: sean C y C_1 dos curvas cerradas simples del plano con C_1 incluida en la región interior a C; sea D la región comprendida entre las curvas C y C_1 y sea $\vec{f}$ una función de clase C^1 en algún conjunto abierto que incluya a C, C_1 y D; entonces

$$\oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} - \oint_{C_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy$$

Supongamos que C_1 es una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r > 0$ arbitrario. Sea $\vec{\alpha}(t) = (r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$ una parametrización de C_1 recorrida en sentido antihorario. Se comprueba fácilmente que el producto escalar $\vec{E}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t)$ es nulo (si no se quiere hacer cuentas, ver que $\vec{E}$ tiene la dirección del radio de la circunferencia y $\vec{\alpha}'$ es tangente). Por lo tanto $\oint_{C_1^+} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$. El radio de la circunferencia C_1 es arbitrario de manera que siempre puede suponerse C_1 interior a la curva C como se muestra en la Figura 3.

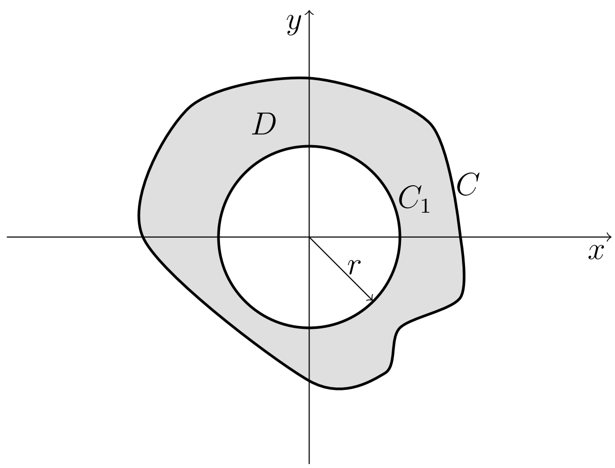

Figura 3

Podemos aplicar el teorema generalizado de Green al campo $\vec{E}$ resultando:

$$\oint_{C^+} \vec{E} \cdot d\vec{s} - \oint_{C_1^+} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy = 0$$

Por lo tanto: $\oint_{C^+} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_1^+} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$.

Hemos mostrado entonces que la circulación de $\vec{E}$ sobre cualquier curva simple cerrada C que no pase por $(0,0)$ es 0.

---

4. Sea el campo vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $\vec{f}(x,y,z) = (2yz, 4xz, 2xy)$. Sea la curva C, definida por la intersección de las superficies Σ_1 de ecuación $y^2 - z + 3 = 0$ y Σ_2 de ecuación $2x^2 + y^2 + z - 7 = 0$.

   a) Calcular mediante una integral de línea, la circulación de $\vec{f}$ sobre la curva C, tomando el sentido de recorrido de la curva de manera tal que un vector tangente a C en el punto $(\sqrt{2}, 0, 3)$ apunte en el sentido del semieje $+y$.

   b) Calcular la circulación pedida en el item a) mediante el teorema de Stokes.

Solución

La curva C es intersección de Σ_1, cilindro parabólico, con Σ_2, paraboloide elíptico, como muestra la Figura 4. Si entre las ecuaciones de Σ_1 y Σ_2 eliminamos z, obtenemos $x^2 + y^2 = 2$, ecuación de una superficie cilíndrica que también contiene a la curva C.

a) Las ecuaciones $x = \sqrt{2}\cos(t)$ e $y = \sqrt{2}\operatorname{sen}(t)$, con $t \in [0, 2\pi]$ satisfacen $x^2+y^2 = 2$. De la ecuación de Σ_1 resulta $z = 2\operatorname{sen}^2(t) + 3$. Definimos la función $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ con $\vec{r}(t) = \big(\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\ \operatorname{sen}(t), 2\ \operatorname{sen}^2(t) + 3\big)$ como una parametrización de C. El vector tangente a la curva es $\vec{r'}(t) = \big(-\sqrt{2}\operatorname{sen}(t), \sqrt{2}\cos(t), 2\operatorname{sen}^2(t) + 3\big)$. Se tiene $\vec{r}(0) = (\sqrt{2}, 0, 3)$ y $\vec{r'}(0) = (0, \sqrt{2}, 3)$. Es decir, el vector tangente en $(\sqrt{2}, 0, 3)$ apunta en el sentido de $+y$ como se pide.

