1. Introducción

Siendo la guía de trabajos prácticos un instrumento que delimita y orienta el recorrido por los contenidos esenciales puestos en uso en la resolución de problemas de diversos grados de complejidad, es fundamental que el alumno pueda utilizarla también como un instrumento de auto evaluación, enfrentándose a su complejidad desde el entramado conceptual propio del tema específico, las ecuaciones diferenciales en este caso.
El propósito del presente documento es proporcionar al alumno una sumaria descripción del contenido teórico al que remite de modo inmediato algunos ejercicios del estilo de la guía de trabajos prácticos, junto a alguna indicación que podría resultar de utilidad, a modo de sugerencia, para la resolución de los ejercicios.

2. Ejercicios

Ejercicio 01

Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias se pide determinar su orden, indicando cuáles son lineales y cuáles homogéneas, y demostrar además que las funciones propuestas son solución de la correspondiente ecuación diferencial.

(a) $y' = 3y, \; y = e^{3x}$
(b) $y' + 4y = 8x, \; y = 2x - e^{-4x} - ½$
(c) $y'' - \dfrac{2}{x^2}\, y = 0, \; y = x^2 - \dfrac{1}{x}$
(d) $y''' + y'' - y' - y = 1, \; y = -1 + 2\, e^{x}$
(e) $y'' - 2y' + 3y = e^{-2x}, \; y = -\dfrac{1}{3} e^{-3x} - e^{-x}$
(f) $x\, y' = 2y, \; y = x^2$
(g) $y\, y' - 4x = 0, \; y = 2x$

En este ejercicio inicial para introducir un lenguaje, la demanda cognitiva se reduce a la recuperación de las definiciones de orden (el máximo de los órdenes de derivación), de ecuación diferencial lineal (esto es que pueda escribirse como una combinación lineal de la función *y* incógnita y sus derivadas igualada a una función de la variable independiente *x*), de homogénea (si en el caso anterior la función de la variable independiente es nula), y de solución (función que satisface la ecuación en todo su dominio). De las anteriores consideraciones resultan

(a) $y' = 3y, \; y = e^{3x}$: Lineal de primer orden, homogénea
(b) $y' + 4y = 8x, \; y = 2x - e^{-4x} - ½$: Lineal de primer orden, no homogénea.
(c) $y'' - \dfrac{2}{x^2}\, y = 0, \; y = x^2 - \dfrac{1}{x}$: Lineal de segundo orden, homogénea
(d) $y''' + y'' - y' - y = 1, \; y = -1 + 2\, e^{x}$: Lineal de tercer orden, no homogénea
(e) $y'' - 2y' + 3y = e^{-2x}, \; y = -\dfrac{1}{3} e^{-3x} - e^{-x}$: Lineal de segundo orden, no homogénea
(f) $x\, y' = 2y, \; y = x^2$: Lineal de primer orden, homogénea
(g) $y\, y' - 4x = 0, \; y = 2x$: No lineal de primer orden

Sólo comentamos que al probar que la función dada es efectivamente una solución de la ecuación diferencial, debe tenerse algún cuidado respecto al dominio en el que se halla definida la solución; observar que todas las funciones propuestas se hallan definidas en el domino R, excepto la indicada en el punto (c).

Ejercicio 02

En los siguientes casos verifique que la solución propuesta es solución general de la ecuación diferencial y determine el valor de las constantes de manera que se satisfaga la condición dada. Graficar aproximadamente la solución obtenida.

(a) $y' - 3\, y = -3, \; y = 1 + c\, e^{3x}, \; y(0) = 2$
(b) $y'\, y = x, \; y^2 - x^2 = c, \; y(0) = 1$
(c) $y' = x\, y / (x^2 - 1), \; x^2 + cy^2 = 1, \; y(1) = 2$
(d) $y\, y' = x, \; y^2 - x^2 = c, \; y(0) = 1$
(e) $y'' - y' - 2y = 0, \; y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}, \; y(0) = 2, \; y'(0) = -3$
(f) $y'' + y = 0, \; y = c_1 \operatorname{sen}(x) + c_2 \cos(x), \; y(0) = -1, \; y'(0) = 1$
(g) $y'' + 2y' + 6y = 0, \; y = c_1 e^{-t} \operatorname{sen}(2t) + c_2 e^{-t} \cos(2t), \; y(0) = 0, \; y'(0) = 2$

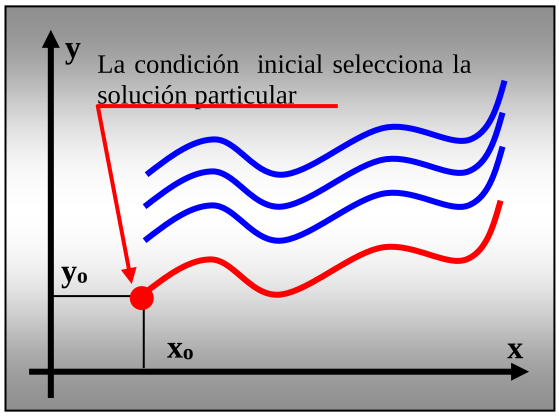
Este ejercicio exige tener presente el carácter demarcatorio que las condiciones iniciales tienen sobre la solución general para determinar (problema bien planteado) la única solución que satisface el problema; suele utilizarse la abreviatura (pvi) para designar este tipo de situación, y también se conoce con el nombre de problema de Cauchy. Las condiciones para la existencia y unicidad de la solución que satisface la condición inicial para ecuaciones diferenciales de primer orden son dadas por el teorema del teorema de existencia y unicidad, que establece que si en la ecuación diferencial

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ (pvi)

el campo escalar f a la vez que el campo escalar ∂f / ∂y es de clase C0 en un dominio D al que pertenece el punto (x0, y0), entonces existe una única solución del problema; puede ser vista la afirmación del teorema como una transferencia de propiedades locales (la condiciones iniciales) a una predicción al ámbito global. La unicidad debe entenderse en el sentido que si y es una solución en el intervalo (a, b) y w es una solución en el intervalo (c, d), entonces para todo $x \in (a, b) \cap (c, d)$ se verifica y(x) = w(x).

Observación 01: La continuidad del campo escalar *f* es suficiente para la existencia, mientras que la de $\partial f / \partial y$ es suficiente para la unicidad.

Desde la perspectiva geométrica, la condición inicial permite seleccionar de la familia de soluciones que satisface la ecuación diferencial aquella que además verifica la condición inicial, como se muestra en la figura 1.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 1

La solución general de la ecuación diferencial de orden n es el conjunto n-paramétrico de funciones (curvas solución en azul en la figura), mientras que se denomina solución particular a uno de sus miembros (curva solución en rojo en la figura). La afirmación del teorema se traduce en clave gráfica estableciendo que por cada punto (xo, y0) pasa una única curva solución.

Las nociones anteriores se vuelven operativas en nuestro ejercicio asegurando que las condiciones iniciales determinarán los únicos valores de los n parámetros de la solución general de orden n que se propone; justamente el ejercicio consiste en determinarlos, para así señalar la solución específica que se corresponde con tales condiciones, proceso que detallamos para uno de los puntos

(a) $y' - 3y = -3$, $y = 1 + c\,e^{3x}$, $y(0) = 2$

Verificamos que la función y: R → R tal que y(x) = 1 + c e3x es, para cualquier c∈R, solución de la ecuación diferencial. En efecto, y'(x) = 3c ex, y reemplazando en la ecuación diferencial es:

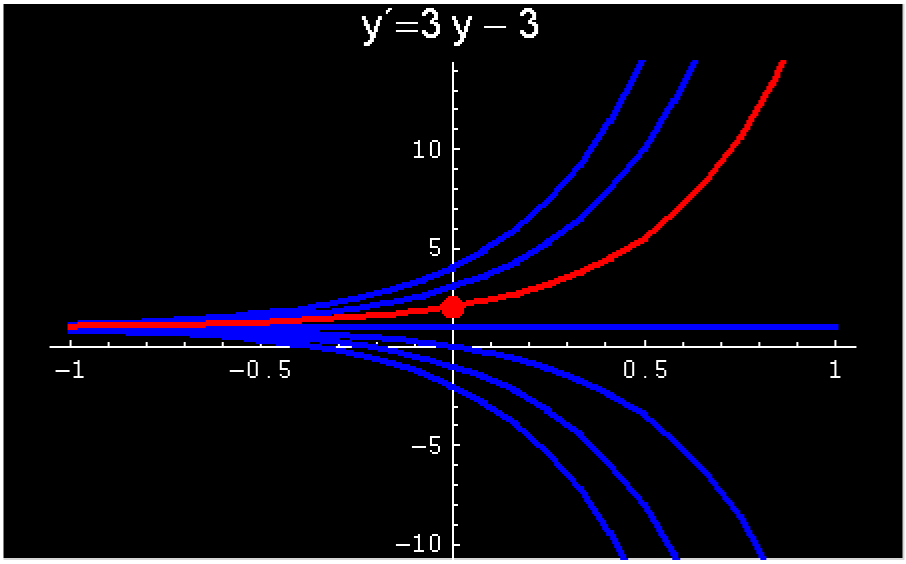
$y'(x) - 3\,y(x) = 3c\,e^x - 3\,(1 + c\,e^x) = 3c\,e^x - 3 - 3\,c\,e^x = -3$

Ahora, siendo y(0) = 2, debe ser $1 + c\,e^0 = 2$, de donde c = 1, resultando entonces la única solución que satisface el (pvi) planteado:

y: R → R tal que $y(x) = 1 + e^{3x}$

Observación 02: La existencia y unicidad estaba aquí asegurada para cualquier condición inicial del tipo $y(x_0) = y_0$, pues tanto $f(x, y) = 3y - 3$, como $\partial f(x, y)/\partial y = 3$ son continuas en R^2.

La figura 2 muestra la familia de soluciones y la solución que satisface el (pvi) en el intervalo (–1, 1).



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 2

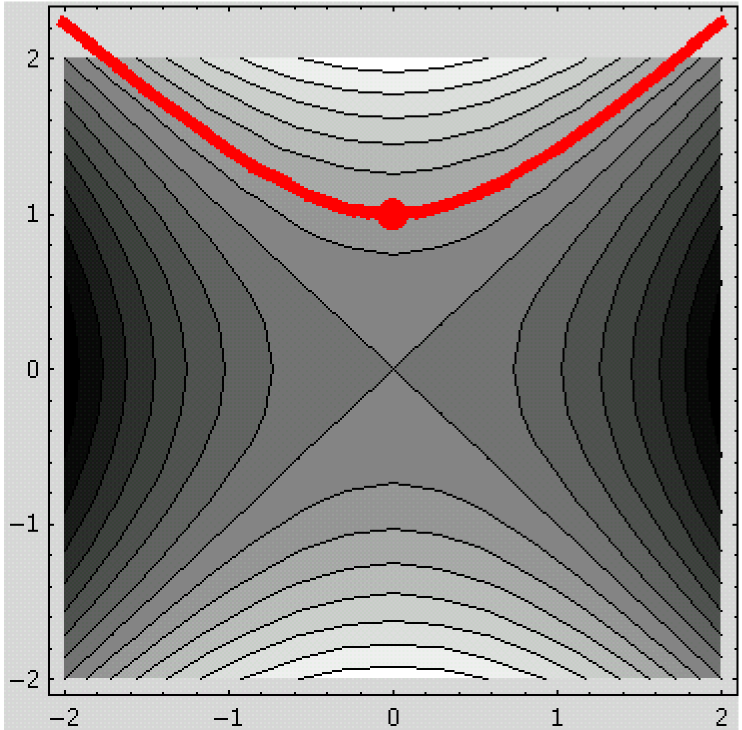
Observación 03: La figura anterior se ha obtenido mediante la aplicación Mathematica®, mediante el segmento de código siguiente:

```
(*ejercicio 2 (a) del TP VI de edos en fiuba*)
solgen[ed_,x0_,y0_,a_,b_]:=(
titulo = "y´=3 y - 3"; sg=DSolve[ed,y[x],x];
y[x_]=y[x]/.sg[[1]]; Print["solución general: ",y[x]];
      flia=Table[y[x]/.C[1]->i,{i,-3,3}];
w1=Plot[Evaluate[flia,{x,a,b},PlotStyle->
      {{RGBColor[0,0,1],Thickness[0.008]},
{RGBColor[0,0,1],Thickness[0.008]}},
      Background->RGBColor[0,0,0]],
      PlotLabel->FontForm[titulo,{"Helvetica",13}],
DisplayFunction->Identity];
Clear[y]; sp=DSolve[ {ed, y[x0] == y0}, y[x], x ];
y[x_]=y[x]/.sp[[1]]; t ={PointSize[0.03],RGBColor[1,0,0],
                  Point[{x0,y0}]};
w2=Plot[y[x],{x,a,b},PlotStyle->
      {RGBColor[1,0,0],Thickness[0.009]},
      Background->RGBColor[0,0,0],PlotRange->All,
      DisplayFunction->Identity];
Show[w1,w2,Epilog->t,DisplayFunction->$DisplayFunction];
);
Clear[y];solgen[y'[x]==3*y[x]-3,0,2,-1,1];
```

Una vez guardado el código, la línea resaltada permite aplicarlo a diferentes problemas de valor inicial de primer orden, actualizando los argumentos de `solgen` siendo el primero la ecuación diferencial, el segundo la abscisa x_9, el tercero la ordenada y_0, el cuarto y quinto los extremos del intervalo (a, b) en el que se grafican las soluciones.

(b) $y'\, y = x$, $y^2 - x^2 = c$, $y(0) = 1$

En este punto sugerimos prestar especial atención al hecho de que la familia de curvas que se propone no constituye en verdad una familia de *funciones* solución, aunque sí constituye una familia de *curvas integrales* de la ecuación diferencial, pues es claro que se trata del conjunto de nivel c del campo escalar u: $R^2 \to R$ tal que $u(x, y) = y^2 - x^2$, y que toda curva solución debe estar incluida en la correspondiente curva integral.
Una vez obtenida la (única) solución del problema de valor inicial y: $R \to R$ tal que $y(x) = (1+ x^2)^{½}$, puede observarse la diferencia: la gráfica de la solución yace en el conjunto de nivel 1 del campo escalar u, esto es en el conjunto de puntos del plano dado por $\{(x, y)\in R^2\text{: } y^2 - x^2 = 1\}$, pero ciertamente no son coincidentes, ya que la primera es sólo una de las ramas de la hipérbola, tal como lo indica la figura 3.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 3

b. 1. y’ y = x, y(0) = 0
b. 2. y’ y = x, y(1) = 0
b. 3. y’ y = x, y(–1) = 0

Sugerimos también, si se quiere profundizar la comprensión, efectuar el análisis que permita responder las siguientes cuestiones, ya menos operativas que conceptuales.

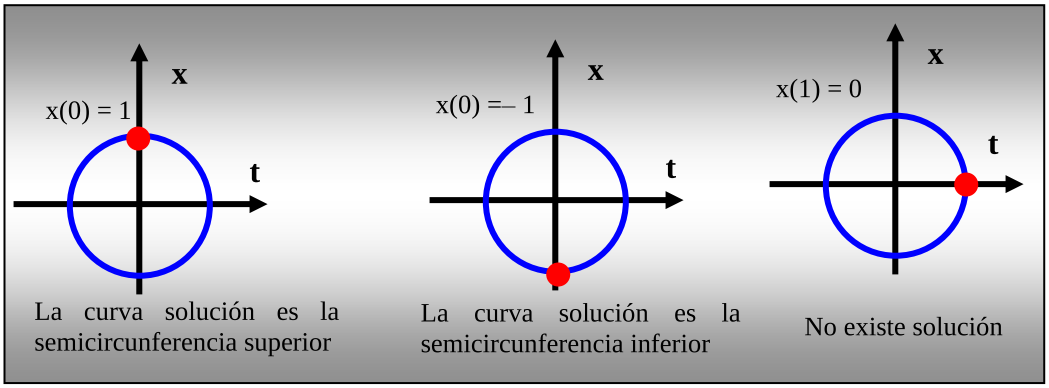
b. 4. ¿Para qué puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ el pvi y’ y = x, $y(x_0) = y_0$, no tiene solución?
b. 5. ¿Para qué puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ el pvi y’ y = x, $y(x_0) = y_0$, tiene más de una solución?
b. 6. ¿Para qué puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ el pvi y’ y = x, $y(x_0) = y_0$, tiene única solución?
b.7. Entre los obtenidos anteriormente, determinar el intervalo I en el que está definida tal solución, esto es la única función y: I → R tal que para todo punto $x \in I$ verifica que y’(x) y(x) = x, con $y(x_0) = y_0$, y dar la expresión explícita de tal función.

A modo de ejemplo, una parte del análisis necesario para responder la última cuestión consiste en probar que para todo punto $P_0 = (x_0, y_0)$ tal que $0 < y_0 < x_0$, la única solución es la función:

$$y : [a, \infty) \to R \text{ tal que } y(x) = \sqrt{x^2 - (x_0^2 - y_0^2)}, \text{siendo } a = \sqrt{x_0^2 - y_0^2}$$

Finalmente, consideramos resultará también conveniente abundar las cuestiones próximas a este ejercicio siguiendo en detalle el siguiente ejemplo.

Sea el problema de hallar una solución de la ecuación diferencial $t + x\, dx/dt = 0$ que satisfaga la condición inicial $x(t_0) = x_0$. Puede observarse que la función x es solución de la ecuación diferencial si y sólo si $d(t^2 + x^2) = 0$, esto es $t^2 + x^2$ es constante sobre la curva, debiendo resultar entonces $t^2 + x^2 = t_0^2 + x_0^{\,2}$ que es la ecuación de una circunferencia y sin embargo, no es una curva solución.
En efecto, si la condición inicial es $x(0) = 1$, entonces la única solución es la función $x: (-1,1) \to R$ tal que $x(t) = \sqrt{1-t^2}$, mientras que si es $x(0) = -1$, entonces la única solución es la función $x: (-1,1) \to R$ tal que $x(t) = -\sqrt{1-t^2}$, y si es $x(1) = 0$, entonces no existe solución alguna. Las tres situaciones se ilustran en la figura 4.

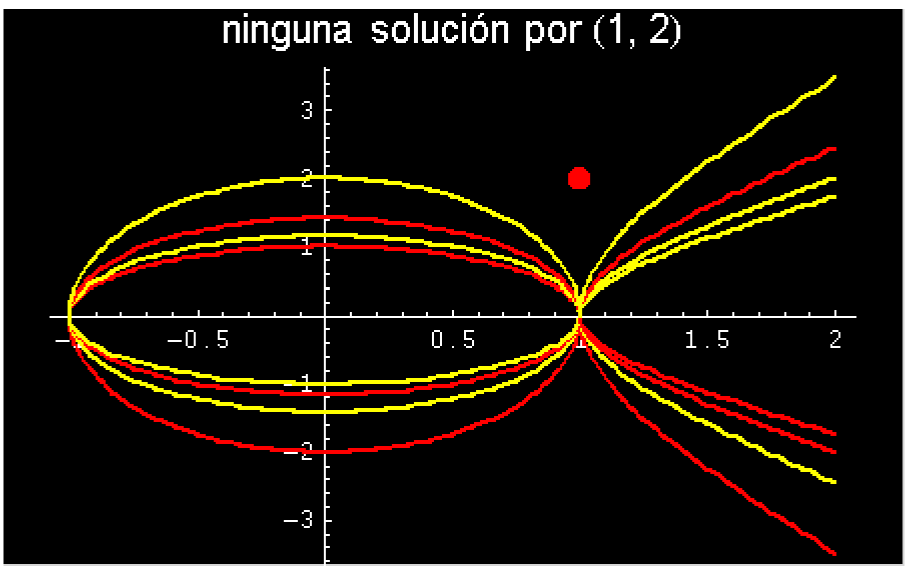


Análisis Matemático II, TP VI, Figura 4

El campo escalar de dos variables $u: R^2 \to R$ tal que $u(t, x) = t^2 + x^2$, es constante sobre toda solución de la ecuación diferencial dada por $t + x\ dx/dt = 0$; las curvas de nivel del campo u suelen denominarse *curvas integrales* de la ecuación diferencial, y el presente ejemplo ilustra que toda curva solución yace sobre una curva integral. Conviene mencionar que si bien algunos autores prefieren utilizar como sinónimos los términos *curva integral* y *curva solución*, aquí se hará la distinción que entre ambas evidencia este ejemplo.

(c) $y' = x\, y / (x^2 – 1)$, $x^2 + cy^2 = 1$, $y(1) = 2$

Puede comprobarse que si bien la familia de curvas dadas son efectivamente curvas integrales, no existe solución alguna que pase por el punto (1, 2); en este caso las curvas integrales comprenden una familia de elipses, una familia de hipérbolas y un par de rectas verticales. En la figura 5 se indican algunas curvas integrales.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 5

Proponemos analizar, de modo adicional, lo que sucede con los siguientes problemas de valor inicial; ubicar las condiciones iniciales en la figura anterior para anticipar lo que habrá de suceder en las manipulaciones algebraicas.

c. 1. $y' = x\, y / (x^2 – 1)$, $y(1) = k$, $k \in R$
c. 2. $y' = x\, y / (x^2 – 1)$, $y(–1) = k$, $k \in R$
c. 3. $y' = x\, y / (x^2 – 1)$, $y(0) = 1$

Sugerimos también, si se quiere profundizar la comprensión, efectuar el análisis que permita responder las siguientes cuestiones, ya menos operativas que conceptuales.

c. 4. ¿Para qué puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ el pvi $y'\, y = x$, $y(x_0) = y_0$, no tiene solución?
c. 5. ¿Para qué puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ el pvi $y'\, y = x$, $y(x_0) = y_0$, tiene más de una solución?

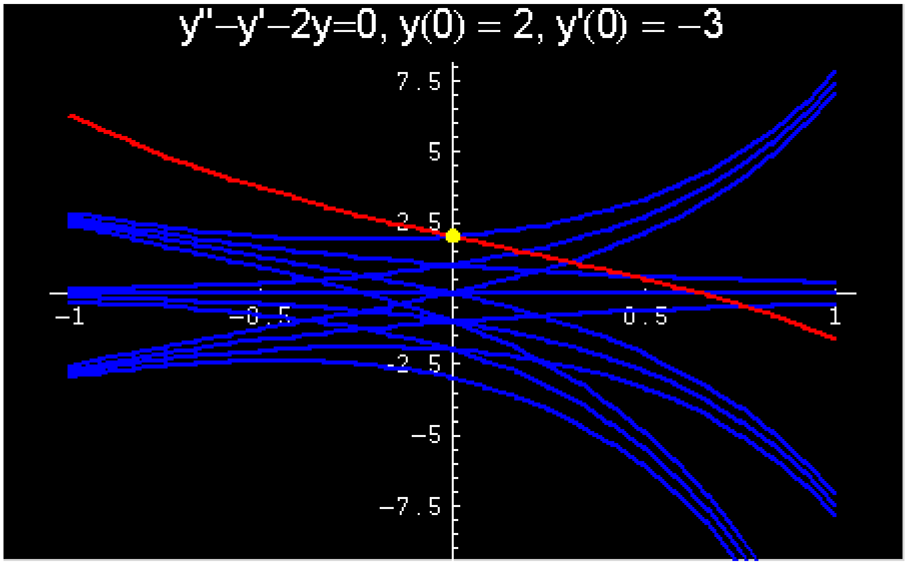
c. 6. ¿Para qué puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ el pvi $y'\,y = x$, $y(x_0) = y_0$, tiene única solución?
c.7. Entre los obtenidos anteriormente, determinar el intervalo I en el que está definida tal solución, esto es la única función $y: I \to R$ tal que para todo punto $x \in I$ verifica que $y'(x)\,y(x) = x$, con $y(x_0) = y_0$, y dar la expresión explícita de tal función.

