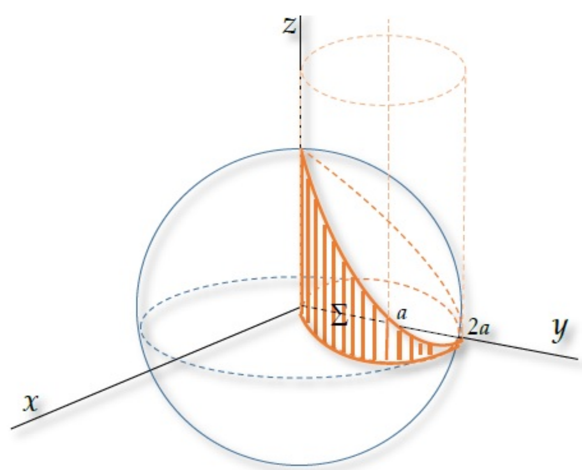
Observe que todas las respuestas están **debidamente justificadas**.
No se muestran cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.
En la resolución de integrales, si las hubiera, mostramos cada paso de integración indicando la primitiva y los límites correspondientes.

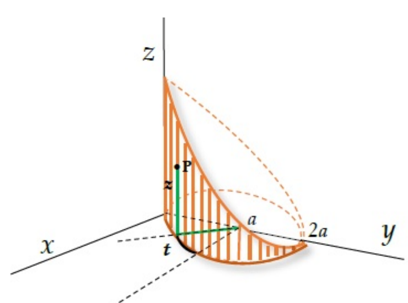
1. Calcule el área de las siguientes superficies:

   c) Σ : trozo de superfcie cilíndrica de ecuación $x^2 + y^2 = 2ay$ interior a la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ en el $1^{er.}$ octante, con $a > 0$.

La ecuación $x^2 + y^2 = 2ay$, que puede escribirse $x^2 + (y - a)^2 = a^2$, corresponde a un cilindro circular de radio a cuyo eje es la recta vertical definida por $x = 0, y = a$.
La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ representa el interior de una esfera de radio $2a$ centrada en $\overrightarrow{0}$.
En el siguiente gráfico se observa el área a calcular:



- Una forma de calcularla es utilizando una parametrización de la superficie.



Para determinar unívocamente la posición de cada punto P de la superficie Σ basta con indicar el ángulo de giro t (en el plano xy, alrededor del punto $(0, a)$) y la altura z.

Silvia Seminara

A partir de la ecuación $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ se definen $x = a\cos(t), y - a = a\,\mathrm{sen}(t)$, y todos los valores de x e y involucrados se recorren para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
El valor de la altura z varía entre 0 y el valor de la coordenada z de la superfice esférica:

$$z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{4a^2 - 2ay} = \sqrt{2a^2 - 2a^2\,\mathrm{sen}(t)} = \sqrt{2}a\sqrt{1 - \mathrm{sen}(t)}$$

donde se tuvo en cuenta que, sobre el cilindro, es $x^2 + y^2 = 2ay$.
La parametrización resulta, entonces,

$$\Sigma : \overrightarrow{\Gamma}(t, z) = (a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t) + a, z),$$

con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y $0 \leq z \leq \sqrt{2}a\sqrt{1 - \mathrm{sen}(t)}$.
El producto vectorial fundamental es

$$\overrightarrow{\Gamma}'_t \times \overrightarrow{\Gamma}'_z = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -a\,\mathrm{sen}(t) & a\cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t), 0),$$

por lo que el elemento de área es

$$d\sigma = ||\overrightarrow{\Gamma}'_t \times \overrightarrow{\Gamma}'_z||\ dtdz = a\ dtdz$$

y el área buscada

$$\acute{A}rea(\Sigma) = \iint\limits_{\Sigma} d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^{\sqrt{2}a\sqrt{1-\mathrm{sen}(t)}} a\ dz = \sqrt{2}a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \mathrm{sen}(t)}dt.$$

Para resolver esta integral utilizamos un cambio de variables:

$$u = \mathrm{sen}(t),$$

$$du = \cos(t)dt.$$

Como $\cos(t) \geq 0$ para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, resulta $cos(t) = \sqrt{1 - u^2}$, por lo que

$$dt = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

y entonces

$$\int \sqrt{1 - \mathrm{sen}(t)}dt = \int \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-u^2}}du = \int \frac{1}{\sqrt{1+u}}du = 2\sqrt{1+u} = 2\sqrt{1 + sen(t)}.$$