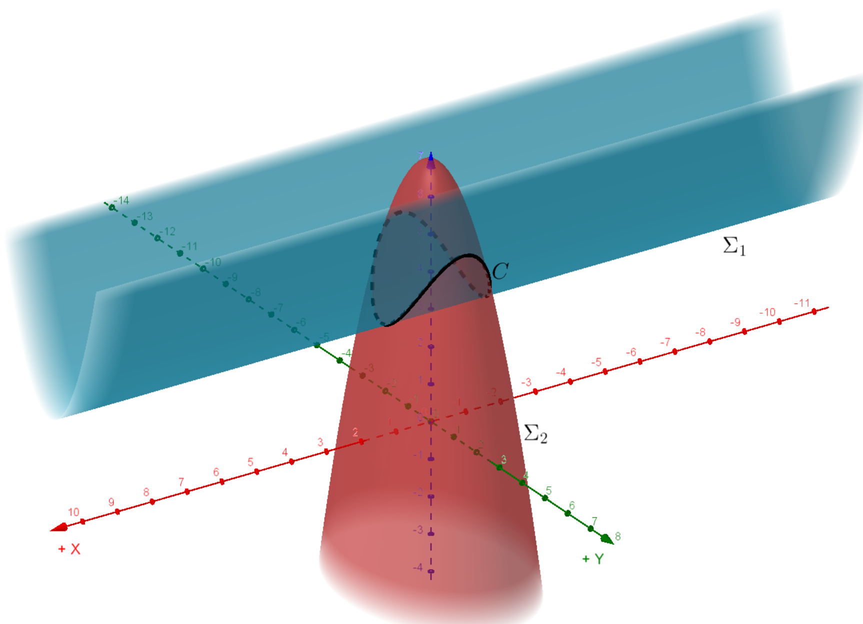

Figura 4: superficies Σ_1, Σ_2 y curva $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

Calculamos ahora:

$\vec{f}(\vec{r}(t)) = \big(4\sqrt{2}\operatorname{sen}^3(t) + 6\sqrt{2}\operatorname{sen}(t), 8\sqrt{2}\operatorname{sen}^2(t)\cos(t) + 12\sqrt{2}\cos(t), 4\operatorname{sen}(t)\cos(t)\big)$

$\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r'}(t) = -8\operatorname{sen}^4(t) - 12\ \operatorname{sen}^2(t) + 32\operatorname{sen}^2(t)\cos^2(t) + 24\cos^2(t)$

$= -40\operatorname{sen}^4(t) - 4\operatorname{sen}^2(t) + 24$

Entonces:

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r'}(t)dt = \int_0^{2\pi} \big(-40\ \operatorname{sen}^4(t) - 4\operatorname{sen}^2(t) + 24\big)dt = \boxed{14\pi}$$

b) Vamos a calcular ahora la misma circulación utilizando el teorema de Stokes. Este establece que si S es una superficie paramétrica simple orientable con borde $\partial S = C$ y $\vec{f}$ es un campo vectorial de clase C^1 en un dominio abierto que incluye a S y su borde C, entonces la integral de línea de $\vec{f}$ sobre C orientada positivamente, es igual al flujo del rotor de $\vec{f}$ a través de S, es decir:

$$\oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{f} \cdot d\vec{A}$$

Entonces, para evaluar la integral de línea de $\vec{f}$ sobre C debemos calcular el flujo del rotor de $\vec{f}$ a través de una superficie S cuyo borde sea la curva C. El campo $\vec{f}$ satisface las hipótesis del teorema ya que es una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$. Nuestro problema es hallar una superficie S tal que su borde sea C. La Figura 5 muestra que C puede ser borde de una porción de Σ_1 o también de una porción de Σ_2.

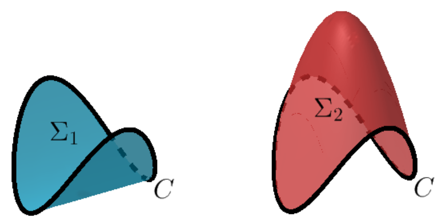

Figura 5

Sea S la superficie que se muestra en color azul en la Figura 5, es decir, $S \subset \Sigma_1$. La superficie S y su borde C se proyectan respectivamente en el disco S_{xy} y la circunferencia C_{xy} del plano xy como muestra la Figura 6. Pensemos S_{xy} como un disco D en $\mathbb{R}^2$. A cada (x, y) en D corresponde un punto (x, y, z) de S tal que $z = y^2 + 3$. Definimos $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ tal que $\Phi(x, y) = (x, y, y^2 + 3)$. Entonces Φ es una parametrización de S. Un vector normal a S según esta parametrización es $N = \Phi'_x \times \Phi'_y = (1, 0, 0) \times (0, 1, 2y) = (0, -2y, 1)$. El sentido de este vector normal es lo que llamamos orientación de la superficie S. Además, en las hipótesis del teorema de Stokes se exige que la curva tenga orientación *positiva*.