(d) $y\,y' = x$, $y^2 - x^2 = c$, $y(0) = 1$ (es el mismo b, en realidad)

(e) $y'' - y' - 2y = 0$, $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$

Imponiendo las condiciones iniciales resulta que la única solución del pvi resulta la función, que señalamos en la figura 6 junto a algunos miembros de la familia de la solución general.

$$y : R \to R \text{ tal que } y(x) = -\frac{1}{3}e^{2x} + \frac{7}{3}e - x$$



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 6

Observación 04: La figura anterior se ha obtenido mediante la aplicación Mathematica®, mediante el segmento de código siguiente:

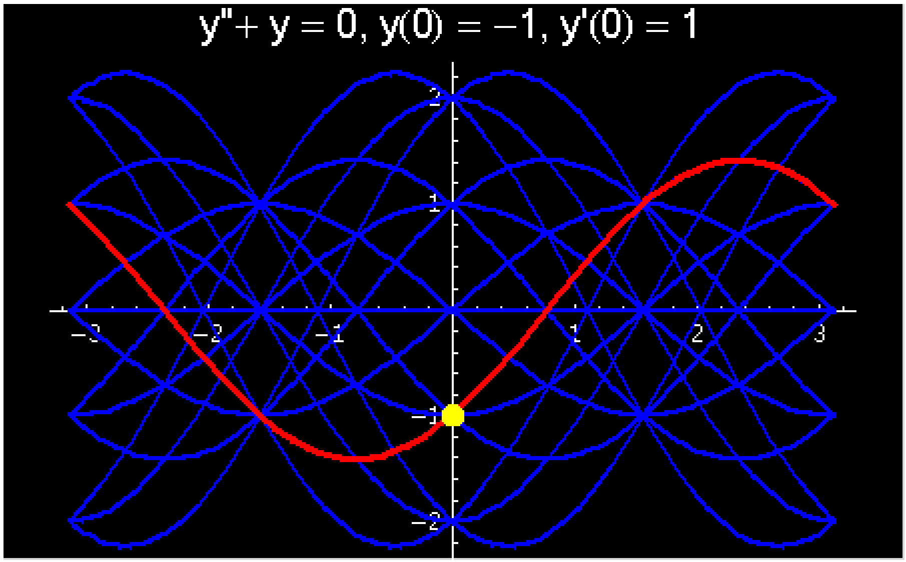
```
(*ejercicio 2 e fiuba edos guia VI *)
(*solución general de la edo orden 2
x'' + px' + qx = g*)
solgen2[p_,q_,g_,x0_,v0_]:=(Clear[x,t];
sg=DSolve[{x''[t]+p*x'[t]+q*x[t]==g},x[t],t];
x[t_]=Expand[Simplify[x[t]/.sg[[1]]]];
Print["solución general: ",x[t]];
flia=Table[x[t]/.{C[1]->i,C[2]->j},{i,-1,1},
{j,-2,1}];
w1=Plot[Evaluate[flia,{t,-1,1},PlotStyle->
{{RGBColor[0,0,1],Thickness[0.007]},
{RGBColor[0,0,1],Thickness[0.007]}},
Background->RGBColor[0,0,0]],
DisplayFunction->Identity];
Clear[x,t];
sp=DSolve[{x''[t]+p*x'[t]+q*x[t]==g,
x[0]==x0,x'[0]==v0},x[t],t];
x[t_]=Expand[Simplify[x[t]/.sp[[1]]]];
w2=Plot[x[t],{t,-1,1},
PlotStyle->{{RGBColor[1,0,0],Thickness[0.007]}},
Background->RGBColor[0,0,0],
DisplayFunction->Identity];
punto ={PointSize[0.02],RGBColor[1,1,0],
                  Point[{0,2}]};
Show[w1,w2,Epilog->punto,DisplayFunction->$DisplayFunction,
PlotLabel->FontForm["y''-y'-2y=0, y(0) = 2, y'(0) = -3",{"Helvetica",13}]];
);

Clear[x,t];solgen2[-1,-2,0,2,-3];
```

Una vez guardado el código, la línea resaltada permite aplicarlo a diferentes problemas de valor inicial del tipo `y'' + py' + qy = g`, $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0$, actualizando los argumentos de la función `solgen2` siendo los tres primeros las constantes p, q y la función g, el cuarto y_0 y el quinto v_0.

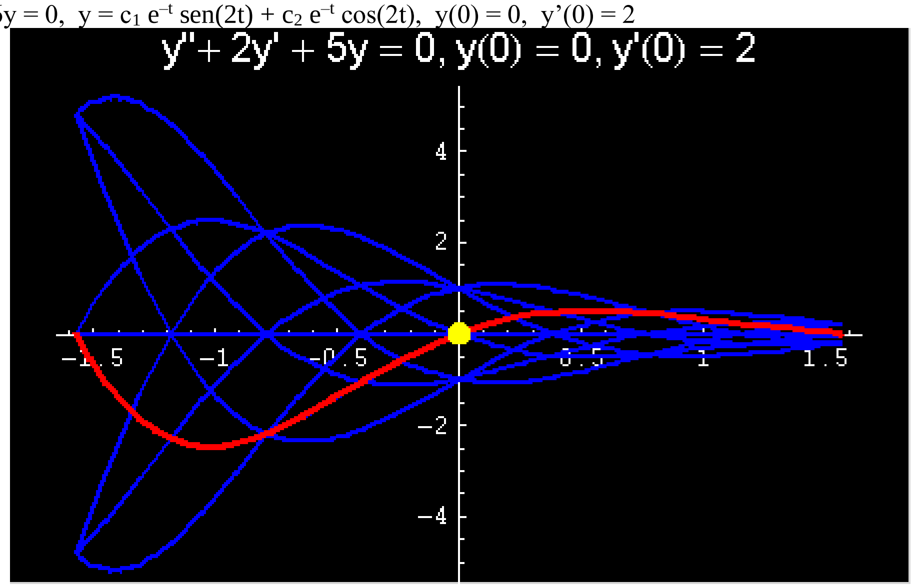
(f) $y'' + y = 0$, $y = c_1 \operatorname{sen}(x) + c_2 \cos(x)$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$

Resulta la función $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y(x) = \operatorname{sen}(x) - \cos(x)$, distinguida en la figura 7.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 7

(g) $y'' + 2y' + 6y = 0$, $y = c_1 e^{-t} \operatorname{sen}(2t) + c_2 e^{-t} \cos(2t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 8

Resulta la función $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y(t) = 2\, e^{-t} \operatorname{sen}(2t)$, distinguida en la figura 8.

Ejercicio 03

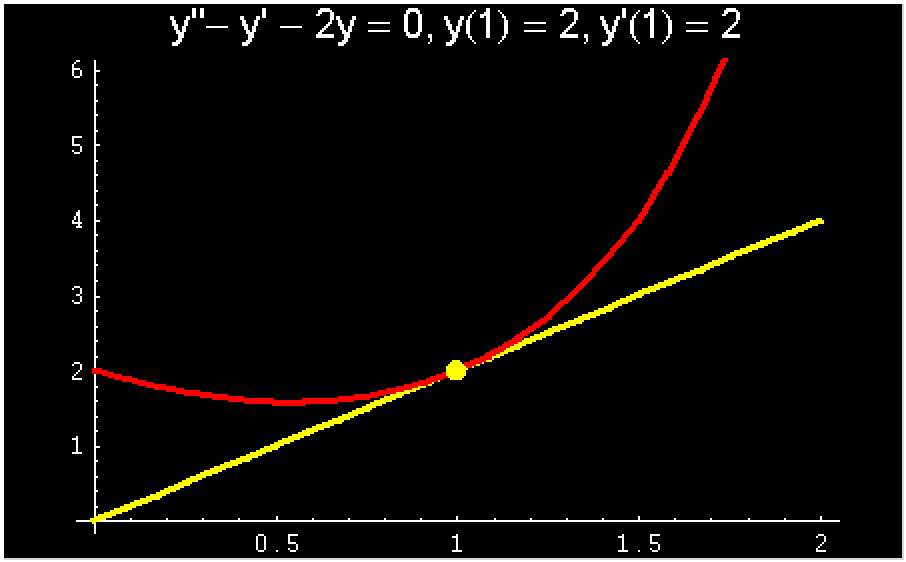
(a) Hallar la solución de la ecuación 2. d cuyo gráfico pasa por el punto (1,3).
(b) Hallar la solución de la ecuación 2. b cuyo gráfico pasa por el punto (1,2).
(c) Hallar la solución de la ecuación 2. e cuyo gráfico tiene recta tangente de ecuación $y = 2x$ en el punto (1, 2).

El ejercicio insiste en la calidad demarcatoria de las condiciones iniciales, las que en todos los casos se proponen de manera que se asegure la existencia y unicidad de la solución; en lo que respeta al aspecto procedimental, nada debe añadirse a lo dicho con ocasión del ejercicio anterior, de modo que nos limitamos a consignar en cada caso la solución pedida.

(a) Para el pvi $y\, y' = x$, $y(1) = 3$, es $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y(x) = (8 + x^2)^{½}$

(b) Para el pvi y y' = x, y(1) = 2, es y: R → R tal que $y(x) = (3 + x^2)^{½}$

(c) Para el pvi y'' – y' – 2y = 0, y(1) = 2, y'(1) = 2, resulta que la solución es la función y: R → R tal que $y(x) = \frac{4}{3} e^{2x-2} + \frac{2}{3} e^{-x+1}$ y se la observa, junto con su predeterminada recta tangente (que de hecho aquí impone las condiciones iniciales), en la figura 9.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 9

Ejercicio 04

Proponga una ecuación diferencial del orden indicado, de manera que la familia de curvas dada corresponda a su solución general.

(a) x y = c, primer orden
(b) $4x^2 – 2 y^3 = c$, primer orden
(c) $y = c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x)$, segundo orden
(d) y = a + ln(b/x), primer orden
(e) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, segundo orden
(f) Parábolas con eje x y vértice en el origen de coordenadas, primer orden
(g) Parábolas con eje x y vértice sobre la recta y = x, segundo orden
(h) Rectas que pasan por (2, 2), primer orden

Si en los ejercicios anteriores se explotaba la asociación mediante la cual a una dada ecuación diferencial de orden n le corresponde una familia n-paramétrica de funciones, aquí se trata de observar el mismo hecho, pero desde el otro lado, esto es que una dada familia de funciones n-paramétricas pueda pensarse como las curvas integrales de una ecuación diferencial de orden n. Naturalmente, vuelve a estar involucrado el teorema de existencia y unicidad, que implica restricciones a la dada familia y a la independencia de los parámetros para que efectivamente tal correspondencia se verifique.
Desde el punto de vista del procedimiento todo resulta muy sencillo: la ecuación de la familia n-paramétrica de curvas con sus n sucesivas derivadas constituyen un sistema de n +1 ecuaciones que define implícitamente la ecuación diferencial buscada, cuya expresión se obtiene mediante la eliminación de los n parámetros (a menudo los parámetros tienen la gentileza de auto eliminarse, como en los casos a, b, d). Mostramos los resultados y detallamos el proceso en algunos casos.

Así por ejemplo, para el caso (a) el proceso detallado muestra el sistema:

$$\begin{cases} xy = c \\ y + x\,y' = 0 \end{cases}$$

Del que resulta (el parámetro c se auto eliminó) la ecuación diferencial y + x y' = 0. En el caso (b), de la misma manera resulta la ecuación diferencial $4x – 3y^2\, y' = 0$. Para (c) nos queda el sistema:

$$\begin{cases} y = c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x) \\ y' = -c_1 \operatorname{sen}(x) + c_2 \cos(x) \\ y'' = -c_1 \cos(x) - c_2 \operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

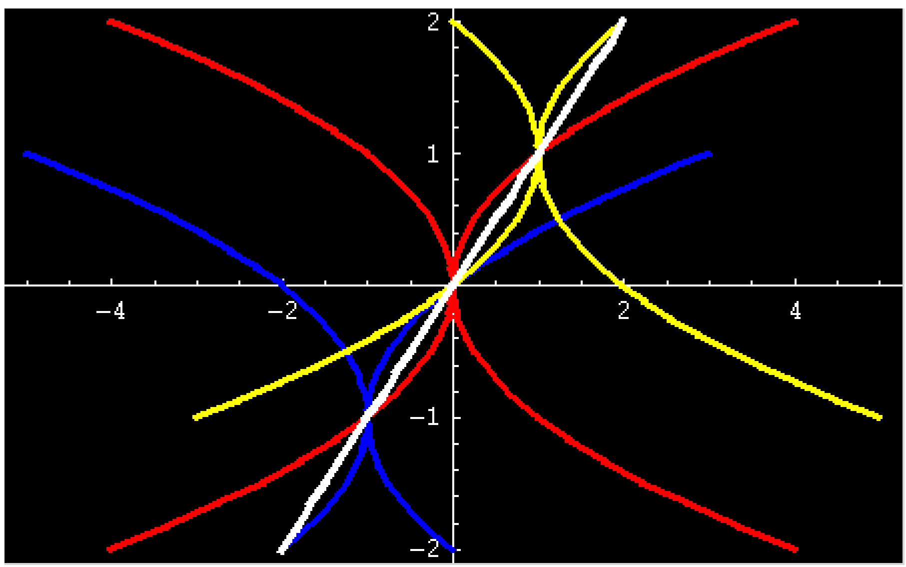
Eliminando c_1 y c_2 resulta la ecuación diferencial y'' + y = 0. En el caso (d) resulta x y' = –1. Para (e) es y'' – y = 0. Dado que en (f) la familia es $x = cy^2$, se tiene el sistema $\begin{cases} x = c\,y^2 \\ 1 = 2cyy' \end{cases}$ resultando la ecuación diferencial 2xy' = y

Observación 05: Resultaría más natural considerar aquí una ecuación diferencial cuya incógnita fuese la función x = x (y), dada las características de la familia dada; de proceder de tal modo la ecuación es 2x = x'y, donde con x' designamos la derivada de la función x respecto de y.

En (g) la familia con vértice (a, a), con eje x está dada por $x = a + c\,(y–a)^2$, y en virtud de la observación anterior, se tiene el sistema

$$\begin{cases} x = a + c(y-a)^2 \\ x' = 2c(y-a) \\ x'' = 2c \end{cases}$$ resultando la ecuación diferencial 2x'' (y–x) = x' (2–x')

Mostramos en la figura 10 algunos miembros de la familia dada.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 10

En (h), siendo la familia y = m (x –2) + 2, es inmediato que y = y' (x-2) + 2.

Ejercicio 05

Resolver los siguientes problemas.

(a) Hallar la solución general de x dy = y dx.
(b) Hallar la solución del problema de valores iniciales x y' = x y – x, y (0) = 2.
(c) Hallar la solución general de $x\,(dy/dx) – y^2 = x\,y^2$.
(d) Hallar la solución del problema de valores iniciales $y' + 2\,x^2 y = x^2$, y (0) = 0.
(e) Hallar la solución del problema de valores iniciales y' + y = 1, y (0) = 5/2.
(f) Hallar la solución general de y' + 3 y = 2.
(g) Hallar la solución general de $y\,y' = x\,\mathrm{sen}(x^2)$.
(h) Hallar la solución general de y' + y sen(x) = sen(2x).
(i) Hallar la solución del problema de valores iniciales $x\,y' + y = x^2$, y (3) = 0.
(j) Hallar la solución del problema de valores iniciales $x\,y' = y^2 + x\,y$, y (1) = 1.
(k) Hallar la solución del pvi x y' = y + x exp(y/x), y(1) = 0.

En este ejercicio se presentan las ecuaciones diferenciales ordinarias para las que puede obtenerse la solución de un modo cerrado; conviene decir que ese no es el caso de muchas ecuaciones diferenciales para las que se requieren métodos numéricos o recursivos para aproximan la solución. Baste como ejemplo la aparentemente sencilla ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2$, cuya solución no es una función elemental.

Naturalmente, ninguna de ellas figura en el listado propuesto, sino que se trata de muy escogidas ecuaciones diferenciales para las que se disponen de algoritmos finitos que permiten recuperar la solución general y, en los problemas de valor inicial, obtener la función que las condiciones iniciales seleccionan. Los tipos de ecuaciones diferenciales representados en este ejercicio son los de *variables separables* (representadas en los ítems a, b, c, d, e, f, g), *lineales de primer orden* (representadas en los ítems h, i), y ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden (representada en los ítems j, k).

Aquí haremos entonces una breve descripción del referente teórico que subyace en el procedimiento de obtención de la solución, introduciéndolo al mismo tiempo que lo reclame el apartado particular.

Necesitaremos recordar lo esencial de la teoría de las ecuaciones de variables separables, a las que pertenecen ciertamente los ítems a, b, c, d, e, f, g. Lo hacemos en los siguientes términos:

Una ecuación diferencial que puede ser escrita en los términos de [1], con u y v dos funciones continuas en algún intervalo se llama de *variables separables*, término (*separatio indeterminatarum*) introducido hacia fines del siglo XVII por los hermanos Jacob Bernoulli y Johan Bernoulli, conjuntamente con el de *integrar* una ecuación diferencial.

[1] $dy / dx = u(y)\, v(x)$: la ecuación de variables separables

Para tal ecuación diferencial existen por hipótesis (la continuidad de las funciones u y v) dos funciones f y g tales que f' = 1/u (aquí suponiendo que u no es la función nula), g' = v, es decir funciones primitivas de 1/u y v respectivamente, que puede escribirse $f(y) = \int \frac{dy}{u(y)}$, $g(x) = \int v(x)\,dx$ y en tal caso es inmediato ver que las curvas de nivel del campo $H(x, y) = g(x) - f(y)$ contienen las soluciones puesto que es $d[H(x, y)] / dx = g'(x) - f'(y)\, dy/dx = v(x) - v(x)\, u(y) / u(y) = 0$; por otra parte si para algún $y = \alpha$ es $u(y) = 0$, entonces la función $u: R \to R$ tal que $y(x) = \alpha$ es una solución de la ecuación diferencial.

Un modo equivalente de expresar lo anterior resulta de advertir que todo sucede como si en la notación diferencial, dy/ dx fuese un cociente de diferenciales (no otra cosa es para Euler en su Institutiones Calculi Integralis) y así queda, con las consideraciones acerca de la no nulidad de u que:

una solución de $dy / dx = u(y)\, v(x)$ satisface $\int \frac{dy}{u(y)} = \int v(x)\,dx$

Por último, si las soluciones de $dy / dx = u(y)\, v(x)$ satisfacen $g(x) - f(y) = c$, localmente el teorema de la función inversa (aplicable en los intervalos en los que f(y) es monótona y se corresponde a aquéllos en que $f'(y) = 1/u(y)$ tiene signo constante: ver prueba del teorema) asegura que las soluciones serán de la forma $y(x) = f^{-1}[c-g(x)]$.

Lo anterior nos es suficiente para obtener las soluciones de las ecuaciones de variables separables propuestas en este ejercicio, dado que el procedimiento no reviste dificultad alguna, aunque sí es necesario tener presente que detrás de ellos están resultados muy delicados en cuanto a sus hipótesis, como ciertamente lo es el teorema de la función inversa. Mostramos algunas de estas precauciones al resolver problemas por demás sencillos.

(a) Hallar la solución general de $x\,dy = y\,dx$.

Si admitimos que en un dado intervalo la función y no se anula, resulta que para todo x no nulo de tal intervalo I puede escribirse la ecuación diferencial como

$dy/y = dx/x$, de donde

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

resultando $\ln|y| = \ln|x| + k$, con $k \in R$, o lo que es lo mismo $y = m\,x$, siendo $m = \pm e^k$ una cualquiera (no nula) constante; como por otra parte se tiene que si es $y = 0$ la ecuación diferencial original se satisface también, podemos entonces quitar la restricción de no nulidad de m y así resulta que la solución general es la familia da funciones dada por

$y: R \to R$ tal que $y(x) = mx$, $\forall m \in R$

Observación 06: En la familia de rectas anterior, ciertamente no se halla incluida la recta vertical de ecuación $x = 0$, pero es claro que esto sólo proviene de haber privilegiado la variable y como dependiente de x; es inmediato ver que la ecuación $x = 0$, satisface la ecuación diferencial, de modo que el haz de rectas completo satisface la ecuación diferencial.

(b) Hallar la solución del problema de valores iniciales x y' = x y – x, y (0) = 2.

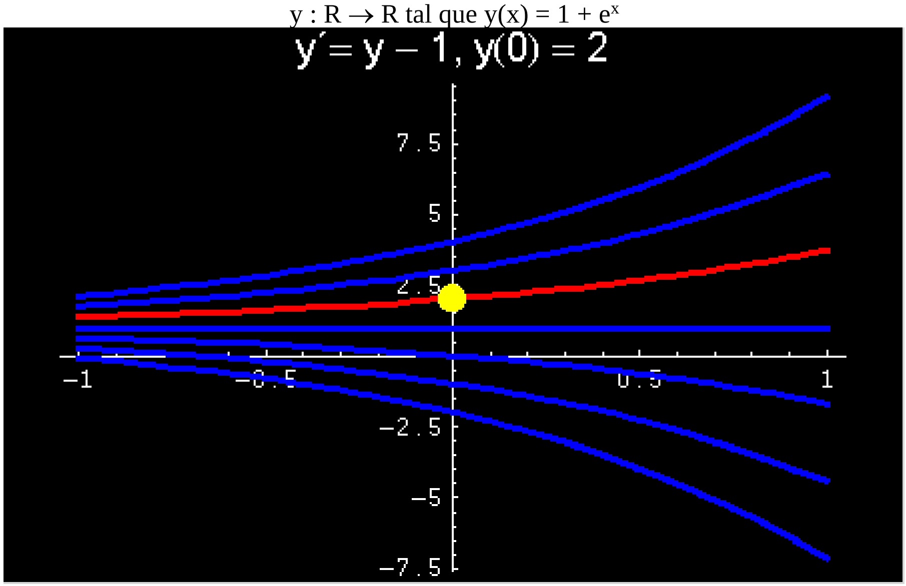
La ecuación diferencial puede escribirse como x y' = x (y–1). Descartando la recta de ecuación x = 0 (no hay allí función y = y(x) y por lo tanto tampoco y'), la ecuación diferencial es equivalente a

y' = y–1 , donde si consideramos que y ≠ 1, se rescribe como

$\int \frac{dy}{y-1} = \int dx$, esto es ln|y–1| = x| + k, con $k \in R$, o lo que es lo mismo y–1 = m x, siendo $m = \pm e^k$ una cualquiera (no nula); como además la función constante y = 1 es solución de la ecuación diferencial, permitimos también m = 0.
Luego la solución general es la familia de funciones:
$y : R \to R$ tal que $y(x) = 1 + m\, e^x$, $\forall m \in R$

La solución particular resulta ser la función:

$y : R \to R$ tal que $y(x) = 1 + e^x$



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 11

(c) Hallar la solución general de x (dy/dx) – y^2 = x y^2.