Finalmente,

$$\acute{A}rea(\Sigma) = \iint\limits_{\Sigma} d\sigma = 2\sqrt{2}a^2\sqrt{1 + sen(t)}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4a^2.$$

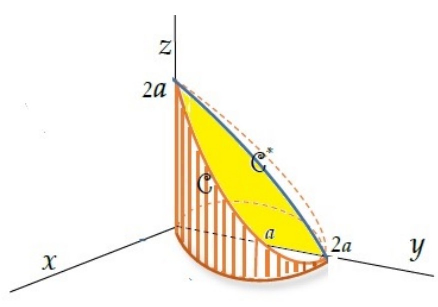
- Otra forma de calcular el área solicitada es utilizando la expresión implícita de la superficie e integrando el elemento de área sobre la proyección de la superficie en el plano yz (observar que la proyección sobre el plano xy es un arco de circunferencia, de modo que no permite "recuperar" la superfice utilizando variables x e y, y en el plano xz se superponen las proyecciones de dos porciones de la superficie).
  Es $\Sigma : x^2 + y^2 - 2ay = 0$. Llamando $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2ay$, el elemento de área puede calcularse mediante

$$d\overrightarrow{\sigma} = \frac{\overrightarrow{\nabla} F(x,y,z)}{F'_x(x,y,z)} dydz = \frac{(2x, 2y - 2a, 0)}{2x} dydz$$

$$d\sigma = ||d\overrightarrow{\sigma}|| = ||(1, \frac{y-a}{x}, 0)||dydz = \sqrt{1 + \frac{(y-a)^2}{x^2}} dydz = \sqrt{\frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2}} dydz$$

Luego

$$d\sigma = \frac{a}{\sqrt{2ay - y^2}} dydz.$$



La proyección de Σ sobre el plano yz está delimitada por los ejes coordenados y por la proyección $\mathcal{C}^*$ de la curva $\mathcal{C}$, intersección entre la esfera y el cilindro:

$$\mathcal{C} = \begin{cases} x^2 + y^2 &= 2ay \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4a^2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 &= 2ay \\ 2ay + z^2 &= 4a^2 \end{cases}$$

Entonces,

$$\mathcal{C}^* = \begin{cases} x &= 0 \\ 2ay + z^2 &= 4a^2 \end{cases}$$

de donde $|z| = \sqrt{4a^2 - 2ay}$ y, puesto que $z \geq 0$, resulta $z = \sqrt{4a^2 - 2ay}$ sobre el borde de la proyección.
El área pedida es

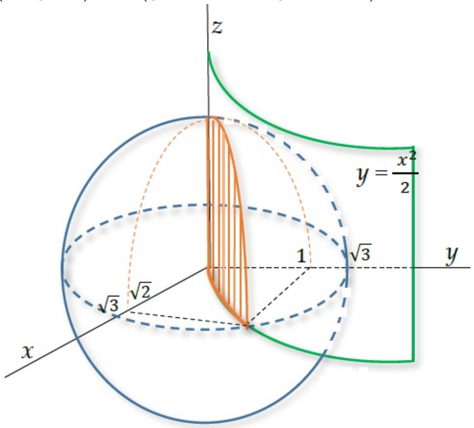
$$\acute{A}rea(\Sigma) = \iint_{\Sigma} d\sigma = \int_0^{2a} dy \int_0^{\sqrt{4a^2-2ay}} \frac{a\ dz}{\sqrt{2ay - y^2}} = a \int_0^{2a} \sqrt{\frac{4a^2 - 2ay}{2ay - y^2}} dy$$

$$= a \int_0^{2a} \sqrt{\frac{2a}{y}} dy = a\sqrt{2a} \int_0^{2a} y^{-\frac{1}{2}} dy = 2a\sqrt{2a}\sqrt{y}\Big|_0^{2a} = 4a^2$$

y el resultado coincide con el obtenido parametrizando la superficie.

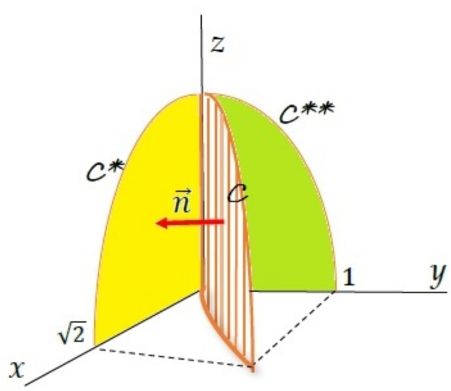
7. Calcule, en cada caso, el flujo de $\overrightarrow{f}$ a través de la superficie Σ dada ($\iint_\Sigma \overrightarrow{f} \cdot \check{n}\, d\sigma$), indicando gráficamente la orientación de Σ que Ud. ha elegido o aquella que se especifica.

   c) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (y^3 z, xz - yz, x^2 z)$, a través de $2y = x^2$ con $x^2+y^2+z^2 \leq 3$ en el 1^{er} octante.