La orientación positiva de una curva en $\mathbb{R}^3$ puede definirse por la *regla del caminante*. Esto es, si imaginamos un caminante que recorre la curva C con la superficie S a su izquierda, la cabeza del caminante debe apuntar en el sentido del vector N, normal a S. Esto se ilustra en la Figura 6. Lo anterior significa que la orientación de S (dada por el vector N) induce una orientación en C (su sentido de recorrido). Y, viceversa, la orientación de C induce una orientación en S. Esta condición es esencial para poder aplicar el teorema de Stokes.

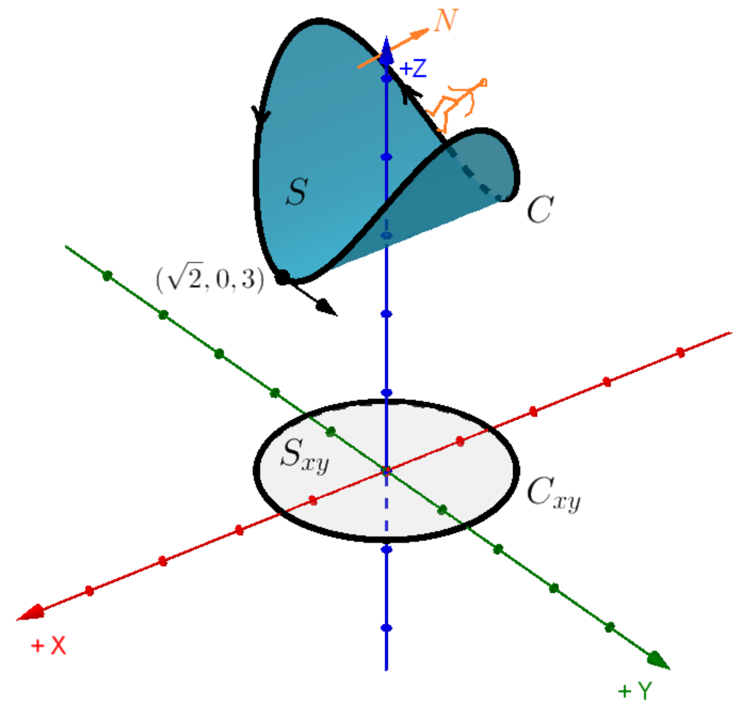

Figura 6: un "caminante" sobre el camino C

En el enunciado del problema se indica el sentido de recorrido de la curva mediante un vector tangente en el punto $(\sqrt{2}, 0, 3)$, el cual se representa en la Figura 6. Ver que el vector $N = (0, -2y, 1)$ calculado antes y el sentido de recorrido que se pide para C cumplen la regla del caminante. Entonces:

$$\oint_{C+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{f} \cdot d\vec{A} = \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{f})(\Phi(x, y)) \cdot N dxdy$$

El rotor de $\vec{f}$ es $\vec{\nabla} \times \vec{f} = (-2x, 0, 2z)$. La integral doble es

$$\iint_D (-2x, 0, 2y^2 + 6) \cdot (0, -2y, 1) dxdy = \iint_D (2y^2 + 6) dxdy$$

Para calcular la última integral es conveniente utilizar coordenadas polares r y θ con $y = r\text{sen}(\theta)$ resultando

$$\iint_D (2y^2 + 6) dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \big(2r^2 \text{sen}^2(\theta) + 6\big) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} (2\text{sen}^2(\theta) + 6) d\theta = \boxed{14\pi}$$

5. Sean $\vec{g}(x, y, z) = \left(e^x - e^{2x} + 2y + z, e^y + e^{2y} - 4x + z, e^z - e^{2z} - x\right)$ y la curva C parametrizada por $\vec{r}(t) = \big(2\cos(t), \operatorname{sen}(t), 3 - 2\cos(t) - \operatorname{sen}(t)\big)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Calcular la integral de línea de $\vec{g}$ sobre C.