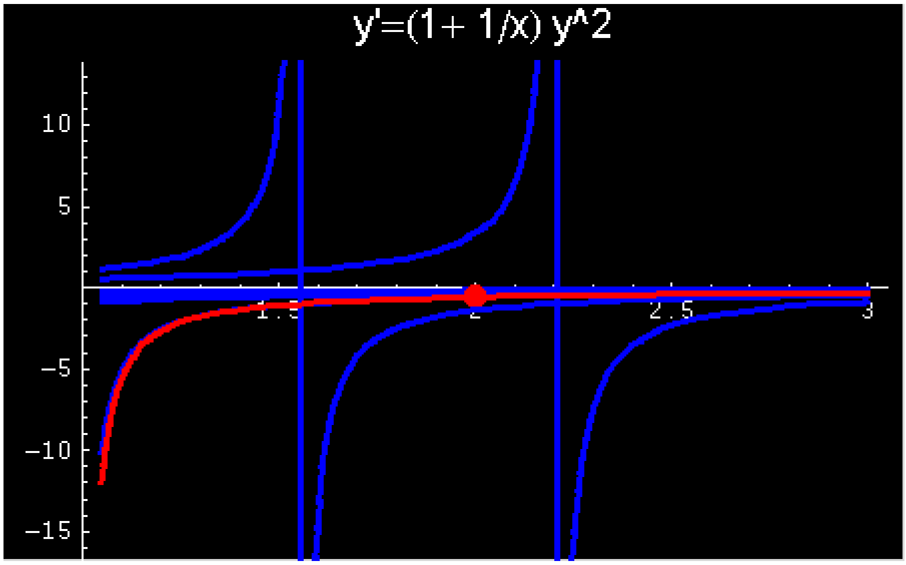
Una solución se tiene de inmediato: la función constante y: R → R tal que y(x) = 0; para y ≠ 0 es (en cualquier intervalo en que x no se anule).
y^{-2} dy = (1+1/x) d*x*/d*t* , y entonces

$$\int \frac{dy}{y^2} dy = \int (1 + \frac{1}{x}) dx$$

De allí resulta que la familia de soluciones queda definida en todo intervalo I en el que x + ln | x | + k ≠ 0, para cada k determinado por las condiciones iniciales, de modo que $x_0 \in I$, con $y(x_0) = y_0$:

$$y : I \to R \text{ tal que } y(x) = -\frac{1}{x + \ln|x| + k}$$

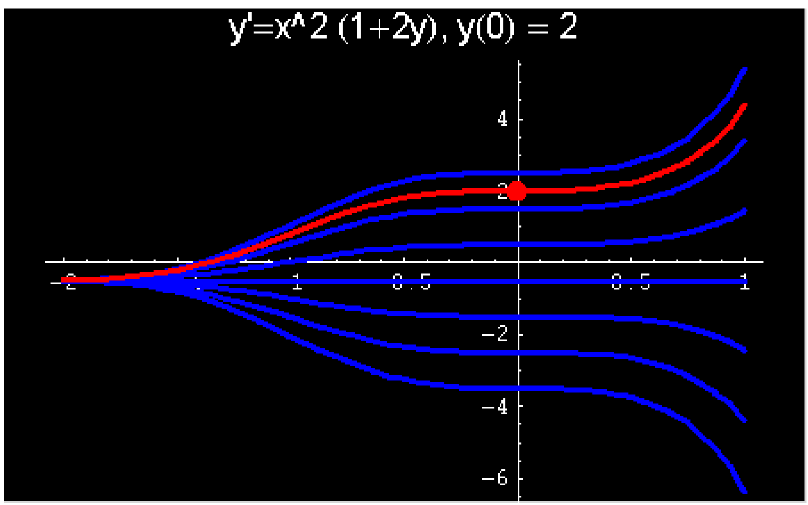
Observación 07: Sea por caso el pvi dado por la ecuación diferencial anterior y la condición inicial dada por y (2) = – $(1 + \ln 2)^{-1}$ de donde resulta que en el intervalo I = (1, ∞) la única solución es la función y: I → R tal que y (x) = – $(-1 + x + \ln x)^{-1}$, como se indica en la figura 12, donde además se muestran algunos miembros de la familia de la solución general.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 12

(d) Hallar la solución del problema de valores iniciales $y' + 2x^2 y = x^2$, $y(0) = 0$.

$$y : R \to R \text{ tal que } y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} e^{\frac{x^3}{3}}$$

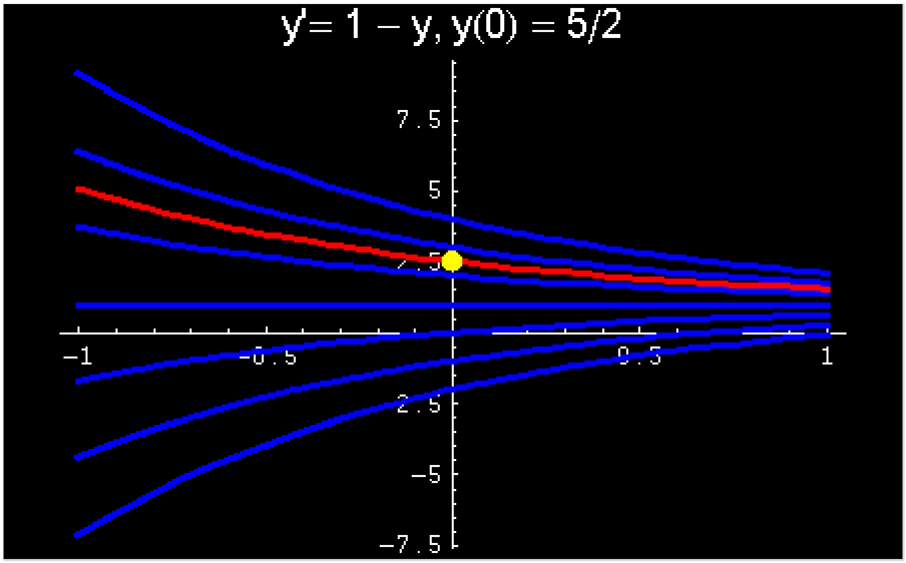


Análisis Matemático II, TP VI, Figura 13

✍ **Observación 08**: Recordamos prestar la debida atención a las restricciones introducidas en el curso de la resolución; en este ejercicio, observar que la función constante $y: R \to R$ tal que $y(x) = ½$ es también una solución de la ecuación diferencial (aunque no del pvi, desde luego), como puede observarse en la figura 13, donde además se muestran algunos miembros de la familia de la solución general.

(e) Hallar la solución del problema de valores iniciales $y' + y = 1$, $y(0) = 5/2$.

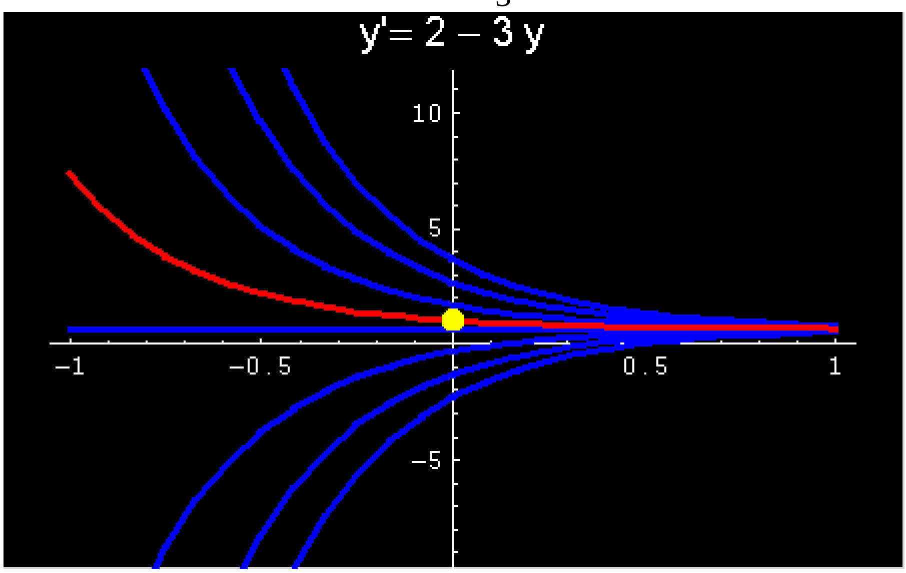
$$y : R \to R \text{ tal que } y(x) = 1 + \frac{3}{2} e^{-x}$$



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 14

(f) Hallar la solución general de y' + 3 y = 2.

$$y : R \to R \text{ tal que } y(x) = \frac{2}{3} + k\, e^{-x}, \quad \forall k \in R$$



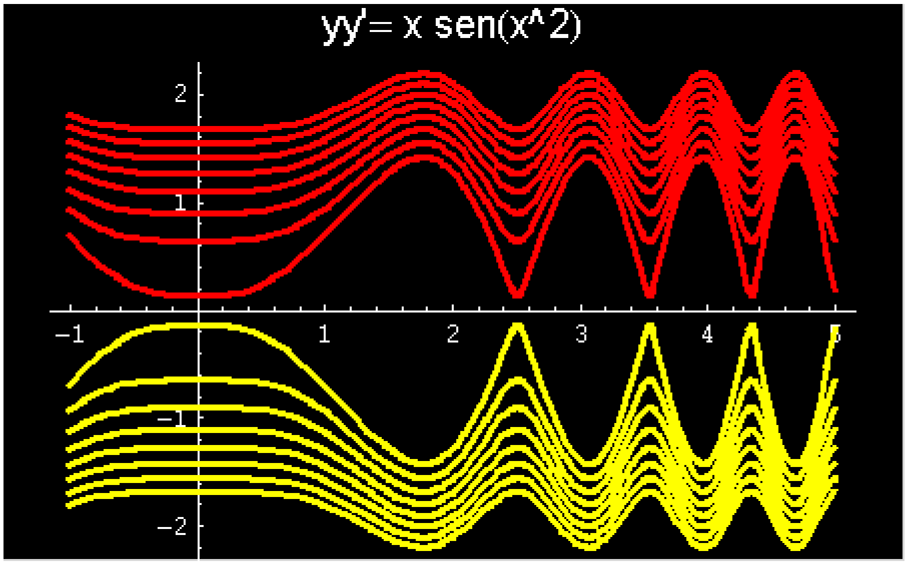
Análisis Matemático II, TP VI, Figura 15

(g) Hallar la solución general de y y' = x sen(x^2).

La resolución del problema es inmediata:

$$\int y\, dy = \int x\, \mathrm{sen}(x^2)\, dx$$

de donde es ½ y^2 = k – ½ cos (x^2), y de allí es que por solución general resulta la familia y: R $\to$ R definida por y^2 =2 k– cos (x^2), para cualquier k$\in$ R: | k | > ½ , resultando así una doble familia según la determinación de la raíz que se considere, y que resultará de la condición inicial que seleccione la solución en un pvi; mostramos algunos miembros en la figura 16.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 16

Recordamos ahora lo necesario acerca de las ecuaciones lineales de primer orden, representadas en los siguientes ítems h, i.
La ecuación diferencial [2], donde *p* y *q* son funciones que comparten un intervalo I en el que son continuas recibe el nombre de *ecuación diferencial lineal de primer orden*.

[2] dy/dx + p(x) y = q(x)

Llamando P a una primitiva de la función p

es decir $P(x) = \int p(x)\,dx$

y definiendo la función

g: I→ R tal que g(x) = exp P(x)

como g es nunca nula en I, [2] se verifica sii

g(x) dy /dx + p(x) g(x) y = g(x) q(x)

o lo que es lo mismo

d [g(x) y]/dx = g(x) q(x),

y entonces $g(x)\,y(x) = c + \int g(x)\,q(x)\,dx$

sustituyendo g resulta por solución general la función

y: I → R tal que $y(x) = c\exp(-P(x)) + \exp(-P(x))\int \exp(P(x))\,q(x)\,dx$

Si en particular se tuviese q nula, el problema (llamado homogéneo) tiene entonces por solución general la función

y: I → R tal que $y(x) = c\exp(-P(x))$.

Si lo que se tiene es un problema de Cauchy de modo tal que para $x_o \in$ I es $y(x_o) = y_o$ entonces debe ser claro que es suficiente (y necesario) tomar $c = y_o$ con

$P(x) = \int_{x_0}^{x} p(u)\,du$, y obtener la (única) solución como:

y: I→ R tal que $y(x) = y_o \exp(-P(x)) + \exp(-P(x)) \int_{y_0}^{x} \exp(P(u))\ q(u)\, du$ Pueden resumirse estos resultados en las expresiones [3] y [4].

[3] dy/dx + p(x) y = q(x) → $y(x) = c\exp(-P(x)) + \exp(-P(x) \int \exp(P(x))\, q(x)\, dx$, con $P(x) = \int p(x)\, dx$

[4] dy/dx + p(x) y = q(x), $y(x_o) = y_o$

$$\rightarrow\ y(x) = y_o \exp(-P(x)) + \exp(-P(x)) \int_{x_0}^{x} \exp(P(u))\ q(u)\, du \ , \text{con } P(x) = \int_{x_0}^{x} p(u)\, du$$

Observación 09: Del anterior desarrollo basta retener que es suficiente multiplicar la ecuación diferencial lineal por la función (que llamamos factor integrante) g(x) =∫ p(x) dx para transformarla en una ecuación diferencial de trivial resolución, dado que el primer miembro es sencillamente la derivada del producto de funciones gy; luego todo es inmediato.

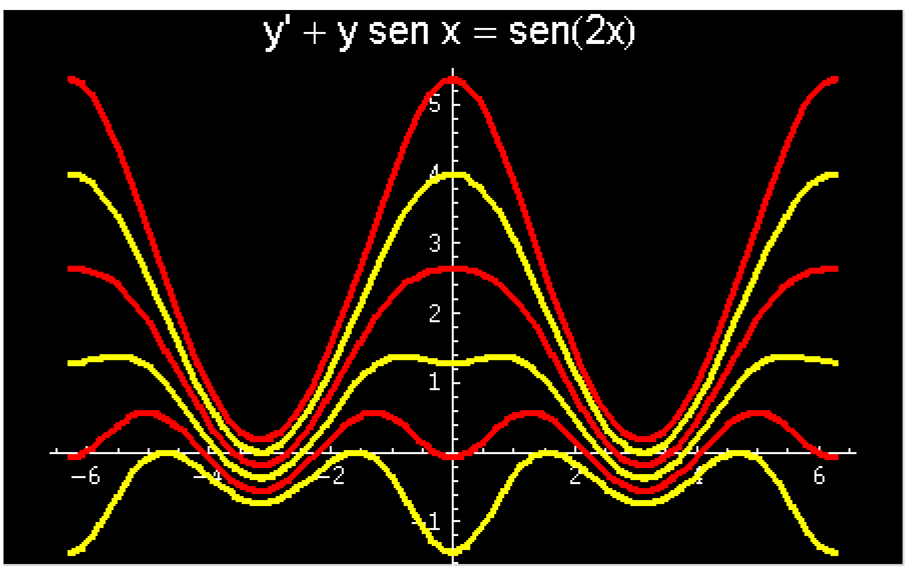
(h) Hallar la solución general de y' + y sen(x) = sen(2x).
Siendo aquí p(x) = sen(x), resulta que un factor integrante es la función:

$$g : R \rightarrow R \text{ tal que } g(x) = e^{\int \mathrm{sen}(x)\,dx} = e^{-\cos(x)}$$

de modo que multiplicamos la ecuación diferencial original por esta función resultando la ecuación diferencial equivalente (esto es una función es solución de la primera sii lo es de la segunda)

$e^{-\cos(x)}$ [y' + y sen(x)] = $e^{-\cos(x)}$ [sen(2x)], esto es la ecuación diferencial $e^{-\cos(x)}$ y' + $^{-\cos(x)}$ y sen(x) = $e^{-\cos(x)}$ sen(2x), que puede escribirse como [$e^{-\cos(x)}$ y]' = $e^{-\cos(x)}$ sen(2x), de donde se tiene que $e^{-\cos(x)}$ y = ∫ $e^{-\cos(x)}$ sen(2x) dx = 2$e^{-\cos(x)}$ (1 + cos(x)) + k, de modo que la solución general resulta la familia de familia de funciones:

$$y: R \rightarrow R \text{ tal que } y(x) = k\, e^{\cos(x)} + 2\,(1 + \cos(x)),\ \forall k \in R$$



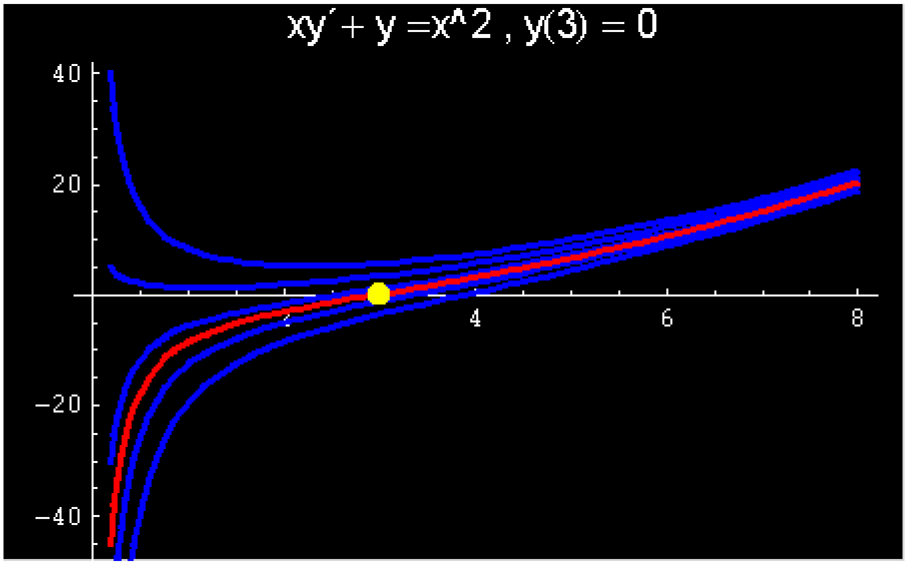
Análisis Matemático II, TP VI, Figura 17

(i) Hallar la solución del problema de valores iniciales x y' + y = x^2, y (3) = 0.

La ecuación diferencial está ya escrita de modo tal que el primer miembro es la derivada del producto xy, de modo que así escrita es sencillamente:

[xy]' = x^2, de modo que x y = k + x^3/3, y entonces en cualquier intervalo que no contiene al punto x = 0 es y = k/x + x^2/3; la condición inicial permite seleccionar la función que resuelve el pvi.

$$y:(0,\infty)\to R \text{ tal que } y(x) = -\frac{9}{x}+\frac{x^2}{3}$$



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 18

Los dos restantes subpuntos de este ejercicio comprenden las ecuaciones homogéneas de primer orden (expresión [5]), que pueden ser reducidas a una ecuación de variables separables mediante una transformación de variables, aprovechando el hecho de que si f es un campo escalar continuo y homogéneo de grado 0 en un dominio D_f, entonces por definición de homogeneidad, para todo $t \in I$ se verifica que f(tx, yy) = f(x,y), siempre que (x, y) junto con (yx, yy) pertenezcan a D_f.

[5] y' = f (x, y), siendo f un campo escalar homogéneo de grado 0.

Con la sustitución y = u x se tiene que y' = u'x + u = f(x, ux) = f(1, u), de modo que es entonces u'x = f(1, u) –u, o lo que es lo mismo, (siempre que $f(1,u) \neq u$), la ecuación de variables separables:

$$\frac{du}{f(1,u)-u} = \frac{dx}{x}$$

Observación 10: Si para algún valor u_0 es $f(1, u_0) = u_0$, entonces es inmediato ver que la recta de ecuación $y = u_0 x$ es *también* una solución de la ecuación diferencial, pues entonces es $y' = u_0 = f(x, u_0x) = f(1, u_0) = u_0$.

(j) Hallar la solución del problema de valores iniciales $x y' = y^2 + x y$, y (1) = 1.

Es claro que en cualquier intervalo que no contiene al origen la ecuación diferencial es equivalente a

$y' = (y/x)^2 + (y/x)$

Si llamamos f: $D_f \to R$ tal que $f(x, y) = (y/x)^2 + (y/x)$, con $D_f = \{(x,y)\in R^2: x\neq 0\}$, es claro que para todo $t\in R-\{0\}$ y para todo $(x, y)\in D_f$ se verifica $f(tx, ty) = (ty/tx)^2 + (ty/tx) = (y/x)^2 + (y/x) = f(x, y)$, de modo que el campo escalar f es homogéneo de grado 0 en el dominio D_f; por otra parte es continuo en todos los puntos de su dominio.

La sustitución y = ux conduce a que, siendo y' = u'x + u, es reemplazando:

$u'x + u = u^2 + u$, o lo que es lo mismo $u'x = u^2$, de donde se tiene (con $u\neq 0$)

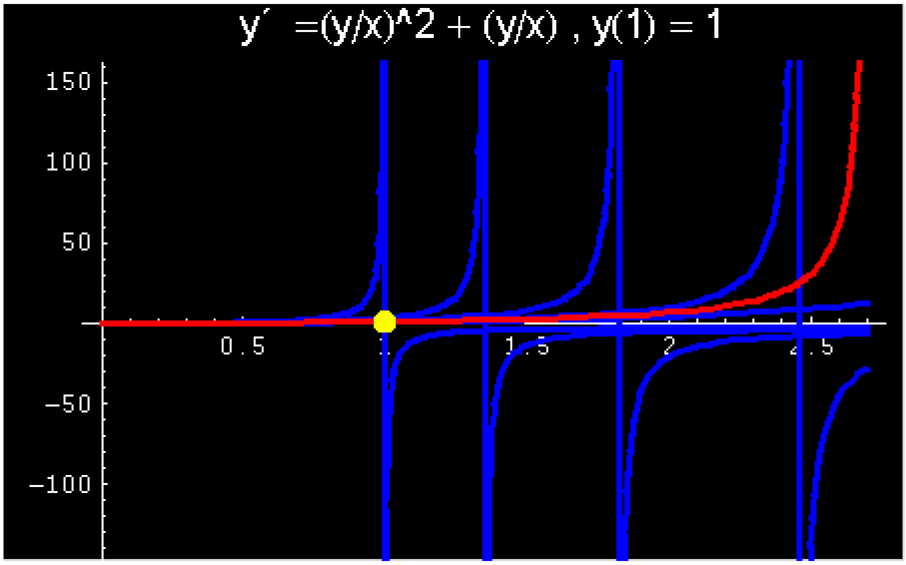
$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x} \;\to\; u = \frac{1}{k-\ln|x|}$$

y regresando a la variable original (recordando que es u = y/x) resulta la solución general la familia de funciones, definidas en un intervalo que no contiene al origen; a las anteriores debemos añadir la función nula, ya que de acuerdo a la observación 10, dado que u = 0 satisface la ecuación f(1, u) = u, debe ser y = 0x = 0 solución de la ecuación diferencial.

$$y : I \to R \text{ tal que } y(x) = \frac{x}{k - \ln|x|}$$

Finalmente, la condición inicial permite seleccionar la única función que satisface la ecuación diferencial en el intervalo I = (0, e):

$$y : (0, e) \to R \text{ tal que } y(x) = \frac{x}{1 - \ln|x|}$$

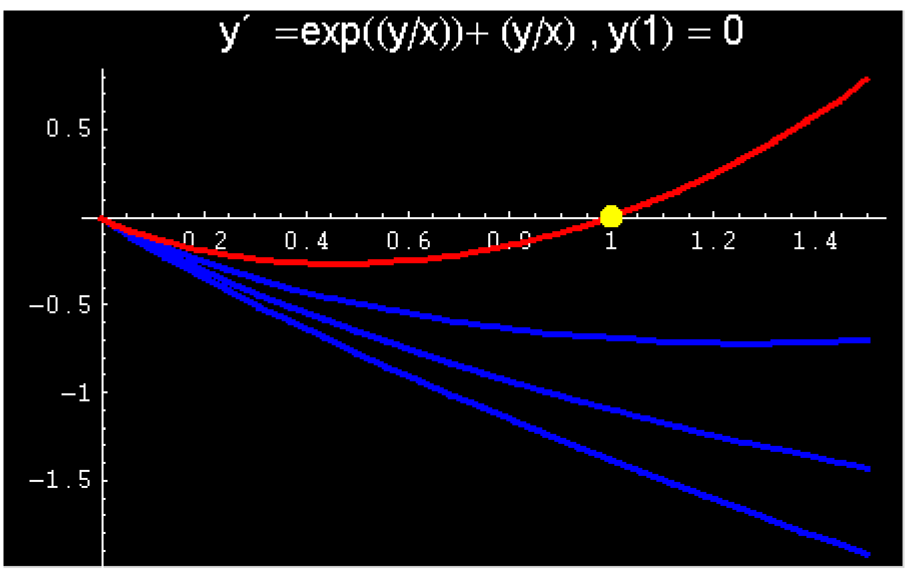


Análisis Matemático II, TP VI, Figura 19

Sugerimos reflexionar con algún cuidado sobre la figura 19, que expresa el modo en que las soluciones se comportan en los extremos del intervalo en que se hallan definidas.