La superficie Σ a través de la cual debemos calcular el flujo es la que se ve rayada en la figura: el trozo de cilindro parabólico $y = \frac{x^2}{2}$ que queda por dentro de la esfera de radio $\sqrt{3}$, $x^2+y^2+z^2 \leq 3$, en el primer octante.

- Con el fin de obtener el elmento de área $d\overrightarrow{\sigma}$ podemos parametrizar la superficie.
  Si la parametrizamos como $\overrightarrow{\Gamma}(x,z) = (x, \frac{x^2}{2}, z)$ tendremos que definir como región de integración la proyección de la superficie Σ sobre el plano xz, limitada por los ejes coordenados x y z y por la curva $\mathcal{C}^*$, que es la proyección de la intersección entre el cilindro parabólico y la esfera, $\mathcal{C}$, en el plano $y=0$.
  Si la parametrizamos como $\overrightarrow{\Omega}(y,z) = (\sqrt{2y}, y, z)$, tendremos que definir como región de integración la proyección de la superficie Σ sobre el plano yz, limitada por los ejes coordenados y y z y por la curva $\mathcal{C}^{**}$, que es la proyección de la curva $\mathcal{C}$ en el plano $x=0$.



$$\mathcal{C}^* = \begin{cases} x^2 + \frac{x^4}{4} + z^2 &= 3 \\ y &= 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{C}^{**} = \begin{cases} 2y + y^2 + z^2 &= 3 \\ x &= 0 \end{cases}$$

¿Qué parametrización resultará más conveniente?
Con la primera parametrización el vector normal resulta

$$\overrightarrow{\Gamma}'_x \times \overrightarrow{\Gamma}'_z = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x, -1, 0).$$

Esta normal apunta como se indica en la figura pues la segunda componente es -1, es decir, señala hacia los valores negativos de y.
Con la segunda parametrización el vector normal resulta

$$\overrightarrow{\Omega}'_y \times \overrightarrow{\Omega}'_z = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2y}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, \frac{-1}{\sqrt{2y}}, 0)$$

que también señala hacia los valores negativos de y. El inconveniente que tiene esta segunda parametrización es que los puntos donde $y = 0$ (los puntos del eje z) son puntos singulares, puesto que allí no estará definido este vector normal.
Utilicemos, entonces, $\overrightarrow{\Gamma}(x, z)$.
Para evaluar el flujo debemos evaluar el campo vectorial sobre la superficie:

$$\overrightarrow{f}\Big|_{\Sigma} = (y^3z, xz - yz, x^2z)\Big|_{2y=x^2} = (\frac{x^6}{8}z, xz - \frac{x^2}{2}z, x^2z)$$

$$\overrightarrow{f}\Big|_{\Sigma} \cdot \overrightarrow{\Gamma}'_x \times \overrightarrow{\Gamma}'_z = \frac{x^7z}{8} - xz + \frac{x^2z}{2} = (\frac{x^7}{8} - x + \frac{x^2}{2})z$$

El flujo pedido es

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{f} \cdot d\overrightarrow{\sigma} = \iint_{Proy_{xz}(\Sigma)} \overrightarrow{f}\Big|_{\Sigma} \cdot \overrightarrow{\Gamma}'_x \times \overrightarrow{\Gamma}'_z dxdz =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2-\frac{x^4}{4}}} (\frac{x^7}{8} - x + \frac{x^2}{2})zdz = \int_0^{\sqrt{2}} (\frac{x^7}{8} - x + \frac{x^2}{2})[\frac{z^2}{2}]\Big|_0^{\sqrt{3-x^2-\frac{x^4}{4}}} dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} (\frac{3}{16}x^7 - \frac{1}{16}x^9 - \frac{1}{64}x^{11} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{16}x^6)dx = 8\frac{\sqrt{2}}{35} - \frac{89}{120} \cong -0.42$$

El valor negativo del flujo indica que si el campo representara, por ejemplo, la velocidad de un líquido que circula en el espacio y la superficie fuera una membrana permeable, el flujo neto de fluido que atraviesa la membrana se produce en sentido opuesto al de la normal resultante de la parametrización elegida, es decir, el flujo neto sería hacia las y positivas.