   Solución

   De las ecuaciones paramétricas de la curva C, $x = 2\cos(t)$, $y = \operatorname{sen}(t)$, $z = 3 - 2\cos(t) - \operatorname{sen}(t)$ se deducen las ecuaciones cartesianas $x^2/4 + y^2 = 1$, $x + y + z = 3$. Entonces C puede pensarse como la intersección del cilindro de ecuación $x^2/4+y^2 = 1$ con el plano de ecuación $x+y+z = 3$. Es decir, C es una curva cerrada simple, borde de una superficie plana. Por otra parte, el campo $\vec{g}$ es una función de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ cuyo rotor es $\vec{\nabla} \times \vec{g} = (-1, 2, -6)$. Lo dicho hasta aquí sugiere utilizar el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea, es decir:

$$\oint_{C^+} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{g} \cdot d\vec{A}$$

   donde S es la porción del plano $x + y + z = 3$ encerrada por la curva C y tal que las orientaciones de S y C deben respetar la regla dada en el ejercicio 4. La orientación de la curva C ya está dada por su parametrización $\vec{r}$. La Figura 7 muestra la curva C y su sentido de recorrido junto con la superficie S y un vector N normal a S. El sentido de N corresponde al sentido de recorrido de C.

   La superficie S se proyecta sobre el plano xy sobre una región D que podemos pensar directamente en $\mathbb{R}^2$ como el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen $x^2/4 + y^2 \leq 1$. Una parametrización de S es $\Phi(x, y) = (x, y, 3 - x - y)$ con $(x, y) \in D$. El vector normal a S según esta parametrización es $N = \Phi'_x \times \Phi'_y = (1, 1, 1)$ cuyo sentido está de acuerdo con la orientación de la curva C. Entonces:

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{g} \cdot d\vec{A} = \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{g})\,(\Phi(x, y)) \cdot N dxdy = \iint_D (-1, 2, -6) \cdot (1, 1, 1) dxdy$$

   La última integral es $-5 \iint_D dxdy = -5 \times$ área de D. La región D está limitada por una elipse de semiejes $a = 2$ y $b = 1$. Por lo tanto el área de D es $\pi ab = 2\pi$. La integral pedida resulta:

$$\oint_{C^+} \vec{g} \cdot d\vec{s} = -5 \times 2\pi = \boxed{-10\pi}$$

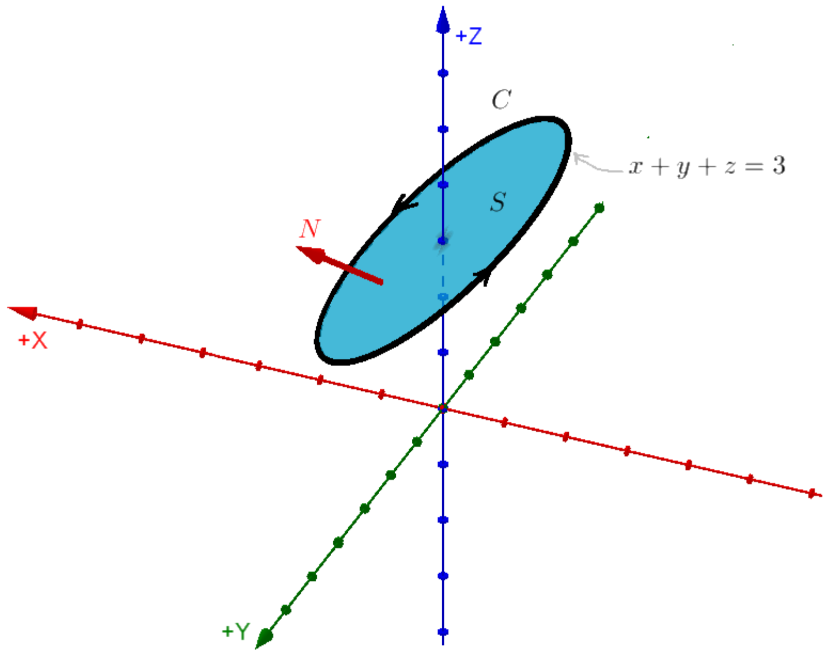

Figura 7

---

6. Sean $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, z \geq 3\}$ y el campo vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $\vec{f}(x, y, z) = (xz, yz, 1)$.

   a) Calcular el flujo saliente del campo $\vec{f}$ a través de la superficie frontera del sólido C mediante integrales de superficie.

   b) Calcular el flujo del item a) utilizando el teorema de Gauss.