(k) Hallar la solución del pvi x y’ = y + x exp(y/x), y(1) = 0.

y: (0, e) → R tal que y(x) = –x ln [1–ln x]



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 20

Ejercicio 06

Resolver

(a) Calcular la longitud entre los puntos (1, y_0) y (3, 0) del gráfico de la solución de 5. i

(b) Calcular las raíces de la solución de 5. i

Aquí no necesitamos más que la expresión obtenida de la solución, estos es la función

$$y : (0, \infty) \to R \text{ tal que } y(x) = -\frac{9}{x} + \frac{x^2}{3}$$

cuya raíz es 3, mientras la imagen a través de y de 1 es y(1) = – 26/3, de modo que la longitud pedida resulta

$$\frac{2\sqrt{178}}{2}$$

Ejercicio 07

Hallar en cada caso la familia de curvas ortogonales a las de la familia dada. Ilustrar mediante un gráfico.

(a) $y = c\,x^2$
(b) $x^2 + y^2 = c$
(c) $x\,y = c$
(d) $2x + y = c$
(e) $x-3 = c\,y^2$

El ejercicio requiere de la noción de redes ortogonales, sendas familias tales que un cualquier miembro de una familia corta ortogonalmente a los miembros de la otra familia; la idea que se emplea es muy simple: el producto de las pendiente de dos rectas ortogonales es –1, de modo que si con y' se designa la pendiente de la recta tangente a una curva de una familia, –1/ y' habrá de serlo la correspondiente a la familia ortogonal. Podemos esquematizar este procedimiento, diciendo que dada la familia de curvas:

$f(x, y, c) = 0$

obtenemos la ecuación diferencial de primer orden cuyas curvas integrales son la familia dada (como ya se explicara en el ejercicio 04); si en tal ecuación reemplazamos y' por –1/y', se obtendrá otra ecuación diferencial, cuya solución es la familia buscada:

$F(x, y, k) = 0$

Naturalmente, que este procedimiento debiera reservarse para cuando efectivamente la complejidad del problema lo merece; del concepto mismo, es claro que en el ítem b, en el que la familia dada es el conjunto de circunferencias centradas en el origen, las trayectorias ortogonales no son sino la familia de rectas que pasa por el origen, mientras que en el ítem d en el que la familia dada es el conjunto de rectas paralelas del plano de pendiente –2, las trayectorias ortogonales resultarán el conjunto de rectas paralelas de pendiente ½.

(a) $y = c\,x^2$

Formamos la ecuación diferencial de la familia dada eliminando el parámetro del sistema:

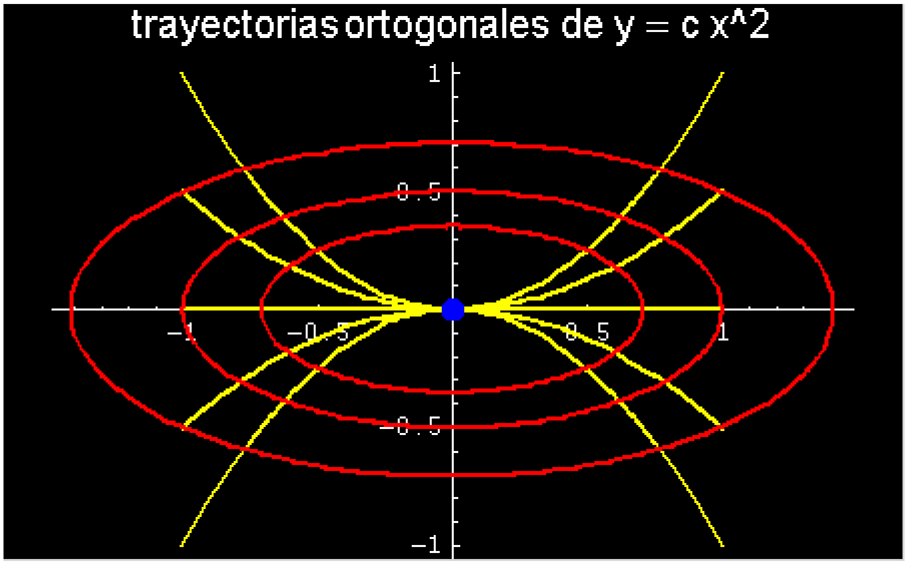
$$\begin{cases} y = cx^2 \\ y' = 2\,c\,x \end{cases} \to xy' = 2y$$

Tras el reemplazo de y' por –1/y' (con $y' \neq 0$) resulta la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales buscadas

$x = -2\,y\,y'$

La resolución de la ecuación diferencial (inmediata) nos proporciona la familia de las trayectorias ortogonales, que resulta una familia de elipses centrada en el origen con el semieje mayor (sobre el eje x) en relación $\sqrt{2}$ con el semieje menor (sobre el eje y)

$x^2 + 2y^2 = k$

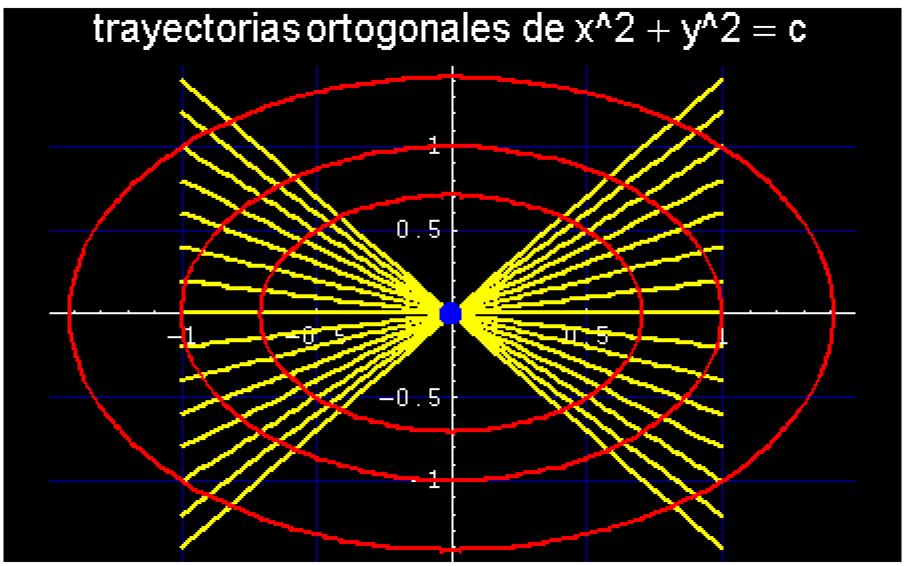


Análisis Matemático II, TP VI, Figura 21

Observación 11: En la figura 21 se destaca también el punto (0, 0); ¿por qué?

(b) $x^2 + y^2 = c$

$$y = k\,x$$



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 22

(c) $x\,y = c$

Formamos la ecuación diferencial de la familia dada eliminando el parámetro del sistema:

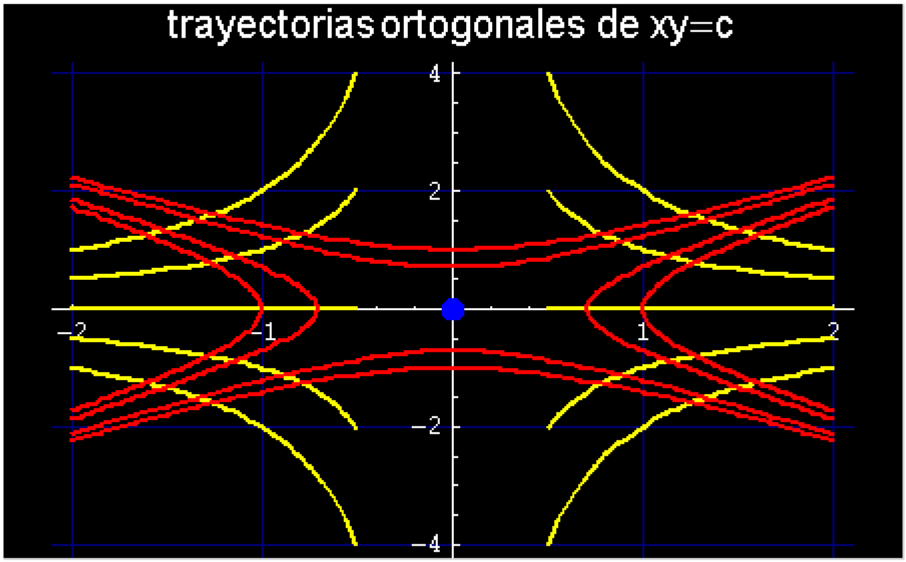
$$\begin{cases} xy = c \\ xy' + y = 0 \end{cases} \rightarrow xy' + y = 0$$

Tras el reemplazo de y' por $-1/y'$ (con $y' \neq 0$) resulta la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales buscadas

$y\,y' - x = 0$

La resolución de la ecuación diferencial (inmediata) nos proporciona la familia de las trayectorias ortogonales, que resulta la familia de de hipérbolas:

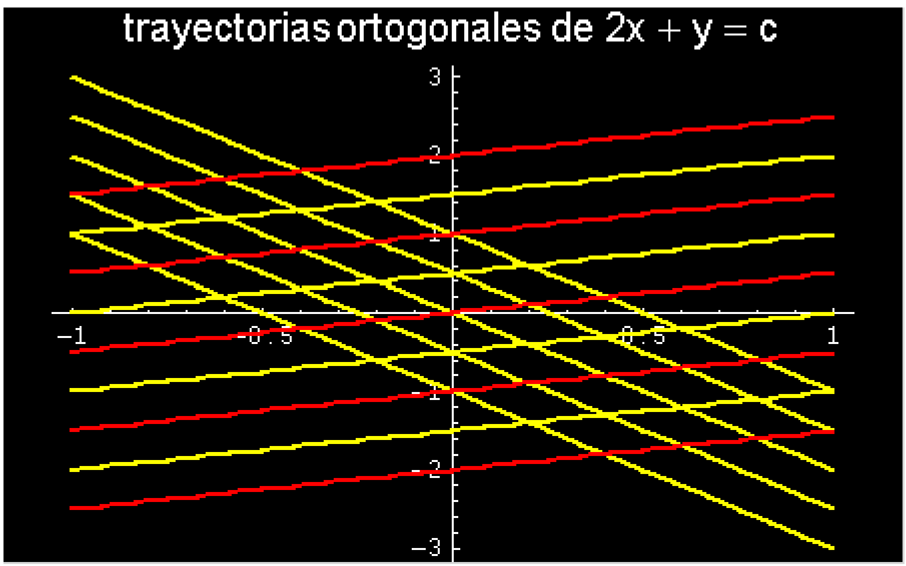
$$y^2 - x^2 = k$$



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 23

(d) $2x + y = c$

$$y = ½\, x + k$$



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 24

(e) $x–3 = c\, y^2$

Las trayectorias ortogonales resultan las familias de elipses centradas en el (3, 0) dadas por la ecuación $2\,(x–3)^2 + y^2 = k$.

Ejercicio 08

Resolver

(a) Hallar las curvas planas tales que la recta normal en todo punto pasa por el origen.
(b) Hallar las curvas planas tales que la recta tangente en todo punto pasa por el origen.
(c) Hallar las curvas planas tales que la pendiente en cada punto es igual al cociente ordenada/abscisa del punto.
(d) Hallar las curvas planas tales que la pendiente en cada punto es igual al cociente abscisa/ordenada del punto.
(e) Hallar la curva plana que pasa por (1, 6) y satisface que en cada punto de coordenadas (x, y) la recta tangente se interseca con el eje de ordenadas en un punto de ordenada 5y.
(f) Hallar las curvas para las que el área del triángulo que tiene como vértices un punto P de la curva, el punto de intersección de la tangente en el punto P con el eje x, y la proyección de P en el eje x, es constante (no depende de P) y vale 2.

El ejercicio es una muestra de que a menudo es más sencillo expresar en términos diferenciales las propiedades de una curva, que mirarla ya una vez construida como tal. Uno de tales casos lo constituye cualquier parábola de la forma $y = x^2 + k$: también podría decirse que se tratan de las curvas tales que en cada punto su pendiente es el doble de la abscisa del punto. En todos los ítems, de lo que se trata es de plantear la ecuación diferencial que verifica las condiciones que debe ajustar la curva, para luego obtener sus curvas integrales.

En cualquier caso, en tanto se tratan de problemas geométricos, seguramente resultará aconsejable efectuar un dibujo que retrate la situación y permita escribir la ecuación diferencial.

Muy posiblemente el dibujo mismo aclare, sin ecuación diferencial alguna, de qué curvas se tratan. Sugerimos efectuar una justificación que permita afirmar de modo directo que las curvas de las que se habla en el ítem a no pueden ser sino las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas, y que las de los ítems b y c no son sino una misma familia: la de las rectas que pasan por el origen de coordenadas.

Nos limitamos entonces a indicaciones sumarias, cuando no a la sola indicación del resultado obtenido.

(a) Hallar las curvas planas tales que la recta normal en todo punto pasa por el origen.

Buscamos curvas de la forma y = f(x), y sabemos que la ecuación de la recta normal a una curva de este tipo, siendo f derivable en x_0, con derivada no nula allí, está dada por la recta de ecuación

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

Dado que la recta debe pasar por el origen debe satisfacer, para todo punto (x_0, $f(x_0)$)

$$0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(0 - x_0) + f(x_0)$$

Esto es que $f'(x_0)\, f(x_0) = -x_0$, o lo que es lo mismo escrito de otro modo:

$y\, y' = -x$

Ecuación diferencial cuyas curvas integrales son las circunferencias centradas en el origen de coordenadas, de ecuación:

$x^2 + y^2 = k$

(b) Hallar las curvas planas tales que la recta tangente en todo punto pasa por el origen.

Buscamos curvas de la forma y = f(x), y sabemos que la ecuación de la recta tangente a una curva de este tipo, siendo f derivable en x_0, está dada por la recta de ecuación

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Dado que la recta debe pasar por el origen debe satisfacer, para todo punto (x_0, $f(x_0)$)

$$0 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0)$$

Esto es que $x_0\, f'(x_0) = f(x_0)$, o lo que es lo mismo escrito de otro modo:

$x\, y' = y$

Ecuación diferencial cuyas curvas integrales son las rectas que pasan por el origen de coordenadas, de ecuación:

$y = k\, x$

(c) Hallar las curvas planas tales que la pendiente en cada punto es igual al cociente ordenada/abscisa del punto.

Basta observar que se trata de la misma ecuación diferencial que la obtenida en el ítem anterior, para repetir la familia solución como el conjunto de rectas que pasa por el origen de coordenadas.

(d) Hallar las curvas planas tales que la pendiente en cada punto es igual al cociente abscisa/ordenada del punto.

Esto es que $y' = x/y$, ecuación diferencial cuyas curvas integrales resultan la familia de hipérbolas de ecuación $y^2 - x^2 = k$

(e) Hallar la curva plana que pasa por (1, 6) y satisface que en cada punto de coordenadas (x, y) la recta tangente se interseca con el eje de ordenadas en un punto de ordenada 5y.

Buscamos curvas de la forma $y = f(x)$, y sabemos que la ecuación de la recta tangente a una curva de este tipo, siendo f derivable en x_0, está dada por la recta de ecuación

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Dado que la recta debe pasar por el punto $(0, 5\,f(x_0))$ debe satisfacer

$$5\,f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0)$$

Esto es que $x_0\, f'(x_0) = -4f(x_0)$, o lo que es lo mismo escrito de otro modo:

$x\, y' = -4y$

Ecuación diferencial cuyas curvas integrales constituyen la familia de ecuación

$y = k\, x^{-4}$ y con la condición inicial resulta la función

$$y : (0, \infty) \to R \text{ tal que } y(x) = \frac{6}{x^4}$$

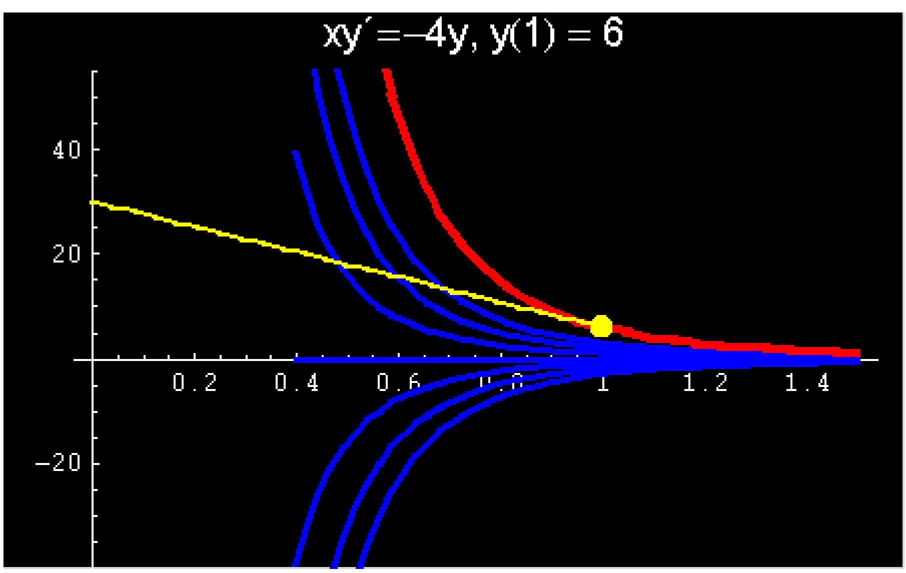
Recordamos aquí nuestra recomendación de asegurar la comprensión de la naturaleza geométrica del problema con un dibujo, además de asegurarse la confiabilidad del resultado mediante la verificación analítica, siempre muy directa, de la solución obtenida.

En este caso la verificación analítica consiste en escribir la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto de coordenadas (x_0, y_0), con $x_0 \in (0, \infty)$, $y_0 = y(x_0)$.

$$y = -\frac{24}{x_0^{5}}(x - x_0) + \frac{6}{x_0^{4}}$$

y comprobar que efectivamente su intersección con el eje y es:

$$y = -\frac{24}{x_0^{5}}(0 - x_0) + \frac{6}{x_0^{4}} = \frac{24}{x_0^{4}} + \frac{6}{x_0^{4}} = \frac{30}{x_0^{4}} = 5\frac{6}{x_0^{4}} = 5y_0$$



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 25

En la figura 25 se aprecia la situación, donde se ha trazado la recta tangente por un punto cualquiera para apreciar su intersección con el eje de ordenadas; es claro que ese trazado es válido para un cualquier otro punto; en realidad *todas* las curvas cumplen esa condición, sólo que la señalada es la única que además pasa por el punto (1, 6).

(f) Hallar las curvas para las que el área del triángulo que tiene como vértices un punto P de la curva, el punto de intersección de la tangente en el punto P con el eje x, y la proyección de P en el eje x, es constante (no depende de P) y vale 2.

Buscamos curvas de la forma y = f(x), y sabemos que la ecuación de la recta tangente a una curva de este tipo, siendo f derivable en x_0, está dada por la recta de ecuación

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

La recta corta al eje x en el punto de coordenadas $(x_1, 0)$, donde x_1 resulta de:

$$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \ \rightarrow (x_0 - x_1) = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

De modo que siendo el triángulo de base $(x_0 – x_1)$ y altura $f(x_0)$ de área 2 resulta que

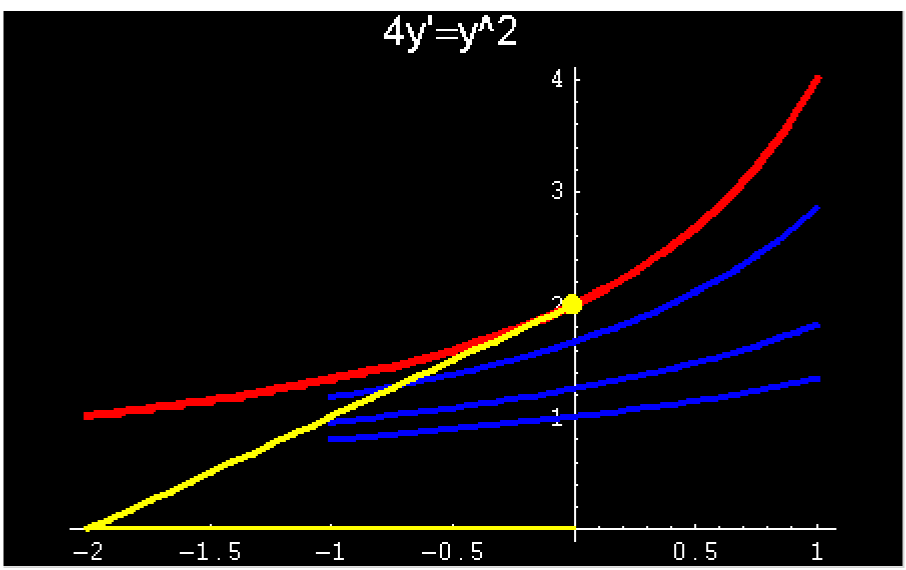
$$\frac{[f(x_0)]^2}{f'(x_0)} = 4$$, de modo que podemos escribir la ecuación diferencial como

$4\, y' = y^2$

cuyas curvas integrales constituyen la familia de hipérbolas de ecuación

$$y = -\frac{4}{x + k}$$

Graficamos en la figura 26 una de tales curvas y señalamos en ella uno de los triángulos subtendidos de área 2.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 26

Ejercicio 09

Un termómetro que marca 10ºC se lleva a una habitación a 20ºC. En un minuto la temperatura del termómetro asciende a 15 ºC. Si la velocidad con que cambia la temperatura del termómetro es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la de la habitación (que se supone constante), obtenga y grafique el comportamiento de la temperatura del termómetro como función del tiempo. ¿Cuándo estará a 1ºC de la temperatura ambiente?

Este es el primer momento del trabajo práctico en el que los referentes del problema se hallan 'fuera' y así nos exige hacer una breve mención a la noción de modelo. Al decir de Arthur Koestler (The sleepwalkers) la obertura de la ciencia es Pitágoras; en la opinión de algunos autores, parece haber sido el primero en anticipar un rudimento del concepto de modelo, tal como se lo entiende actualmente. En la visión pitagórica, entre los hechos tal como se nos presentan y el universo de los objetos matemáticos (entre los que se encuentran las ecuaciones diferenciales), existe una correspondencia, de tal manera que propiedades de las cosas percibidas y propiedades estructurales de las entidades matemáticas se hallan efectivamente vinculadas.

De esa manera, ante un dado problema percibido, un proceso de abstracción que incluye generalmente simplificaciones (modelo físico) permite pasar a una estructura matemática que se le corresponda, aprovechar la potencia de los métodos de la matemática para resolver la imagen del problema (modelo matemático) en el dominio de la matemática y luego retroceder transfiriendo los resultados (retraducidos) para observar la calidad de la solución. En todo caso, la solución del problema matemático puede efectuar una predicción que, de ser insatisfactoria, habrá de conducir a una revisión o reemplazo del modelo propuesto como instancia explicativa.