   Solución

   El cuerpo C está limitado superiormente por un casquete esférico e inferiormente por una superficie plana. Sean S_1 y S_2 las superficies superior e inferior respectivamente que encierran el cuerpo C, como se muestra en la Figura 8.

   La intersección entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ y el plano $z = 3$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 16, z = 3$. Los puntos de S_1 satisfacen $x^2 + y^2 + z^2 = 25, z \geq 3$ y los puntos de S_2 satisfacen $z = 3, x^2 + y^2 \leq 16$.

   a) La frontera de C es $\partial C = S_1 \cup S_2$. Se debe calcular entonces:

$$\iint_{\partial C} \vec{f} \cdot d\vec{A} = \iint_{S_1} \vec{f} \cdot d\vec{A} + \iint_{S_2} \vec{f} \cdot d\vec{A}$$

   donde S_1 y S_2 deben estar orientadas con sus normales salientes de C.

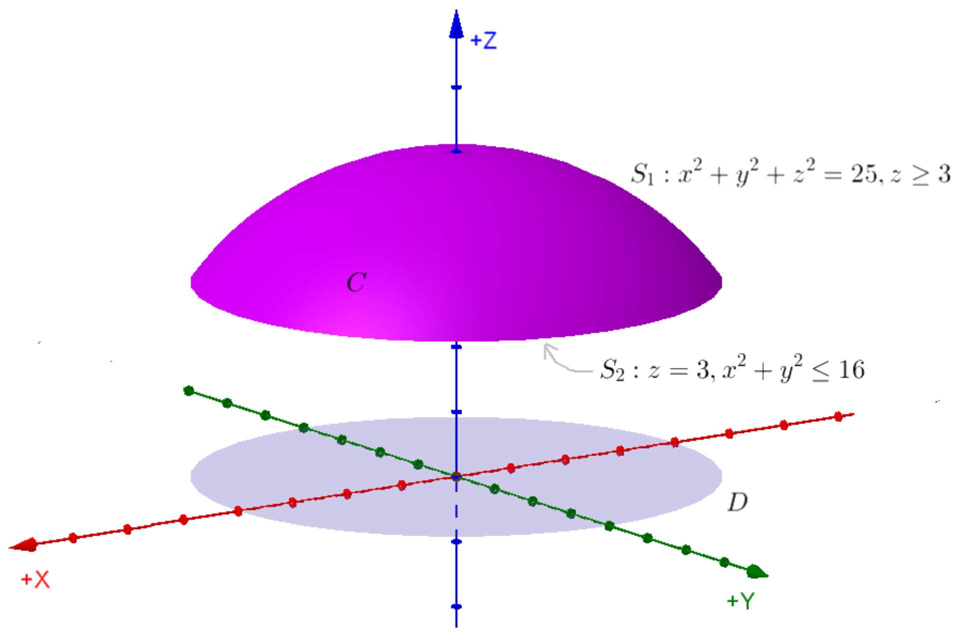

Figura 8

Las superficies S_1 y S_2 se proyectan cada una en el plano xy sobre el disco D de radio 4 y centro en el origen que se muestra en la Figura 8. Podemos usar coordenadas cilíndricas para parametrizar ambas superficies haciendo $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\operatorname{sen}(\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ y $r \in [0, 4]$. Sobre S_1 es $z = \sqrt{25 - r^2}$ y sobre S_2 es $z = 3$. Entonces $F(r, \theta) = \big(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta), \sqrt{25 - r^2}\big)$ y $G(r, \theta) = \big(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta), 3\big)$ son parametrizaciones de S_1 y S_2 respectivamente, ambas definidas para $(r, \theta) \in [0, 4] \times [0, 2\pi]$. Para la integral sobre S_1 calculamos primero el vector normal:

$N_1 = F'_r \times F'_\theta = \left(\frac{r^2\cos(\theta)}{\sqrt{25-r^2}}, \frac{r^2\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{25-r^2}}, r \right)$

que tiene su tercera componente r no negativa y por lo tanto apunta en el sentido saliente de C. Entonces

$\vec{f}(F(r, \theta)) = \big(r\sqrt{25 - r^2}\cos(\theta), r\sqrt{25 - r^2}\operatorname{sen}(\theta), 1\big)$

$\vec{f}(F(r, \theta)) \cdot N_1 = r^3 + r$

La integral sobre S_1 es

$$\iint_{S_1} \vec{f} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi}\int_0^4 \vec{f}(F(r, \theta)) \cdot N_1 dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^4 (r^3 + r) dr d\theta = 144\pi$$

Para la integral sobre S_2 calculamos $G'_r \times G'_\theta = (0, 0, r)$ que es entrante a C. Entonces tomamos como vector normal a S_2 al vector $N_2 = (0, 0, -r)$ y calculamos

$\vec{f}(G(r,\theta)) = \big(3r\cos(\theta), 3r\,\mathrm{sen}(\theta), 1\big)$

$\vec{f}(G(r,\theta)) \cdot N_2 = -r$

La integral sobre S_2 es:

$$\iint_{S_2} \vec{f} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi}\int_0^4 \vec{f}(G(r,\theta)) \cdot N_2 dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^4 (-r) dr d\theta = -16\pi$$

Finalmente:

$$\iint_{\partial C} \vec{f} \cdot d\vec{A} = 144\pi - 16\pi = \boxed{128\pi}$$

b) Vamos a calcular el flujo del item a) utilizando el teorema de Gauss. Este establece que si C es un sólido en $\mathbb{R}^3$ cuyo borde ∂C es una superficie regular o regular a trozos y $\vec{f}$ es un campo vectorial de clase C^1 en un dominio abierto que incluya a C y su borde, el flujo saliente de $\vec{f}$ a través de la superficie borde de C es igual a la integral triple de la divergencia de $\vec{f}$ sobre el cuerpo C. En símbolos

$$\iint_{\partial C} \vec{f} \cdot d\vec{A} = \iint_{\partial C} \vec{f} \cdot \hat{n}\, dA = \iiint_C \vec{\nabla} \cdot \vec{f}\, dV$$

donde $\hat{n}$ es un versor saliente de C.

La divergencia de $(xz, yz, 1)$ es: $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(x,y,z) = \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(yz)}{\partial y} + \frac{\partial(1)}{\partial z} = 2z$.

Usando las coordenadas cilíndricas r, θ, z, el cuerpo C queda descrito por $0 \leq r \leq 4$, $0 \leq \theta \leq 2\pi, 3 \leq z \leq \sqrt{25 - r^2}$. Entonces:

$$\iiint_C \vec{\nabla} \cdot \vec{f}\, dV = \iiint_C 2z\, dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_3^{\sqrt{25-r^2}} 2rz\, dzdrd\theta = \boxed{128\pi}$$

---

7. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = (3x - 2y, -2y + z, 5z - y)$ a través de la superficie S cuyos puntos cumplen $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1, y \geq 0$. Indicar en un gráfico la orientación elegida para S.

   Solución

   La superficie S es la mitad del elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$ correspondiente a $y \geq 0$. Aunque es posible calcular el flujo del campo $\vec{f}$ a través de S directamente con una integral de superficie, vamos a hacerlo aquí mostrando otra aplicación del teorema de Gauss. Lo primero a tener en cuenta es que el teorema de Gauss permite calcular el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada, frontera de un sólido. La superficie S de nuestro problema es una superficie abierta. Por lo tanto, vamos a definir otra superficie S_1 tal que $S \cup S_1$ formen una superficie cerrada que encierre un cuerpo que llamaremos C, como se muestra en la Figura 9.