La naturaleza de la postulada correspondencia entre los fenómenos y los modelos que los interpretan es objeto de la filosofía, la que ciertamente era una actividad pitagórica; la perspectiva científica actual se desentiende de tal correspondencia (en el caso que existiese no sólo ella misma sino los términos que pretenden corresponderse) y se sitúa, con profundos matices, más próxima a una visión semejante a la de Russell y Popper, según la cual la ciencia no mira los hechos significativos (significativos para algún modelo) como lo haría un artista, sino más bien como un caso (un ejemplar de una colección) que pone a prueba algún modelo científico. El enunciado del ejercicio ha hecho ya casi todo por nosotros: la habitación, el termómetro, todo ha sido reducido a la ley que rige la velocidad de cambio de la temperatura (y que proviene de la física), de modo que nuestro modelo matemático está muy cerca, basta escribir la ecuación diferencial del proceso:

$dT/dt = \kappa\,(T - T_a)$, donde con T_a indicamos la temperatura del ambiente, con T la temperatura del termómetro en el instante t, siendo κ la constante de proporcionalidad que se afirma (o supone) constante, y la condición inicial indica que $T(0) = T_0 = 10$. Estamos ante un pvi cuya ecuación diferencial es muy sencilla (es de variables separables), cuya solución no ofrece dificultad alguna.
Así tenemos que la solución del pvi es la función

$T: [0, \infty) \to R$ tal que $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)\, e^{\kappa\, t}$

En cuanto a la constante κ, podemos ahora determinarla sabiendo que $T(1) = T_1 = 15$, de modo que si reemplazamos en nuestra solución obtenemos la constante como:

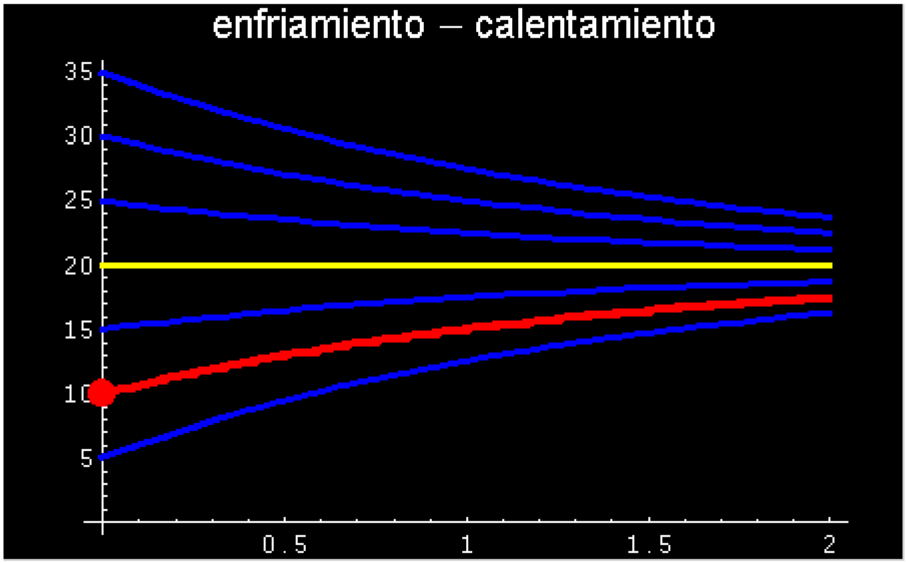
$$\kappa = \ln \frac{T_a - T_1}{T_a - T_0}$$

reemplazando en nuestra solución tenemos finalmente que con t en minutos la temperatura en ºC está dada por

$$T : [0, \infty) \text{ tal que } T(t) = T_a + (T_0 - T_a)\left[\frac{T_a - T_1}{T_a - T_0}\right]^t$$

y si finalmente introducimos aquí los datos de nuestro caso particular resulta

$T(t) = 20 - 10\,(2^{-t})$



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 27

Sugerimos analizar la figura 28, observar allí que tanto el calentamiento como el enfriamiento se aproximan asintóticamente a la temperatura ambiente (lo que parece razonable, ¿verdad?), que si inicialmente es $T_0 = T_a$ entonces la temperatura no se modifica (también resulta natural este comportamiento). También examinar el signo de κ, que resulta negativo, lo que significa sencillamente que los cuerpos más calientes (fríos) que el ambiente se enfriarán (calentarán), lo que tampoco podemos objetar. La resolución del modelo permite afirmar el modo en que las cosas pueden suceder (o según lo prefiere Popper el modo en que *no* pueden suceder), y dado que es el modelo de una cierta 'realidad', allí está a mano siempre para corroborar que ésta no contradice el modelo que pretende representarla en alguno de sus aspectos.

Observación 12: El carácter de las curvas de la figura 28 bien pudo trazarse *sin resolver* la ecuación diferencial, sencillamente retomando lo que conceptualmente la misma expresa: en efecto basta ver que si $dT/dt = \kappa\,(T-T_a)$, entonces para $T = T_a$ es $dT/dt = 0$, de modo que T es constante, y como se dijo que $T = T_a$, entonces $T^* = T_a$ es un *estado de equilibrio* de la ecuación diferencial. Tal estado no puede ser alcanzable en tiempo finito t_1, pues esto violaría la unicidad de la solución en t_1, y como además si $T > T_a$, siendo $\kappa < 0$ es $dT/dt < 0$, la temperatura está decreciendo, pero no puede disminuir hasta T_a, por lo que se aproxima asintóticamente de forma monótona decreciente (¿puede ver ésto en las curvas de la figura 28? Por otra parte, si si $T < T_a$, siendo $\kappa < 0$ es $dT/dt > 0$, la temperatura está creciendo, pero no puede alcanzar T_a, por lo que se aproxima asintóticamente de modo monótono decreciente, tal como lo hace precisamente la solución de nuestro pvi. Este análisis cualitativo se inserta en una teoría algo más amplia que se denomina *sistemas dinámicos*, y en ella diríamos que el estado de equilibrio $T = T_a$ es un estado *atractor global*, en el sentido de que toda solución para t suficientemente grande se aproxima tanto como se quiera a ella.

Finalmente, la pregunta acerca del instante en que la temperatura del termómetro es de 19ºC se contesta con sólo resolver la ecuación $20 - 10\,(2^{-t}) = 19$ de donde resulta que, medido en minutos, la temperatura 19 ºC se alcanza en

$$t_{19} = \frac{\ln 10}{\ln 2}$$

Ejercicio 10

Resolver los siguientes problemas

(a) La rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente. Si hay inicialmente 60 g de sustancia y al cabo de tres días quedan solamente 10 g, ¿qué porcentaje de la cantidad original quedará al cabo de 4 días?

(b) Una población x de bacterias crece con $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$ constante 0, 03 durante t_1 días, al cabo de los cuales se incrementa a 0.05. Hallar t_1 sabiendo que la población se duplicó en 20 días.

(c) Una bola esférica de nieve se derrite de manera que la derivada de su volumen v(t) respecto del tiempo es proporcional a su área en ese mismo momento. Si para t = 0 el diámetro es de 5 cm y 30 minutos después el diámetro es 2 cm, ¿en qué momento el diámetro será de 1 cm?

(d) Una bola esférica de nieve se derrite de manera que la razón de su diámetro d(t) respecto del tiempo t es proporcional a su área en ese mismo momento. Si para t = 0 el diámetro es de 5 cm y 30 minutos después el diámetro es 3 cm, ¿en qué momento el diámetro será de 1 cm?

No haremos aquí mayores comentarios a los expresados en el ejercicio 09, bastará decir que aunque los ítems a, c, d se inscriben en la física, mientras que el b en la biología, nos basta la información que se proporciona en el enunciado para formular el modelo matemático que permite resolverlos.

(a) La rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente. Si hay inicialmente 60 g de sustancia y al cabo de tres días quedan solamente 10 g, ¿qué porcentaje de la cantidad original quedará al cabo de 4 días?

Si designamos con x a la cantidad de sustancia presente en el instante t, el problema de valor inicial $x(t_o) = x_o$, $dx / dt = kx$, se resuelve separando variables: basta escribir (siempre que $x \neq 0$) $\int \frac{dx}{x} = \int k\, dt$ y de aquí es $\ln |x| = k\, t + c$, y como $x(t_o) = x_o$, es $\ln |x_o| = k\, t_o + c$ de manera que $\ln |x/x_o| = k\,(t - t_o)$ resultando entonces $x: R \to R$ tal que $x(t) = x_o \exp [k(t-t_0)]$, solución válida para cualquier estado inicial $x_o \neq 0$; sin embargo, la función $x: R \to R$ tal que $x(t) = 0$ es solución del problema para $x_o = 0$, de modo que finalmente puede incluirse en la anterior expresión y así afirmar que, para todo x_o es $x: R \to R$ tal que $x(t) = x_o \exp [k(t-t_0)]$ la (única) solución del problema de Cauchy, y considerando que en nuestro caso podemos tomar $t_0 = 0$, resulta:

$$x : R \to R \text{ tal que } x(t) = x_0 e^{k\,t}$$

Como además se nos indica la cantidad en un dado instante t_1, estos es $x(t_1) = x_1$, podemos entonces determinar el valor de la constante de decaimiento k, obteniéndolo de la siguiente ecuación:

$$x_1 = x_0 e^{k\,t_1}$$

Reemplazando en la expresión original tenemos:

$$x : R \to R \text{ tal que } x(t) = x_0 \left[\frac{x_1}{x_0}\right]^{\frac{t}{t_1}}$$

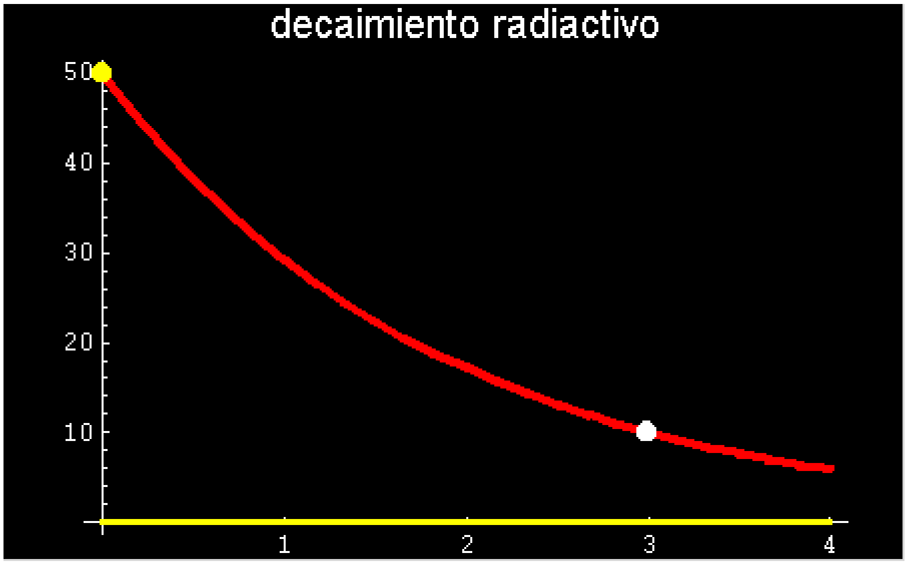
Reemplazando nuestro datos específicos $x_0 = 50$, $x_1 = 10$, $t_1 = 3$, resulta

$$x : R \to R \text{ tal que } x(t) = 50 \left[\frac{1}{5}\right]^{\frac{t}{3}}$$

Se nos pide x(4), de modo que resulta

$$x(4) = 50 \left[\frac{1}{5}\right]^{\frac{4}{3}} \cong 5.\,85 \text{ g}$$

Observación 13: La función que resuelve el pvi está definida en R, esto es que para todo instante t real satisface la condición inicial y la ecuación diferencial; sin embargo es claro que de acuerdo con la naturaleza del problema, debiéramos escribir que la función sólo nos es significativa (esto es tiene un referente empírico) para $t \geq 0$, dado que no tenemos noticias (ni estamos interesados) en hacer una retrodicción que reconstruya el pasado de la sustancia. También puede verse que la ecuación diferencial es esencialmente la misma del ejercicio 09, de modo que pueden extenderse los análisis cualitativos allí asentados en la observación 12 a este caso, observando que el estado de equilibrio es ahora $x^* = 0$; en la figura 29 se muestra la evolución de la cantidad de sustancia y se señalan los dos puntos dados de dato.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 28

(b) Una población x de bacterias crece con $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$ constante 0, 03 durante t_1 días, al cabo de los cuales se incrementa a 0.05. Hallar t_1 sabiendo que la población se duplicó en 20 días.

Este apartado nos remite a un modelo de población malthusiano en dos tiempos; consideramos conveniente aquí hacer una breve referencia a la hipótesis del modelo que estamos aplicando.

Si se llama x(t) a la población de una determinada especie en un instante t, y se la considera una variable continua (es claro que es discreta: ¿qué justifica esta consideración?), surgen diferentes modelos de población según el tipo de tasas de mortalidad y natalidad que se consideren.

Si ν es la tasa de natalidad (nacimiento de individuos por unidad de individuo en una unidad de tiempo) mientras que μ es la de mortalidad (muerte de individuos por unidad de individuo y por unidad de tiempo), entonces por definición se tiene la siguiente expresión, una vez aceptado que se estudia un sistema cerrado, donde no hay modificación de la población por migraciones.

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \nu - \mu \text{ , con } x(0) = x_o$$

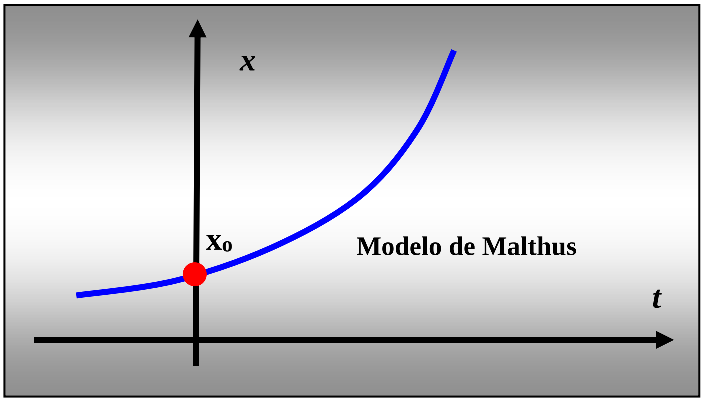
Si ahora se supone que ambas tasas son constantes y para concretar, que $\nu > \mu$ (esto es nacen más que los que mueren) se tiene un modelo de población conocido como malthusiano (por Thomas Malthus) o exponencial, puesto que si se llama $k = \nu - \mu$, la expresión anterior se convierte en la siguiente

$dx/dt = k\,x,\ \ x(0) = x_o$

Pero la anterior no es más que la resuelta ya en el apartado anterior, cuya solución está dada por

$$x : R \to R \text{ tal que } x(t) = x_0 e^{kt}$$

de modo que la población crece exponencialmente como lo indica la figura 30.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 29

Si bien el modelo de Malthus puede interpretar la evolución de ciertas poblaciones en condiciones ambientes sin restricciones, muy pronto se aparta de lo que en realidad sucede cuando empieza a gravitar el hecho de que las poblaciones necesitan de los recursos que obtienen del ambiente, y siendo éstos limitados, no es posible esperar una crecimiento ilimitado, que es la predicción malthusiana; en verdad pudo desde un principio, sin pasar por resolver la ecuación diferencial, anticiparse que resultaría un modelo de población no acotado ya que al poner $dx/dt = kx$, $x(0) = x_o$ se tiene que $dx / dt > 0$ para todo t (con $x_o > 0$, $k > 0$).

Observación 14: En el lenguaje de los sistemas dinámicos diríamos que en el modelo malthusiano el estado de equilibrio $x^* = 0$ (esto es ausencia de población) es un repulsor, esto es que cualquier pvi con condición inicial $x_0 \neq 0$ evolucionará alejándose del estado de equilibrio.

Ahora nuestro problema específico del modelo en dos pasos: (a) $dx/dt = k_1 \, x$, $x(0) = x_o$, para $t\in[0, t_1]$, $k_1 = 0.03$, (b)$dx/dt = k_2 \, x$, $x(t_1) = x_1$, para $t\in[t_1, t_2]$, $k_2 = 0.05$. Dado que tenemos las soluciones de cada uno de ellos podemos escribir:

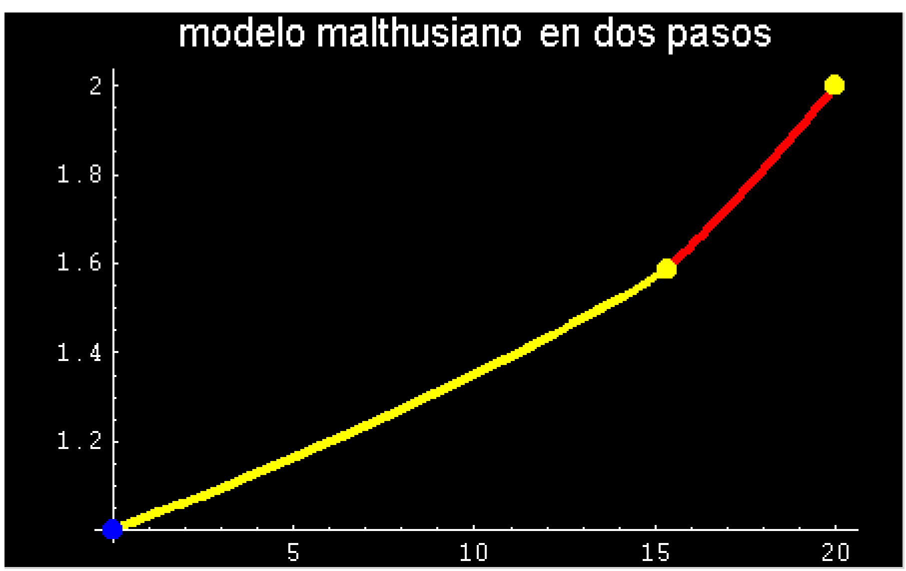
$$x_1 = x_0 \, e^{k_1 t_1}, \; x_2 = x_1 \, e^{k_2 (t_2 - t_1)} \;\; \rightarrow \;\; x_2 = x_0 \, e^{k_1 t_1} \, e^{k_2 (t_2 - t_1)}$$

Pero dado que $x_2 = 2\,x_0$ para $t_2 = 20$, resulta que podemos obtener t_1 de la ecuación:

$$2x_0 = x_0 \, e^{k_1 t_1} \, e^{k_2 (t_2 - t_1)}$$

Esto es que

$$t_1 = \frac{k_2 \, t_2 - \ln 2}{k_2 - k_1} = 50\,(1 - \ln 2) \cong 15.34 \text{ días}$$



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 30

(c) Una bola esférica de nieve se derrite de manera que la derivada de su volumen v(t) respecto del tiempo es proporcional a su área en ese mismo momento. Si para t = 0 el diámetro es de 5 cm y 30 minutos después el diámetro es 2 cm, ¿en qué momento el diámetro será de 1 cm?

Aquí todo es inmediato, recordando que el volumen de una esfera de diámetro ϕ está dado por $v = \pi\phi^3/6$, y su área por $A = \pi\phi^2$ de modo que se tiene que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{2}\phi^2\frac{d\phi}{dt} = k\,\pi\,\phi^2$$

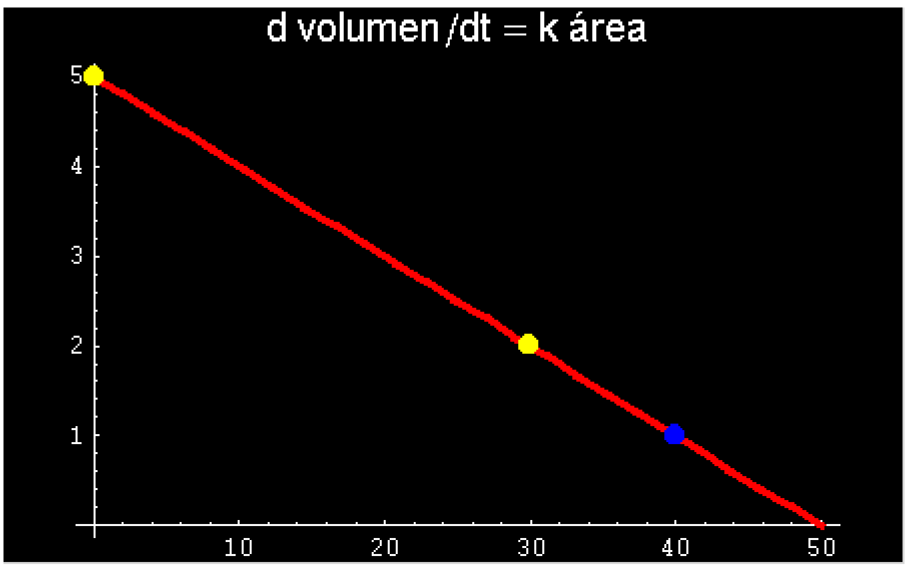
Lo que escrito de otra manera nos remite al pvi inmediato:

$$\frac{d\phi}{dt} = 2\,k \;,\;\; \phi(0) = 5$$

Cuya solución es $\phi(t) = 2\,k\,t + 5$; como además $\phi(30) = 2$, resulta finalmente:
$\phi(t) = (50–t) / 10$, con $t\in[0, 50)$

En particular el instante en el que el diámetro es 1 resulta de resolver la ecuación

(50–t) / 10 = 1, esto es t = 40 minutos.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 31

(d) Una bola esférica de nieve se derrite de manera que la razón de su diámetro ϕ (t) respecto del tiempo t es proporcional a su área en ese mismo momento. Si para t = 0 el diámetro es de 5 cm y 30 minutos después el diámetro es 3 cm, ¿en qué momento el diámetro será de 1 cm?

La variante introduce el pvi:

$$\frac{d\phi}{dt} = k\,\pi\,\phi^2, \phi(0) = 5$$

Cuya solución es:

$$\phi(t) = \frac{5}{1 - 5k\pi t}$$

Considerando que $\phi(30) = 3$ resulta que k debe satisfacer la ecuación:

$$3 = \frac{5}{1 - 150\,k\,\pi}$$

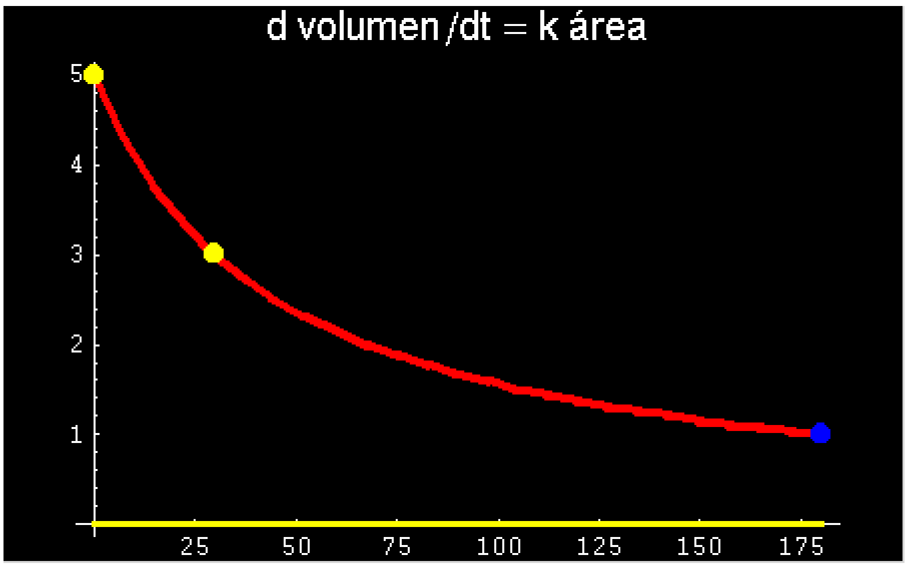
de donde despejando k y reemplazando resulta que el diámetro se obtiene como

$$\phi : [0, \infty) \to \mathrm{R} \text{ tal que } \phi(t) = \frac{450}{90 + 2\,t}$$

Para obtener el instante en que el diámetro es 1 basta resolver la ecuación:

$$1 = \frac{450}{90 + 2\,t}$$

De donde resulta t = 3 horas.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 32

Ejercicio 11

Resolver los siguientes problemas

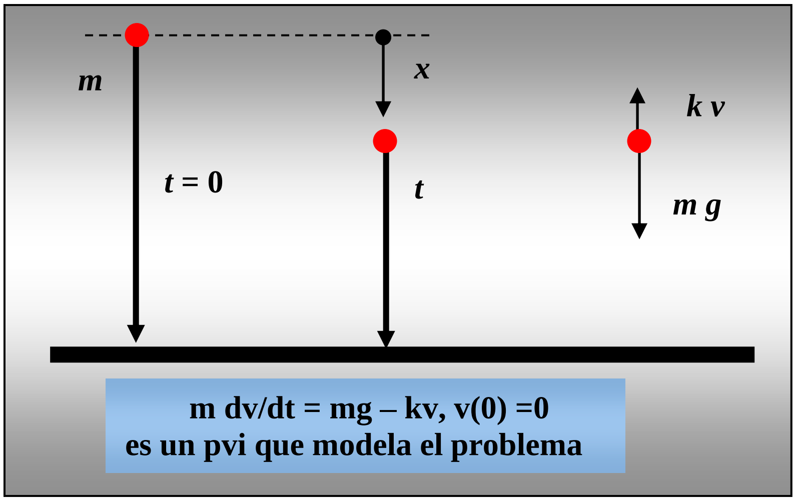
(a) Un objeto de masa m cae hacia la superficie de la Tierra, su caída está retardada por la resistencia del aire que es proporcional a su velocidad y por lo tanto, por la segunda ley de Newton sabemos que m dv/dt = mg – kv, donde g es la aceleración de la gravedad y v(t) es la velocidad del cuerpo en el instante t. Si la caída comienza en t = 0 con v(0) = 0, hallar la velocidad del objeto v(t) hasta que llega al piso.

(b) Resolver el problema anterior suponiendo que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad.

El ejercicio nos facilita, por así decirlo, la construcción del modelo, que ha sido casi íntegramente ya realizada; creemos conveniente, sin embargo, una breve reflexión acerca de la gran cantidad de información que el enunciado ya nos devuelve procesada, y que a la humanidad le llevó siglos recorrer.

Se deja caer un objeto y se intenta responder cómo evoluciona su velocidad. Seguramente en un principio el problema se presenta en términos muy vagos y es en su precisión que se va conformando el modelo y al mismo tiempo lo que se pretende modelar. Las preguntas inmediatas se dirigen a definir qué tipo de objeto (¿es una pluma, un paracaidista, una piedra, una carga de profundidad…?) y la región en la que evoluciona (es aire, es agua…) al mismo tiempo que el objeto se convierte en una construcción conceptual (seguramente se lo despoje de color, por considerar que blanco o amarillo no será de importancia para lo que se quiere responder). Así, por ejemplo, si se considera que el objeto evoluciona en el vacío, Galileo enseña que ni siquiera la masa del objeto es pertinente.

Suponiendo se está al tanto de la segunda ley de Newton, podrá entonces hacerse un esquema como el de la figura 34, aceptando que es el de un objeto que cae en un fluido que ejerce una fuerza proporcional a la velocidad del objeto relativa al fluido y que el objeto no cambia de forma ni masa en su evolución.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 33

El pvi dado por

m dv/dt = mg – kv, v(0) = 0

puede resolverse de inmediato separando variables (también puede considerarse como una ecuación lineal de primer orden):

$$\int \frac{dv}{(mg - kv)} = \int \frac{dt}{m} \to -\frac{1}{k}\ln|mg - kv| = \frac{t}{m} + c$$

y considerando la condición inicial resulta la solución:

$$v : [0, \infty) \to R \text{ tal que } v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$$

Resulta de sumo interés examinar la expresión obtenida; en primer lugar puede observarse que la derivada de v respecto de t en el instante t = 0 es precisamente g, lo que es muy natural, ya que en el instante del lanzamiento, con velocidad nula, la fuerza de rozamiento es nula, de modo que el cuerpo está sometido solamente a la acción de la gravedad.

También observamos que se verifica

$$v(t) \xrightarrow{t\to\infty} mg / k$$

Si llamamos v* = mg/k, podemos escribir la solución como sigue:

$$v : [0, \infty) \to R \text{ tal que } v(t) = v^*\left(1 - e^{-kt/m}\right)$$

La existencia de una velocidad límite nos parece absolutamente razonable, pues el cuerpo (puede pensarse en un paracaidista) está sometido a dos fuerzas de sentido opuesto, pero una de ellas (el peso) es fija, mientras que la otra es variable, y aumenta con la velocidad. Si la velocidad no estuviese limitada tendríamos que a partir de cierto tiempo nuestro paracaidista (o nuestra piedra) comienza a ascender, lo que no podríamos aceptar.

También pudimos llegar a la conclusión del comportamiento asintótico de la velocidad límite sin resolver la ecuación diferencial, bastaba el análisis cualitativo propio de los sistemas dinámicos y que nos brinda una mayor profundidad del fenómeno que la solución cerrada obtenida. En efecto, la ecuación diferencial misma nos dice que:

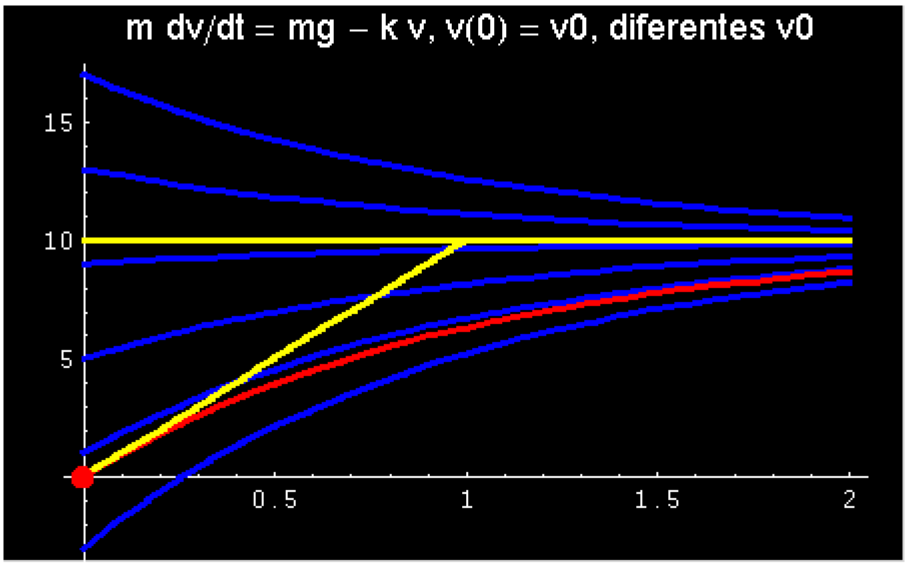
m dv/dt = mg – kv

de allí obtenemos de inmediato que si mg = k v (esto es si v = v*), se tiene dv/dt = 0, esto es que si el en algún instante el móvil se encuentra con la velocidad v*, deberá permanecer con esa velocidad (pues su aceleración es nula), de modo que v* es un estado de equilibrio, sólo alcanzable asintóticamente (¿porqué asintóticamente y no en tiempo finito?). Más aún, si v < v* es dv/dt > 0, de modo que el estado de equilibrio atrae los movimientos más lentos, mientras que si v> v*, es dv/dt <0, de modo que también atrae los movimientos más rápidos, y todo esto para cualquier condición inicial.

Finalmente podemos comparar el movimiento que analizamos con el más simple de caída libre, en el que constantemente es dv/dt = g > 0, de modo que la velocidad se incrementa linealmente con el tiempo; si representamos en un mismo gráfico ambos movimientos, el de caída libre se verá como la recta tangente al de caída en el medio viscoso (considerando velocidad inicial nula, claro).

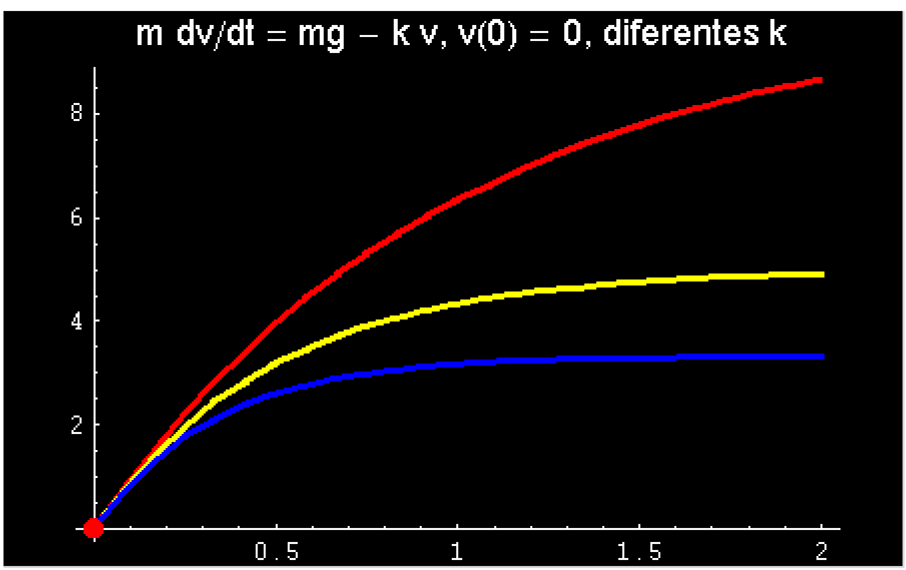
Para observar en profundidad estas consideraciones es conveniente analizar las siguientes figuras, en las que se varía algún parámetro para mostrar su influencia en la solución.

Puede verse en la figura 35 la velocidad para diferentes valores de velocidad inicial, manteniendo fijos los restantes parámetros, y apreciarse allí también el caso especial de velocidad inicial nula, donde la recta tangente en el origen tiene la pendiente g y coincide con la evolución de la velocidad en caída libre; esperamos que resulte claro que excepto una curva (¿cuál?) todas representan velocidades iniciales apuntando hacia abajo (al que asignamos signo positivo). En la curva que representa un lanzamiento hacia arriba, puede observarse que en un instante la velocidad se anula para luego invertirse y aproximar asintóticamente la velocidad v*.



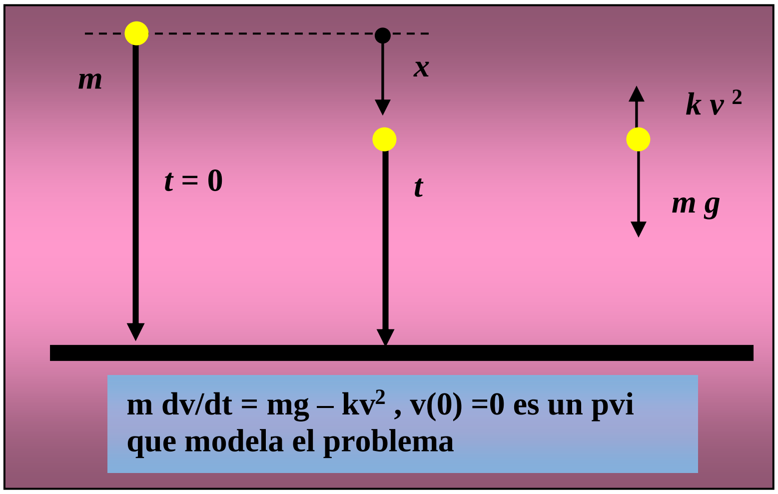
Análisis Matemático II, TP VI, Figura 34

La figura 36 muestra la caída en medios diferentes, todos con velocidad inicial nula ¿Por qué la pendiente de arranque es la misma? ¿Cuál tiene un mayor k?



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 35

En cuanto a la segunda parte de este ejercicio, la suposición ahora es la de un régimen más turbulento, en el que la viscosidad genera ahora una fuerza proporcional al cuadrado de la velocidad como se indica en la figura 37.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 36

El pvi dado por

$m\,dv/dt = mg - kv^2$, $v(0) = 0$

puede resolverse de inmediato separando variables

$$\int \frac{dv}{(mg - kv^2)} = \int \frac{dt}{m}$$

y es también preferible simplificar la escritura poniendo en función de la velocidad límite que es aquí el valor para el que se verifica $mg - kv^2 = 0$, esto es

$$v^* = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

y considerando la condición inicial resulta la solución:

$$v : [0, \infty) \to R \text{ tal que } v(t) = v^* \operatorname{tgh}\left(\frac{g\,t}{v^*}\right)$$

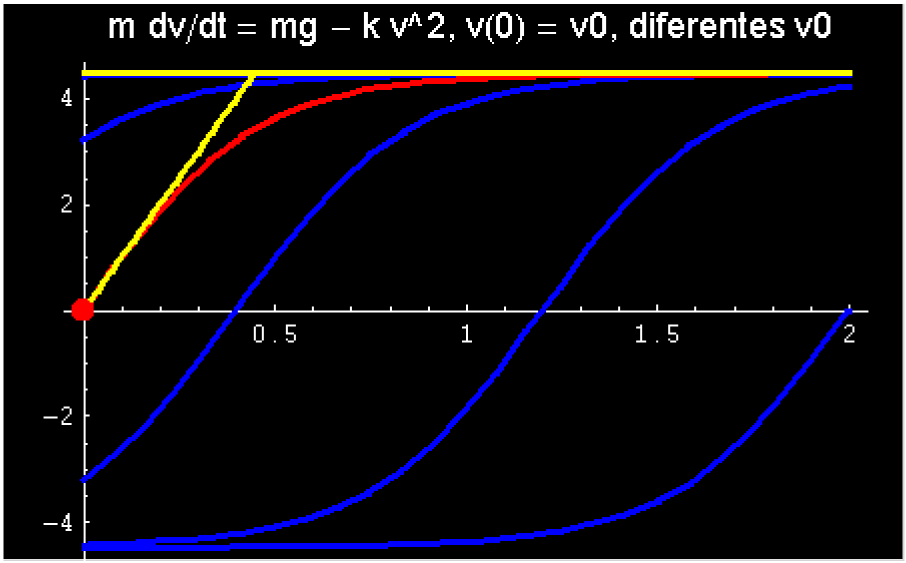
Nuevamente examinamos la expresión obtenida; en primer lugar puede observarse que la derivada de v respecto de t en el instante t = 0 es precisamente g, lo que es muy natural, ya que en el instante del lanzamiento, con velocidad nula, la fuerza de rozamiento es nula, de modo que el cuerpo está sometido solamente a la acción de la gravedad.

También observamos que se verifica

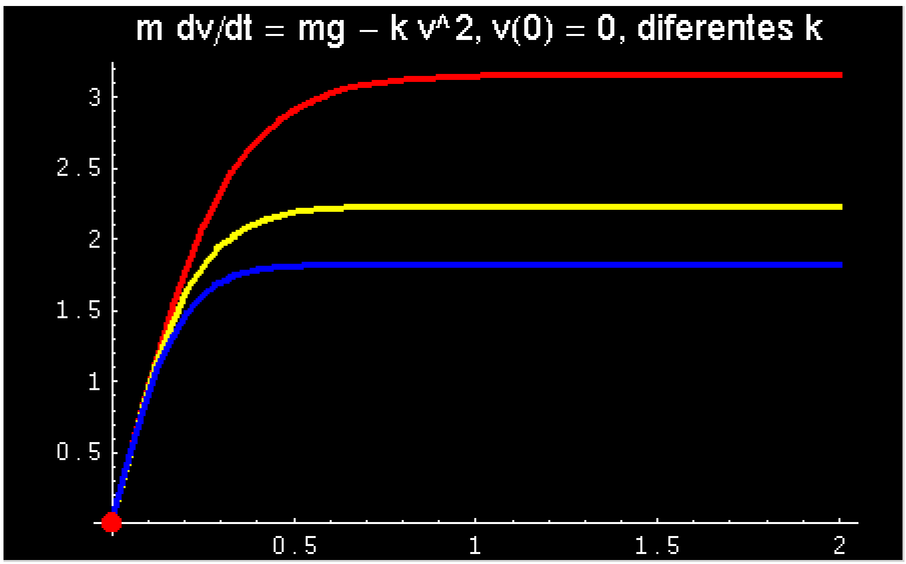
$$v(t) \xrightarrow{t \to \infty} v^*$$

Finalmente podemos comparar el movimiento que analizamos con el más simple de caída libre, en el que constantemente es $dv/dt = g > 0$, de modo que la velocidad se incrementa linealmente con el tiempo; si representamos en un mismo gráfico ambos movimientos, el de caída libre se verá como la recta tangente al de caída en el medio viscoso.

Vemos en las figuras el efecto de diversas velocidades iniciales para un mismo k (figura 38) y de diversos k para una misma (nula) velocidad inicial figura 39.

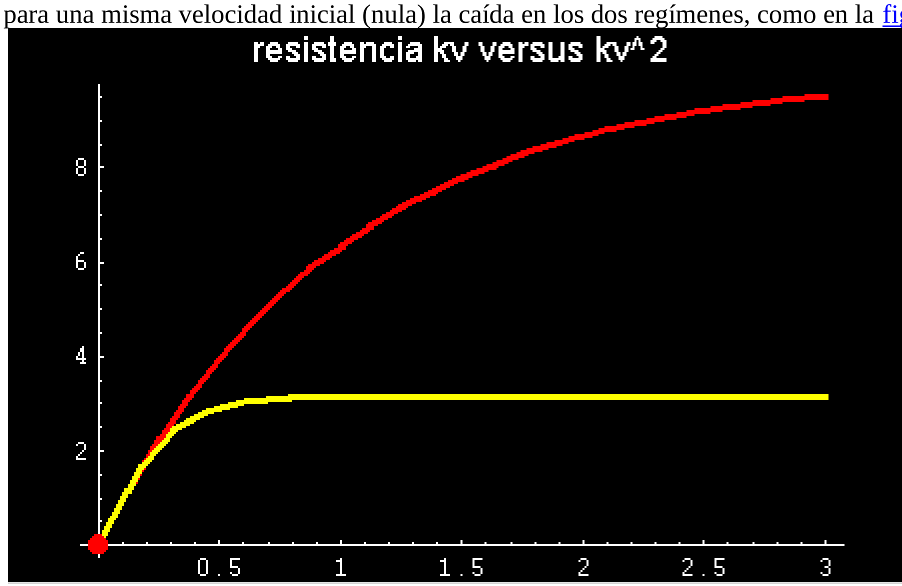


Análisis Matemático II, TP VI, Figura 37



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 38

También podemos graficar, para una misma velocidad inicial (nula) la caída en los dos regímenes, como en la figura 40 .



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 39

✍ **Observación 15**: Debe tenerse presente que estamos en este ejercicio hablando por simplicidad de la velocidad, del cuadrado de la velocidad y así siguiendo cuando en realidad deberíamos hablar de la componente del vector velocidad.

Finalmente, sugerimos prolongar este ejercicio, obteniendo para cada uno de los casos analizados la función de la posición x = x(t) y efectuar las comparaciones con la situación de caída libre y de los mismos movimientos entre sí; seguramente para las graficaciones convendrá disponer de alguna aplicación que permita con facilidad visualizar (y analizar) las diversas situaciones que puedan resultar interesantes.

Ejercicio 12

La posición de un punto que se desplaza con movimiento rectilíneo es x = x(t), siendo t el instante en que el móvil se halla en la posición x. Determine x(t) en los siguientes casos.

(a) Movimiento rectilíneo uniforme (con velocidad dx/dt = v, constante) suponiendo que $x(0) = x_0$ es dato.
(b) Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (con aceleración $d^2x/dt^2 = a$ constante), suponiendo que $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$ son datos.

Se trata aquí de obtener las conocidas ecuaciones de la cinemática; para el primero basta resolver el elemental pvi dado por

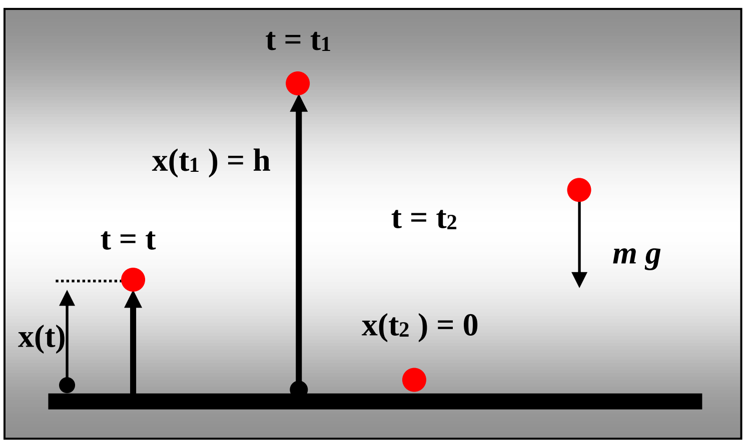
$dx/dt = v$, $x(0) = x_0$, de donde resulta $x = x_0 + vt$

Para el segundo basta resolver sucesivamente los dos pvi

$dv/dt = a$, $v(0) = v_0$, de donde resulta $v = v_0 + at$
$dx/dt = v = v_0 + at$, $x(0) = x_0$, de donde resulta $x = x_0 + v_0\, t + ½\, a\, t^2$

Ejercicio 13

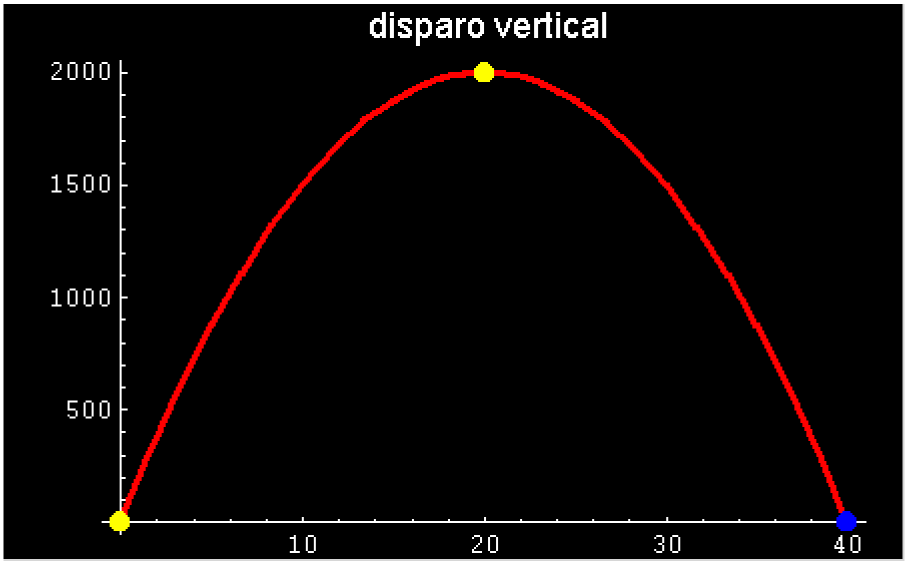
Usar el modelo del ejercicio 12 para plantear como problema de valores iniciales y resolver: ¿Cuánto tardará en volver a su punto inicial una bala que se dispara hacia arriba verticalmente con velocidad inicial $v_0 = 200$ m/s, y a qué altura llegará? (usar $g = 10$ m/s^2).



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 40

La figura 41es suficiente para ilustrar el punto, la aplicación de la segunda ley de Newton m dv/dt = – mg conduce de modo directo al modelo del ejercicio 12 y entonces tenemos que las ecuaciones del movimiento, con el eje de referencia como se indica en la figura, resultan $v = v_0 – g\, t$, $x = v_0\, t – ½\, a\, t^2$,

y entonces la altura máxima se alcanza en el instante en que $v = v_0 – g\, t = 0$, esto es $t_1 = v_0/g$, resultando entonces $x(t_1) = h = v_0^2/2g$; En cuanto al instante en t_2, resulta de resolver $v_0\, t – ½\, a\, t^2 = 0$, o también de considerar que debe ser $t_2 = 2t_1$; en cualquier caso es $t_2 = 2v_0/g$. Para nuestros valores particulares esto es $t_2 = 40$ s, h = 2000 m.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 41

Ejercicio 14

La ley de Malthus supone que la tasa (o velocidad dx/dt) de crecimiento de una población es en cada instante directamente proporcional a la cantidad p de individuos existentes.

(a) Escriba la ecuación diferencial que representa esta relación y verifique que si se tiene $x(t_0) = x_0$, resulta $x(t) = x_0 \exp[k(t-t_0)]$.

(b) Sabiendo que la población de la Tierra aumentó en promedio el 2% anual desde 1960 a 1970 (esto es k = 0. 02) y que al principio de 1965 se estimaba en 3340 millones de personas, calcule mediante este modelo en cuánto tiempo se predice la duplicación de la población (el valor observado fue de 35 años).