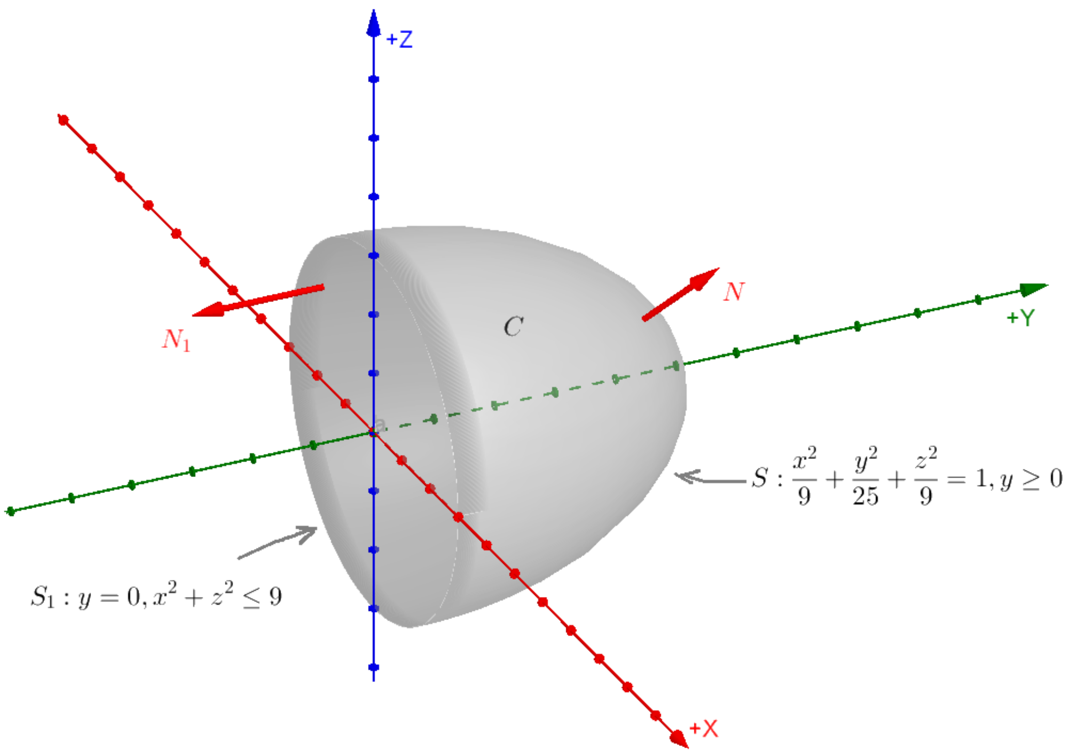

Figura 9

La superficie S_1 es un disco en el plano $y = 0$ con centro en el origen y radio 3. Para nuestro campo $\vec{f}$ de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ y el sólido C cuyo borde ∂C es regular a trozos por ser unión de las superficies regulares S y S_1, el teorema de Gauss establece:

$$\iint_{\partial C} \vec{f} \cdot d\vec{A} = \iint_S \vec{f} \cdot d\vec{A} + \iint_{S_1} \vec{f} \cdot d\vec{A} = \iiint_C \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \, dV$$

donde las superficies están orientadas por sus normales salientes del cuerpo C. Por lo tanto hay que calcular la integral triple del segundo miembro y restar de ella el flujo de $\vec{f}$ sobre S_1. Calculamos primero este último. La superficie S_1 puede parametrizarse con la función $F(x, z) = (x, 0, z)$ definida sobre un dominio D de puntos (x, z) que satisfacen $x^2 + z^2 \leq 9$. El vector normal a S_1 es $N_1 = F'_x \times F'_z = (0, -1, 0)$ cuyo sentido es saliente de C. Tenemos $\vec{f}(F(x, z)) = (3x, z, 5z)$ con lo cual $\vec{f}(F(x, z)) \cdot N_1 = -z$. Por lo tanto

$$\iint_{S_1} \vec{f} \cdot d\vec{A} = \iint_D (-z) dx dz$$

La última integral puede resolverse considerando coordenadas polares con $x = r\cos(\theta)$, $z = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y resulta igual a 0. Es decir: $\iint_{S_1} \vec{f} \cdot d\vec{A} = 0$.

Calculamos ahora la divergencia del campo $\vec{f}$ que resulta $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(x, y, z) = 6$. Entonces

$$\iiint_C \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \, dV = 6 \iiint_C dV = 6 \times \text{volumen de } C$$

El volumen encerrado por un elipsoide de semiejes a, b y c es $\frac{4}{3}\pi abc$. Por lo tanto la integral $\iiint_C \vec{\nabla} \cdot \vec{f}\, dV$ resulta $6 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 3 \times 5 \times 3 = 180\pi$. Finalmente

$$\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{A} = \iiint_C \vec{\nabla} \cdot \vec{f}\, dV - \iint_{S_1} \vec{f} \cdot d\vec{A} = \boxed{180\pi}$$

Notar que el flujo del campo sobre S se ha calculado con la superficie orientada por el vector N que se muestra en la Figura 9.

Fiuba 2020 - Jorge Comas