(c) Cuando el tamaño x de la población es demasiado grande el modelo de Malthus debe ser corregido para contemplar el hecho de que los individuos compiten por alimento, recursos naturales y espacio vital disponibles. Así surge la ley logística de crecimiento $dx/dt = a\,x - b\,x^2$ propuesta por Verhulst en 1837, donde las constantes a y b se llaman coeficientes vitales de la población. Resuelva la ecuación logística y demuestre que independientemente de la condición inicial $x(t_0) = x_0$ la población tiende al cociente a/b cuando $t \to \infty$ (observe que en el modelo lineal es divergente).

En el ejercicio 10 hemos especificado lo esencial de la teoría de Malthus, de modo que nada añadiremos a lo necesario para los ítems a. y b, bastando aquí con recordarlo; Si designamos con x a la población en el instante t, el problema de valor inicial $x(t_o) = x_o$, $dx/dt = k\,x$, se resuelve separando variables: basta escribir (siempre que $x \neq 0$) $\int \frac{dx}{x} = \int k\,dt$ y de aquí es $\ln|x| = k\,t + c$, y como $x(t_o) = x_o$, es $\ln|x_o| = k\,t_o + c$ de manera que $\ln|x/x_o| = k(t - t_o)$ resultando entonces $x: R \to R$ tal que $x(t) = x_o \exp[k(t-t_0)]$, solución válida para cualquier estado inicial $x_o \neq 0$; sin embargo, la función $x: R \to R$ tal que $x(t) = 0$ es solución del problema para $x_o = 0$, de modo que finalmente puede incluirse en la anterior expresión y así afirmar que, para todo x_o es $x: R \to R$ tal que $x(t) = x_o \exp[k(t-t_0)]$ la (única) solución del problema valor inicial

$$x : R \to R \text{ tal que } x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}$$

Por supuesto que, atendiendo a la naturaleza del problema, el dominio de validez significativa de la solución se reduce a los números naturales. ¿Cuán válido es considerar, como lo estamos haciendo, un problema discreto como continuo?

En cuanto a la parte (b), se trata de hallar el período de duplicación T_2, para lo que basta determinar el intervalo temporal $T_2 = (t-t_0)$ para el que $x(t) = 2\,x_0$, esto es resolver la ecuación

$$2x_0 = x_0 e^{k(t-t_0)} \quad \to \quad T_2 = t - t_0 = \frac{\ln 2}{k}$$

Siendo en nuestro casa la tasa de natalidad neta k = 0. 02 (anual), de la anterior resulta el período de duplicación $T_2 \cong 34.65$ años.

Observación 16: El período de duplicación en el modelo de Malthus es constante, esto es que su valor es independiente del instante en que se considere la población inicial x_0 (ni la magnitud de ésta) y resulta $T_2 = \ln 2 / k$. El valor de la población en 1965 no es un dato relevante para determinarlo.

Para el punto (c), a la suficiente información que ya proporciona el enunciado añadimos algunas consideraciones que posiblemente puedan estimarse como pertinentes.

Si bien el modelo de Malthus puede interpretar la evolución de ciertas poblaciones en condiciones ambientes sin restricciones, muy pronto se aparta de lo que en realidad sucede cuando empieza a gravitar el hecho de que las poblaciones necesitan de los recursos que obtienen del ambiente, y siendo éstos limitados, no es posible esperar una crecimiento ilimitado, que es la predicción malthusiana, que recordamos supone la explosión demográfica propia de un modelo de población no acotado ya que al poner $dx / dt = k\,x$, $x(0) = x_o$ se tiene que $dx / dt > 0$ para todo t (con $x_o > 0$ y $k > 0$, por supuesto).

Recordamos que la hipótesis que da origen al modelo de Malthus consiste en considerar en la ecuación básica de todos los modelos de población la tasas de natalidad ν (nacimiento de individuos por unidad de individuo en una unidad de tiempo) y la de mortalidad μ (muerte de individuos por unidad de individuo y por unidad de tiempo) ambas constantes.

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \nu - \mu$$

En la hipótesis de Verhulst, en cambio, la tasa neta $\nu - \mu$ resulta una función lineal decreciente con la población, para considerar los efectos de competencia por recursos vitales, siendo entonces $\nu - \mu = a - b\,x$, con a y b constantes positivas (el modelo de Malthus coincide con $b = 0$, esto es anular el término que expresa precisamente la competencia por recursos) resultando entonces el problema de valor inicial de este modelo.

$dx/dt = (a - b\,x)\,x$, $x(0) = x_o$

La ecuación es de variables separables:

$$\int \frac{dx}{(a-bx)x} = \int dt$$

lo que escrito de otra manera es

$$\int\left[\frac{1/a}{x} + \frac{b/a}{a-bx}\right]dx = \int dt$$

de allí resulta inmediato que

$$k\frac{1}{a}\ln|x| - \frac{1}{a}\ln|a-bx| = t + c$$

y entonces

$$\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a-bx}\right| = t + c$$

que con la condición inicial resulta en

$$x(t) = \frac{a}{b + (a/x_0 - b)\,e^{-at}}$$

y teniendo en cuenta que si $x_o = 0$ la función $x: R \to R$ tal que $x(t) = 0$ es solución, mientras que si $x_o = a/b$ la función $x: R \to R$ tal que $x(t) = a/b$ es también solución, puede concluirse que, si llamamos $x^* = a/b$, la solución del problema está dada por

$$x : I_{x0} \to R \text{ tal que } x(t) = \frac{x^*}{x_0 + (x^* - x_0)\, e^{-at}}\, x_0$$

Siendo el intervalo de definición I_{xo} dependiente de la población inicial x_0; para poblaciones iniciales no negativas se tiene que

$$\begin{cases} I = (\alpha, \infty) \text{ si } x_0 > x^* \\ I = R \ \text{ si } 0 \le x_0 \le x^* \end{cases} \quad \text{siendo } \alpha = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{x_0}{x_0 - x^*}\right)$$

Sugerimos analizar las expresiones anteriores; en primer lugar, puede observarse que para cualquier población inicial $x_0 \neq 0$ se verifica

$$x(t) \xrightarrow{t \to +\infty} x^*$$

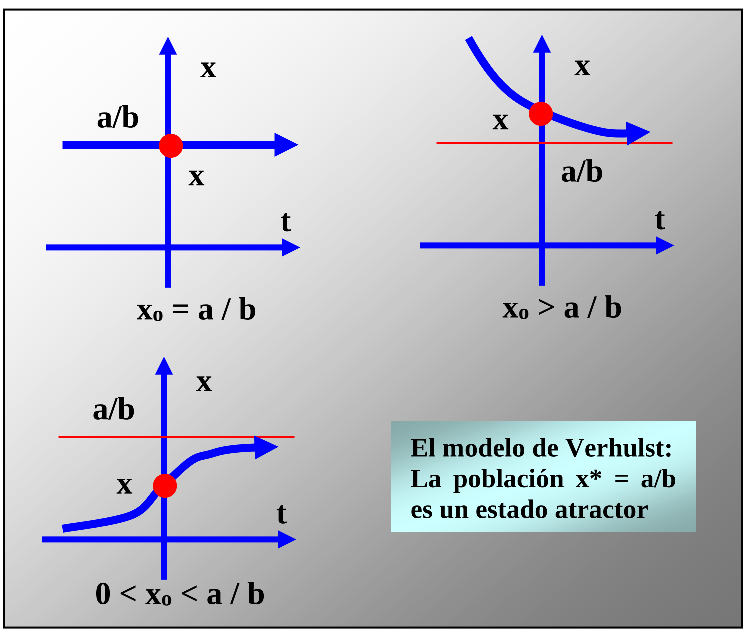
mientras que sólo para poblaciones iniciales x_0 tales que $0 \le x_0 < x^*$ se verifica

$$x(t) \xrightarrow{t \to -\infty} 0$$

y también que para poblaciones iniciales x_0 tales que $x_0 > x^*$ se tiene

$$x(t) \xrightarrow{t \to \alpha^+} +\infty$$

La observación anterior indica que el modelo no conduce a una solución acotada en el intervalo (α, ∞), pero esto no resulta significativo cuando se considera, nuevamente, el referente empírico (poblaciones), ya que para todo $x_0 > x^*$ se tiene que $\alpha < 0$ (¿puede probarlo?). Las características esenciales de las curvas (curvas llamadas logísticas) solución se muestran en la figura 43 , donde se señala siempre el valor $x^* = a/b$ de referencia. Sólo se presentan los casos con población inicial x_0 positiva.

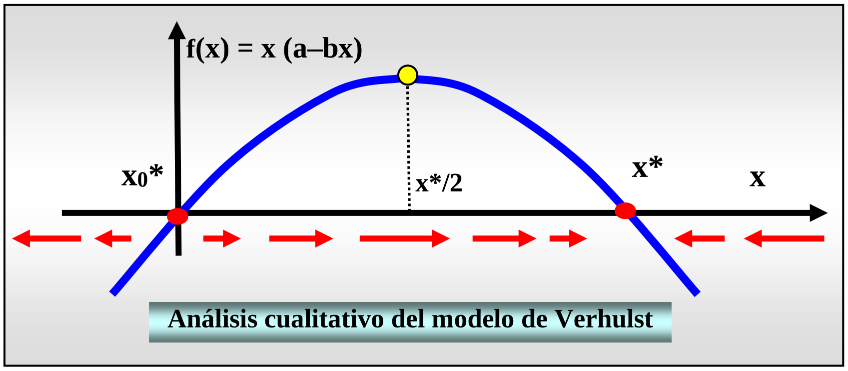


Análisis Matemático II, TP VI, Figura 42

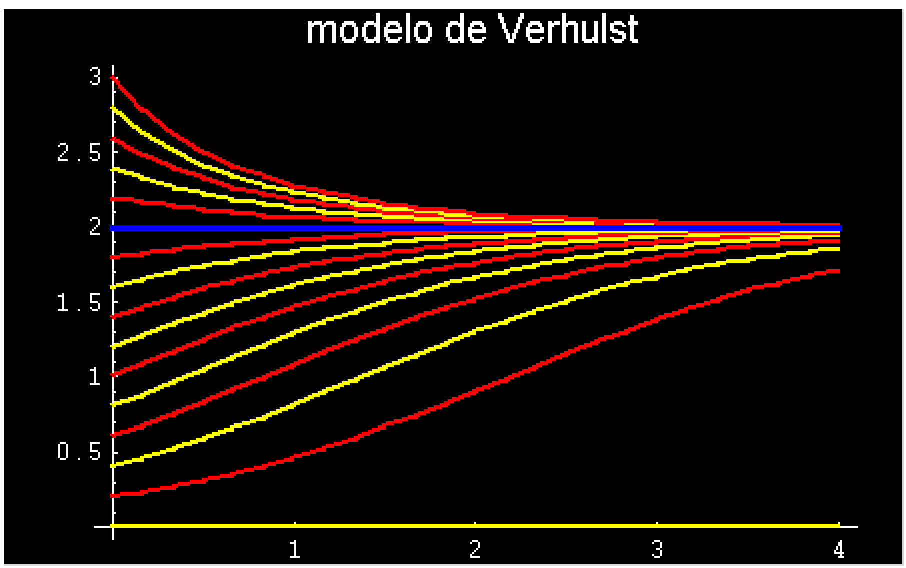
Queremos repetir lo ya dicho, en un leguaje ligeramente distinto; el modelo de Verhulst pertenece a los del tipo de población acotada, con la población tendiendo a un valor límite asintóticamente que es en este caso el cociente a/b; se observa en la figura, que poblaciones por debajo de la límite crecen hacia ella, en tanto que superiores a a/b decrecen hacia ella y si por caso es $x_o = a/b$ la población se mantiene constante, esto es $x^* = a/b$ es un punto de equilibrio del modelo poblacional de Verhulst; otro punto de equilibrio es, naturalmente, $x_0^* = 0$ (lo que por otra parte suena 'razonable': de no haber población en un instante en un sistema cerrado, la ausencia de población se mantendrá, a menos que se introduzca una creación *ex nihilo*).

También aquí un análisis directo que no pasa por la solución de la ecuación diferencial, sino que se efectúa a partir de la ecuación diferencial misma permite predecir el comportamiento de las soluciones, puesto que dx/dt se anula en $x^* = a/b$ y en $x_0^* = 0$; desde esta interpretación, la variable x (llamada estado o fase) es creciente para cualquier estado inicial x_0 tal que $0 < x_o < x^*$, en tanto que es decreciente para cualquier inicial x_0 tal que $x_o > x^*$, lo que puede resumirse en la figura 16, donde se representa en ordenadas la derivada dx/dt dada por la función f(x) = x (a – b x) y en abscisas el mismo estado x.

En un tal diagrama, se advierten de inmediato los equilibrios del sistema como las raíces de la función f(x) que se han señalado en la figura 44 con un círculo rojo; al mismo tiempo se señala con flechas del mismo color, sobre el eje de los estados, la evolución de la variable x. La información proporcionada por la figura 44 caracteriza completamente el comportamiento cualitativo de la ecuación diferencial para diferentes condiciones iniciales. Es a Poincaré y Lyapunov a quienes se debe originalmente esta perspectiva de las ecuaciones diferenciales.



Si el lector analiza en profundidad la figura anterior, puede apreciar que la máxima velocidad de crecimiento se obtiene en x*/2, (esto es donde dx/dt es máxima) y por lo tanto la curva logística presentará en el punto de abscisa x*/2 un punto de inflexión (pues se tendrá allí $d^2x/dt^2 = 0$, con dx/dt > 0 en un entorno de x*/2); sugerimos analizar otras características de esta figura confrontándola con las de la figura 43, hasta que finalmente pueda verse todo con claridad como una unidad coherente.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 44

El modelo anterior ajusta satisfactoriamente el crecimiento con recursos restringidos de poblaciones humanas, bacterias, protozoarios; recordando el concepto de modelo, no debe extrañar que sea también representativo de la propagación de una epidemia, de la difusión de información y muchos otros fenómenos que hallan en el lenguaje de la misma ecuación diferencial, su modelo.

Para mencionar otro modelo de población modelo de Gompertz., que conduce a problema de valor inicial como el siguiente, con a y b positivas.

$dx/dt = (a – b \ln x)\, x, \;\; x(0) = x_o$

Ejercicio 15

Considerando la segunda ley de Newton, si el movimiento de un punto material con masa *m* se produce en un medio que le opone una resistencia del tipo $\alpha v + \beta v^n$, donde v es la velocidad, debe cumplirse que $-\alpha v - \beta v^n = m\, dv/dt$, es decir

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m} v = -\frac{\beta}{m} v^n$$

Considerando n = 2, *m* =2 Kg, a = 2 Kg/s, b = 4Kg/m y que en el instante t = 0 la velocidad inicial es v_0 = 20 m/s, determine y grafique el comportamiento de la velocidad en función del tiempo.

Nota: en general, la ecuación del tipo

$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n$ (con n > 1)
se denomina ecuación de Bernoulli; esta ecuación se reduce a una del tipo lineal mediante la transformación $z = y^{1-n}$ (demuéstrelo).

Comenzamos comentando la Nota; aunque se ha restringido a n>1, seguramente considerando la naturaleza del referente empírico del problema, conviene aclarar que en la reducción de la ecuación anterior a una lineal, no hay necesidad de exigirlo; en efecto:

Una ecuación no lineal, conocida como ecuación de Bernoulli, en un intervalo I, con funciones p, q $\in C^1(I)$ tiene la forma de la expresión siendo n constante;

$dy/dx + p(x)\, y = q(x)\, y^n$

Si n = 1, es claro que se rescribe como $dy/dx = (q(x)- p(x))y$, resultando una ecuación de variables separables, mientras que si n = 0 es claro que se tiene la ecuación lineal no homogénea resuelta en ejercicio 05, expresión [3] que aquí reproducimos:

$dy/dx + p(x)\, y = q(x) \rightarrow y(x) = c\exp(-P(x)) + \exp(-P(x)\int \exp(P(x))\, q(x)\, dx$, con $P(x) = \int p(x)\, dx$
Si entonces estudiamos la ecuación diferencial para valores de n distintos de 1 es:

$y^{-n}\, dy/dx + p(x)\, y^{1-n} = q(x)$

y si ahora hacemos $z = y^{1-n}$, y entonces $dz/dx = (1-n)\, y^{-n}\, dy/dx$, de modo que reemplazando en la anterior resulta la ecuación, ahora lineal:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)\, z = q(x)$$

Resuelta esta ecuación, se recupera la función original incógnita $y = z^{1/(1-n)}$, eventualmente añadiendo la solución $z = 0_f$ si corresponde (esto es si n > 0).

En cuanto al problema que nos ocupa, donde en particular las funciones p, q son constantes, esto es que en este caso tenemos llamando $a = \alpha/m$, $b = \beta/m$, n = 2, la ecuación dada por

$dv/dt = -(a + b\, v)\, v$, $v(0) = v_o$

La ecuación es de variables separables (también es de Bernoulli):

$$-\int \frac{dv}{(a+bv)v} = \int dt$$

lo que escrito de otra manera es

$$-\int \left[\frac{1/a}{v} - \frac{b/a}{a+bv}\right] dv = -\int dt$$

de allí resulta inmediato que

$$-\frac{1}{a}\ln|v| + \frac{1}{a}\ln|a+bv| = t + c$$

y entonces

$$\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+bv}{v}\right| = t + c$$

que con la condición inicial, resulta en

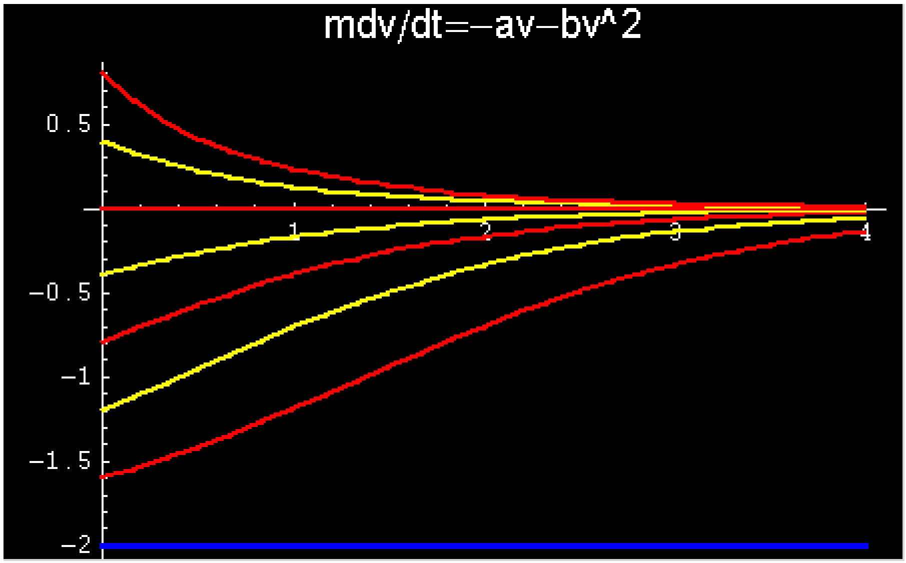
$$v(t) = \frac{a}{-b + (a/v_0 + b)\,e^{at}}$$

y teniendo en cuenta que si x_o =0 la función v: R → R tal que v(t) = 0 es solución, mientras que si v_o = –a/b la función v: R → R tal que v(t) = –a/b es también solución, puede concluirse que, si llamamos v* = –a/b, la solución del problema está dada por

$$v : I_{v0} \rightarrow R \text{ tal que } v(t) = \frac{v^*}{v_0 + (v^* - v_0)\,e^{at}}\, v_0$$

Siendo el intervalo de definición I_{vo} dependiente de la velocidad inicial v_0; para los datos de nuestro problema en particular tenemos que

$$v : (\ln\frac{10}{11}, \infty) \rightarrow R \text{ tal que } v(t) = \frac{20}{10 - 11e^{t}}$$



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 45

La observación de la figura 46 y el análisis de la ecuación diferencial nos muestra que aquí el estado $x_0^* = 0$ es un atractor, mientras que el $x^* = -\,b/\,a$ es un repulsor.

Ejercicio 16

Halle una expresión para la familia de líneas de campo en los siguientes casos.

(a) $$\bar{f}(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$$

(b) $$\bar{f}(x,y) = \left(\frac{1}{2x-y}, \frac{1}{x}\right)$$

(c) $$\bar{f}(x,y) = (x^2, y^2)$$

(d) $\bar{f}(x, y, z) = (x, y^2, z)$

(e) $\bar{f}(x, y) = (2x - y, y)$

(f) $\bar{f}(x, y) = (x^2, x y)$

(g) $\bar{f}(\bar{x}) = \dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|^3}$ con $\bar{x} \neq (0, 0)$

Los campos vectoriales que se presentan en este ejercicio son todos de clase C^1 en su dominio y por lo tanto satisfacen las hipótesis que necesitaremos para introducir algunos términos que convendremos en adoptar aquí, advirtiendo que no son empleados del mismo modo por los autores; supondremos en lo que sigue tal condición satisfecha.

Si f es un campo vectorial $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ definido en los puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de su dominio la ecuación diferencial (vectorial)

$dx/dt = f(x)$

equivale a un sistema de n ecuaciones diferenciales del tipo:

$dx_i/dt = fi(x)$

Decimos que una función vectorial $x: I \to R$ es una solución de la ecuación diferencial sii para todo punto t del intervalo I se verifica

$dx(t)/dt = f(x(t))$

Para precisarlo más, la aplicación $t \to (t, x(t))$ tiene como imagen un conjunto de puntos en el espacio (1+ n) dimensional, y aquí nos interesa decir que *también* la solución describe un conjunto de puntos en el espacio n dimensional (llamado espacio de las fases de la ecuación diferencial): las líneas de campo (u órbitas, en el lenguaje de los sistemas dinámicos). La expresión anterior muestra con claridad, por otra parte, que las rectas tangentes a las órbitas son paralelas al vector f en cada uno de sus puntos no críticos (son críticos los puntos x* en que se anula f, pues allí es claro que el sistema tiene un punto de equilibrio, y por lo tanto la órbita se reduce a un punto: el punto de equilibrio x*, precisamente)

Consideramos que previamente al ejercicio puede resultar útil el ejemplo más sencillo; sea por caso determinar las líneas de campo de f(x, y) = (x, y), las que según lo dicho consisten en las órbitas de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

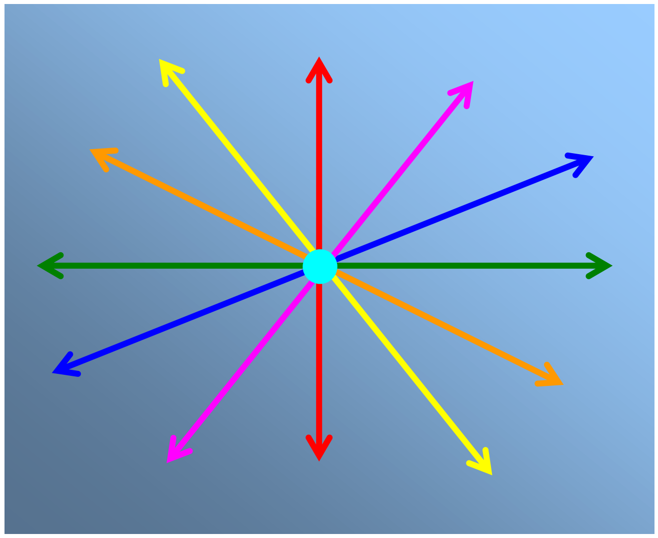
$$\begin{cases} dx/dt = x \\ dy/dt = y \end{cases}$$

En lugar de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (aquí muy sencillo por estar desacopladas), recordar la derivación paramétrica para escribir la ecuación diferencial

$dy/dx = y/x$

cuyas curvas integrales son el haz de rectas que pasa por el origen $y = k x$, que son las líneas de campo (debiera ser claro que las líneas de campo no podían sino resultar de este modo, atendiendo la definición)

¿Qué sucede en el punto (0, 0)? Sucede que el punto mismo es una órbita, pues es la imagen de la solución del sistema que verifica la condición inicial $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ y que es, claro $t \to (0, 0)$. Así dicho, en realidad una recta cualquiera del haz, digamos por ejemplo $y = 2x$, es un compuesto de tres órbitas: el segmento $y = 2x$ con $x > 0$, el segmento $y = 2x$ con $x < 0$, el punto (0, 0). Las líneas de campo se ven como en la figura 47.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 46

Con frecuencia se aprovecha la consecuencia las definiciones y se escribe muy sucintamente a los efectos del procedimiento en sí de obtención de las líneas de campo como las curvas integrales de la ecuación diferencial dada por $dx/P = dy/Q$ o

$dy/dx = Q/ P$, para el campo vectorial $f = (P, Q)$

o bien en el caso de campos escalares $f = (P, Q, R)$, las ecuaciones diferenciales

$dx/P = dy/Q = dz/R$

En cualquier caso, debe tenerse a mano siempre lo que la misma definición de las líneas de campo expresa. Si la definición está considerada como la órbita, se tiene entonces ya una curva orientada, y atendiendo a esto es que se incluye una flecha indicando tal orientación, como se ha hecho en la figura 47. ¿Es claro que una línea de campo no puede tener más de una orientación? ¿Por qué no podría invertir su marcha una línea de campo? ¿La invierte en la figura 47? ¿Por cada punto del dominio de f pasa una línea de campo? ¿Puede pasar por un punto del dominio de f más de una línea de campo? Contestar estas preguntas seguramente ayudará a la comprensión del concepto.

Una interpretación que resulta de ayuda para imaginar las líneas de campo consiste en admitir que el campo f es un campo de velocidades (y como en él no hemos incluido el tiempo t, estacionario), en cuyo caso la línea de campo que pasa por un punto P_0 no es sino la trayectoria que sigue una partícula librada en este campo en el punto P_0.

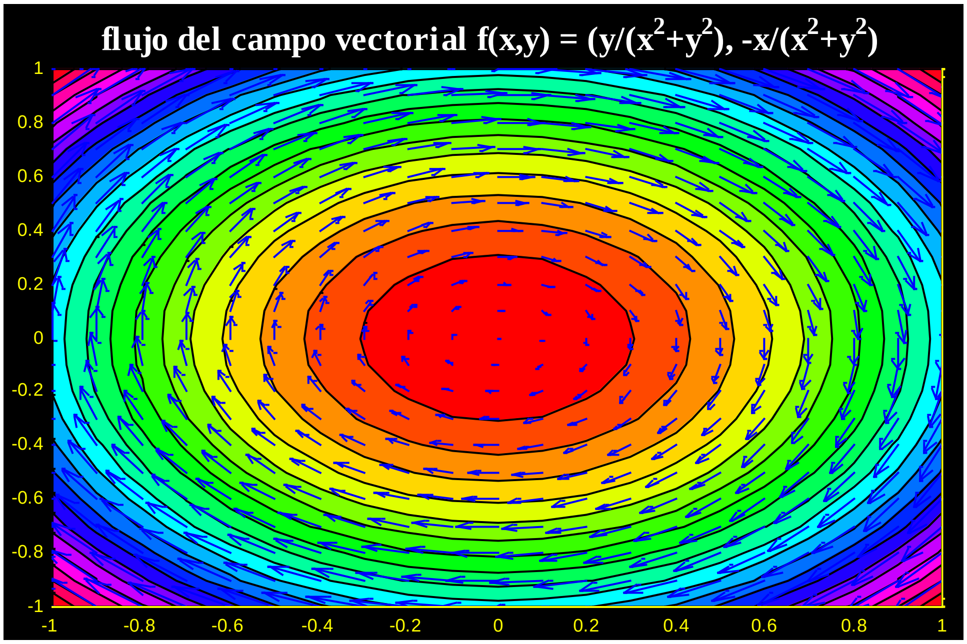
Una observación final, algo más delicada: si $x(t, P_0)$ es la solución de la ecuación diferencial vectorial que pasa por P_0, también debe ser solución la función $x (t + \alpha, P_0)$. ¿Puede contestar por qué, tanto en términos analíticos de la ecuación diferencial como en su interpretación del recorridote una partícula en régimen estacionario?

(a) $$\bar{f}(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$$

Con las justificaciones ya establecidas, basta resolver la ecuación diferencial

$dy/dx = –x/y$

con solución la familia de circunferencias centradas en el origen de ecuación dada por $x^2 + y^2 = k^2$; observar la orientación el figura 48.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 47

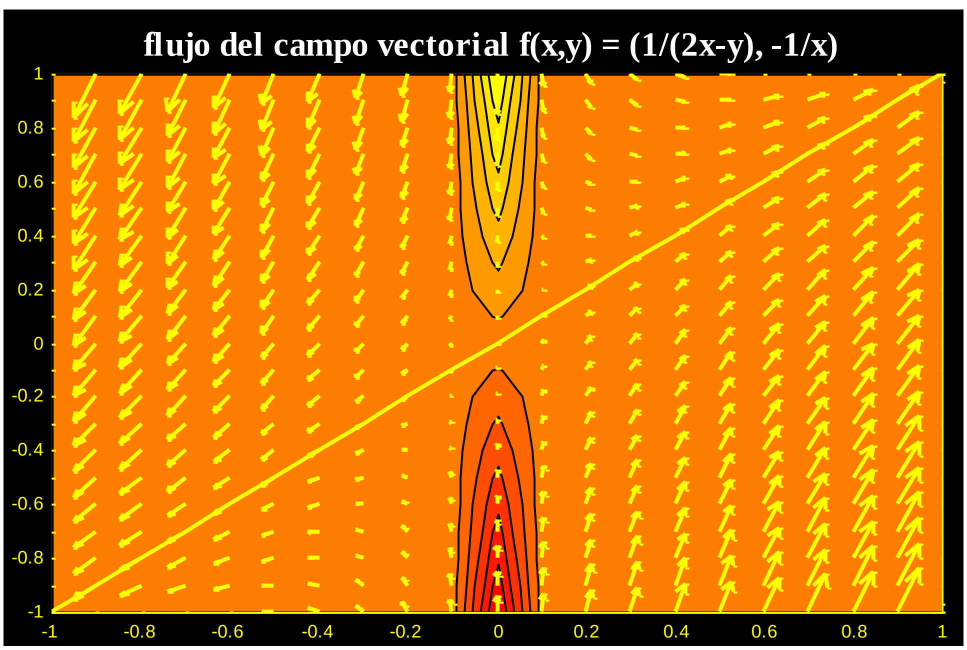
(b) $$\bar{f}(x,y) = \left(\frac{1}{2x-y}, \frac{1}{x}\right)$$

Ahora es dy/dx = (2 x –y)/x = 2 – y/x que es una ecuación diferencial homogénea que puede resolverse mediante y = x u, y' = x u' + u = 2 – u, esto es la ecuación

x u' = 2 (1–u), ecuación diferencial de variables separables, y para u ≠ 1:

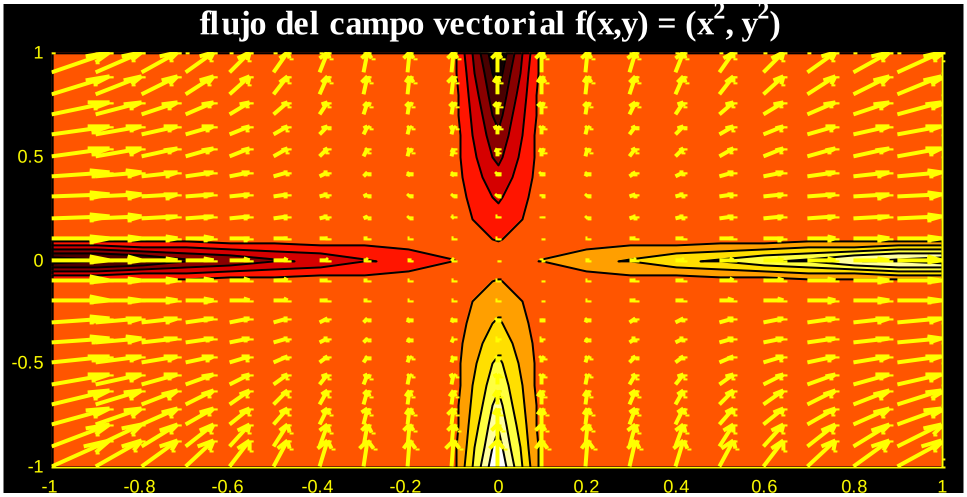
$$\int \frac{du}{u-1} = 2\int dx$$

Considerando además que para u = 1 es y = x una solución de la ecuación diferencial como se explicara en el ejercicio 05, las líneas de campo tienen por ecuación la familia de curvas, para todo k∈R: y = x ± k /x



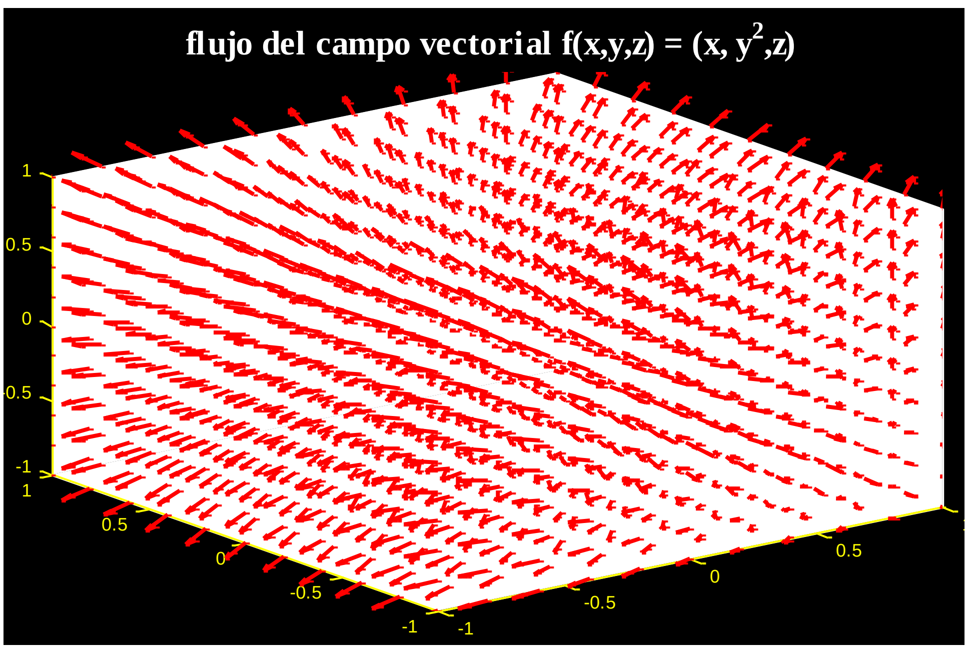
Análisis Matemático II, TP VI, Figura 48

(c) $\bar{f}(x, y) = (x^2, y^2) \rightarrow$ resulta la familia y = x/ (1+kx)



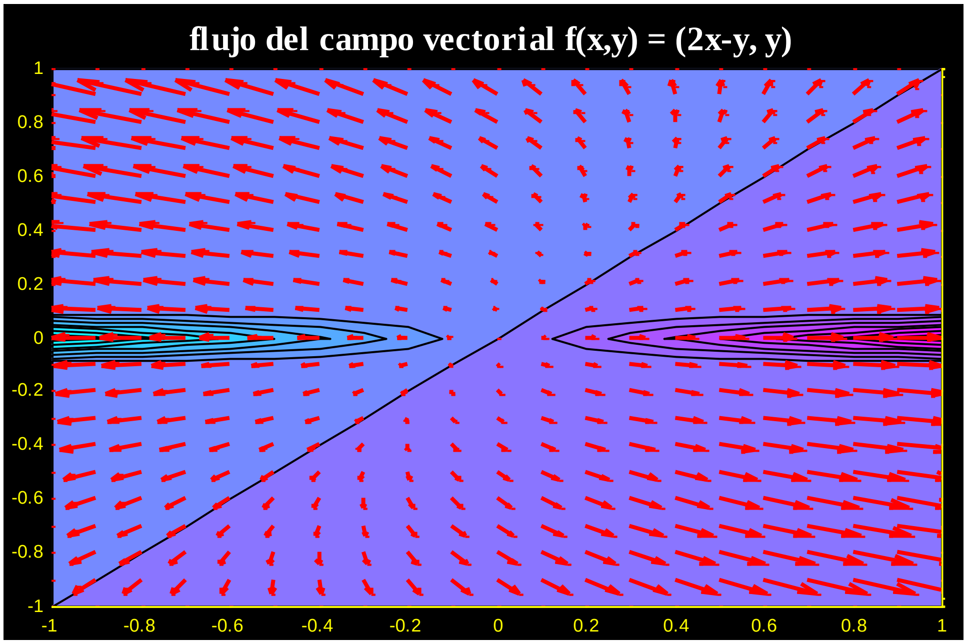
Análisis Matemático II, TP VI, Figura 49

(d) $\bar{f}(x, y, z) = (x, y^2, z)$



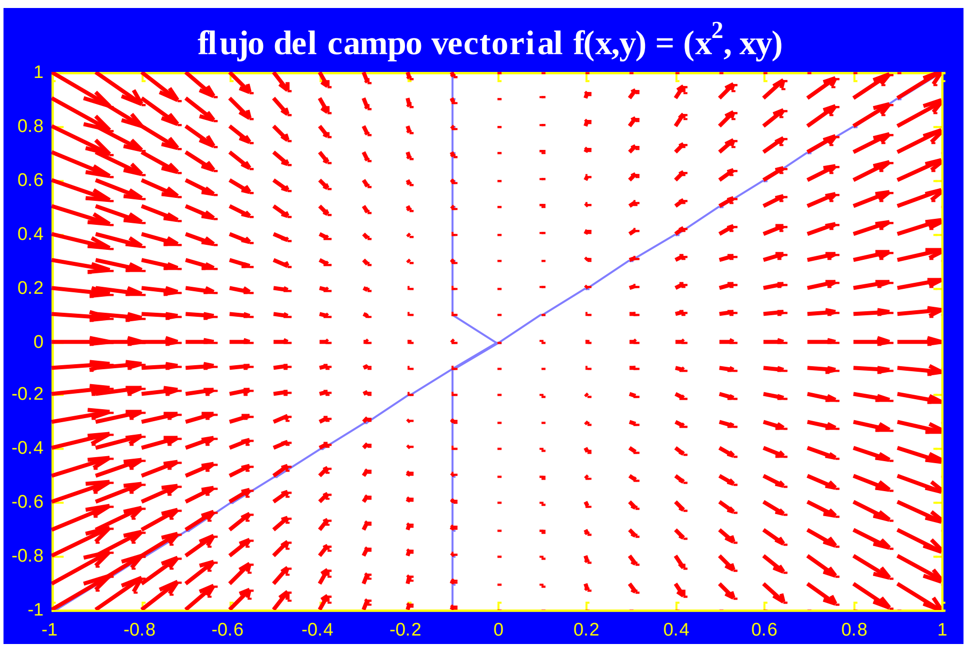
Análisis Matemático II, TP VI, Figura 50

(e) $\bar{f}(x, y) = (2x - y, y)$ resulta $\rightarrow$ $x = y - k\,y^2$, $k \in R$ (y además y = 0).



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 51

(f) $\bar{f}(x, y) = (x^2, x\,y)$ $\to$ resultan las rectas $y = k\,x$, $k \in R$ (y además $x = 0$)



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 52

(g) $\bar{f}(\bar{x}) = \dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|^3}$ con $\bar{x} \neq (0,0,0)$ $\to$ El haz de rectas que pasa por (0, 0, 0).

Ejercicio 17

Resolver

(a) Una mariposa sin peso está posada en el punto (½, 0, –1/3) (en metros) y se deja llevar por el viento, que pasa por cada punto (x, y, z) con velocidad v = (z, x, 0) (en metros sobre segundo). Hallar y dibujar aproximadamente la trayectoria de la mariposa.

(b) La corriente en cada punto (x, y) de la superficie de un canal descripto por 0 < y < 2 (y en metros) está dada por v(x, y) = (y^2 +1, 2 x y). Si un pato nada perpendicularmente a la corriente, y parte del punto (1, 2) ¿en qué punto alcanza la otra orilla?

En el caso (a) necesitamos la función vectorial γ: I $\to$ R^3 tal que γ'(t) = v(γ(t)), con la condición inicial γ(0) = (½, 0, –1/3) esto es que satisfaga el sistema de ecuaciones diferenciales inmediato:

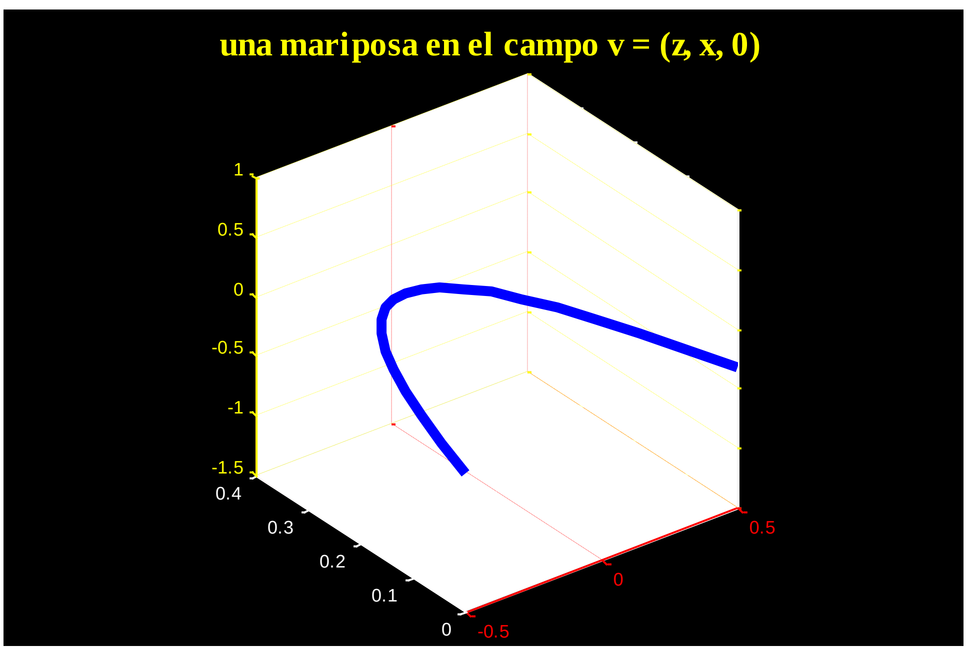
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z \\ \dfrac{dy}{dt} = x \\ \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$$

La última ecuación (y la condición inicial) resulta en z(t) = –1/3, que reemplazado en la primera permite obtener x(t) = (–2 t + 3)/6, y finalmente reemplazando en la segunda es y(t) = (–t^2 + 3t)/6, de modo que la función que resuelve el problema de valor inicial es

$$\gamma : [0, \infty) \to R^3 \text{ tal que } \gamma(t) = \frac{1}{6}\left(-2t + 3, -t^2 + 3t, -2\right)$$

El conjunto que contiene a la curva imagen de la función anterior puede obtenerse eliminando t, resultando la curva plana dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}(x^2 - \dfrac{1}{4}) \\ z = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 53

En cuanto al punto (b), dado que el pato nada según el campo ortogonal a v dado por la expresión u(x, y) = (2 x y, – (y^2+1)), el problema de valor inicial resulta

dy/dx = –(y^2+1)/ 2xy, y(1) = 2

Su resolución es inmediata (variables separables) resultando que la trayectoria del pato se halla en la curva de ecuación x (y^2+1) = 5, de donde es inmediata la respuesta, dado que si y = 0 (el pato llega a la orilla opuesta) es x = 5. ¿Podría contestar qué tiempo le lleva al bicho este recorrido?

= (10–x, y +1) un campo de velocidades. Los centros de dos móviles circulares de radio 1 se mueven según ese campo
para cada uno de ellos, la velocidad al pasar por un punto (x, y) es v(x, y)), partiendo simultáneamente de P_1 (10, 2) y P_2 = (20, 2.1).

(a) Calcular la distancia entre los centros de los móviles en función del tiempo t.

(b) Hallar la mínima distancia entre los centros ¿Chocan entre los móviles?

Necesitamos las funciones vectoriales γ_1: $[0, \infty) \to R^2$, γ_2: $[0, \infty) \to R^2$ tales que para cualquiera de ellas se tenga $\gamma_i'(t) = v(\gamma_i(t))$, con la condición inicial $\gamma_1(0) = P_1$ mientras que $\gamma_2(0) = P_2$; así, ambas deben satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10 - x \\ \dfrac{dy}{dt} = y + 1 \end{cases}$$

Considerando las condiciones iniciales es inmediato obtener las funciones:

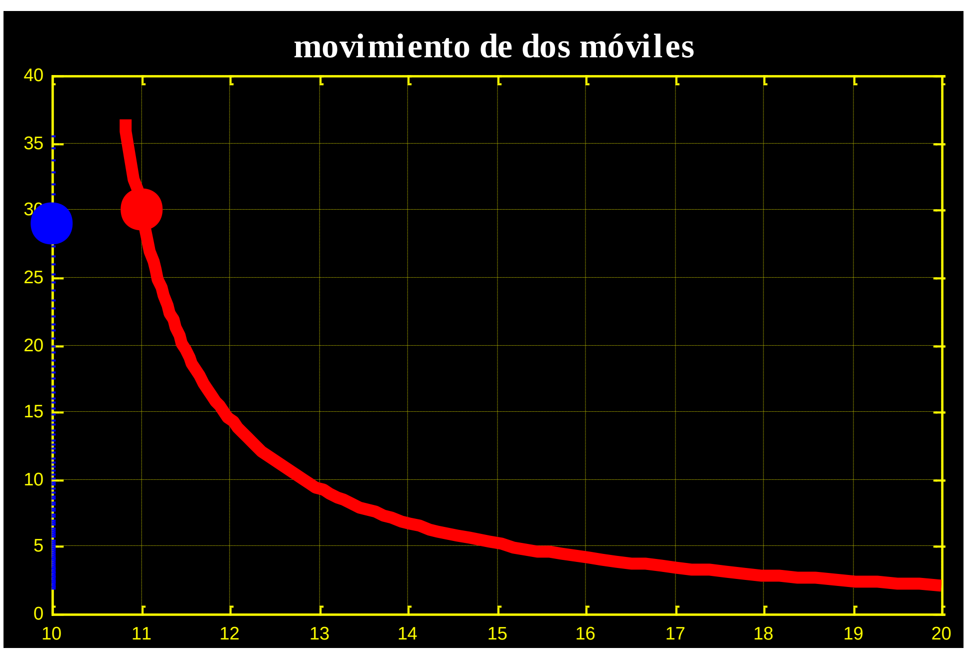
$$\gamma_1 : [0, \infty) \to R^2 \text{ tal que } \gamma_1(t) = \left(10,\ -1 + 3\,e^t\right)$$
$$\gamma_2 : [0, \infty) \to R^2 \text{ tal que } \gamma_1(t) = \left(10 + 10\,e^{-t},\ -1 + 3.1\,e^t\right)$$

La función escalar que no da la distancia entre ambos centros es f: $R \to R_0^+$ tal que

$$f(t) = \| \gamma_2(t) - \gamma_1(t) \| = \sqrt{100\,e^{-2t} + 0.01\,e^{2t}}$$

La distancia mínima la podemos obtener de modo inmediato anulando la derivada del radicando (por ser alcanzar la raíz y el radicando su mínimo simultáneamente), esto es hallamos el instante t_1 para el cual se verifica que

$-200\ e^{-2t} + 0.\ 02\ e^{2t} = 0$ de donde se tiene que t_1 es tal que $e^{t1} = 10$De lo anterior tenemos que en ese instante los móviles se hallan en las posiciones más próximas entre sí, $\gamma_1(t_1) = (10, 29)$ mientras que $\gamma_2(t_1) = (11, 30)$ de modo que entre tales centros la distancia es $f(t_1) = \sqrt{2}$; si por definición de choque entendemos que comparten al menos un punto en un mismo instante diremos que sí chocan.



Análisis Matemático II, TP VI, Figura 54