- Otra posibilidad es usar la expresión implícita de la superficie para obtener el elemento de área $d\overrightarrow{\sigma}$ y con él calcular el flujo solicitado.
  La superficie puede proyectarse tanto en el plano xz como en el plano yz (en el plano xy la proyección se reduce a una curva: un arco de parábola).
  Es $\Sigma : 2y - x^2 = 0$. Sea $F(x, y, z) = 2y - x^2$.

Si decidimos proyectar en el plano xz el elemento de área es

$$d\overrightarrow{\sigma} = \frac{\overrightarrow{\nabla} F(x,y,z)}{F'_y(x,y,z)} dxdz = \frac{(-2x,2,0)}{2} dxdz = (-x,1,0)dxdz$$

Observemos que el vector normal resultante tiene sentido opuesto al que obtuvimos mediante la parametrización $\overrightarrow{\Gamma}$ de modo que, si utilizamos esta representación implícita de la superficie para calcular el flujo, obtendremos un resultado con el mismo valor absoluto que antes, pero con signo positivo. La interpretación física sería la misma: el flujo neto es hacia las y positivas, ya que la normal $(-x,1,0)$ apunta en esa dirección.
Si quisiéramos proyectar en el plano yz, es

$$d\overrightarrow{\sigma} = \frac{\overrightarrow{\nabla} F(x,y,z)}{F'_x(x,y,z)} dydz = \left.\frac{(-2x,2,0)}{2x}\right|_{2y=x^2} dydz = (-1, \frac{1}{\sqrt{2y}}, 0)dydz,$$

que también apunta hacia las y positivas, y tiene las mismas limitaciones que la parametrización $\overrightarrow{\Omega}$: el vector normal no está definido en los puntos de la proyección donde $y=0$.
Observemos, sin embargo, que si evaluamos $\left.\overrightarrow{f}\right|_{\Sigma} .(-1, \frac{1}{\sqrt{2y}}, 0)$ se obtiene

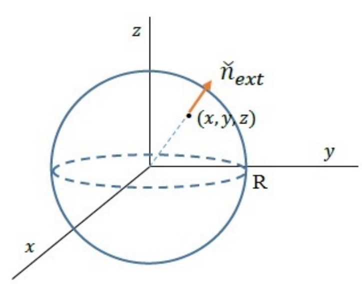
$$\left.(y^3 z, xz - yz, x^2 z)\right|_{x=\sqrt{2y}} \cdot (-1, \frac{1}{\sqrt{2y}}, 0) = -y^3 z + z - \frac{\sqrt{y}z}{\sqrt{2}}$$

donde la singularidad ha quedado salvada y la integración sobre la proyección en el plano yz es posible (otro tanto hubiera ocurrido si hubiéramos utilizado la parametrización $\overrightarrow{\Omega}$).
Finalmente se obtendría, como es de esperar,

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{f} \cdot d\overrightarrow{\sigma} = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{3-y^2-2y}} (-y^3 + 1 - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}}) z dz = ... = -8\frac{\sqrt{2}}{35} + \frac{89}{120} \cong 0.42$$

12. Una porción Σ de superficie esférica de radio 3 centrada en $\overrightarrow{0}$ tiene área 2. Calcule el flujo de $\overrightarrow{f}$ a través de Σ orientada hacia el interior de la esfera, si $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (x,y,z)$.

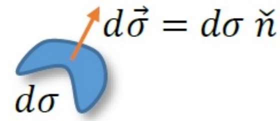
Observemos, en primer lugar, que una superficie esférica centrada en el origen tiene la particularidad de que su versor normal exterior en cada punto tiene la misma dirección que el vector posición de ese punto.



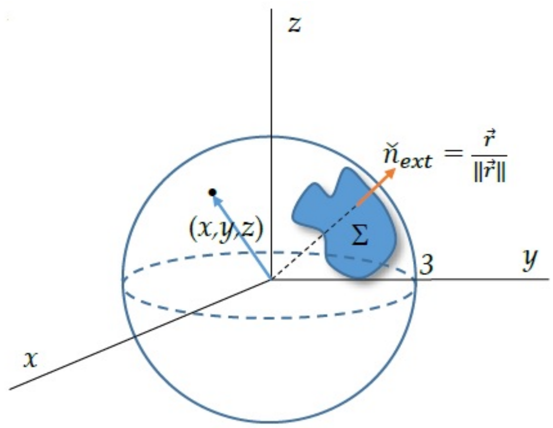
Para una esfera de radio R:

$$\check{n}_{ext} = \frac{\overrightarrow{r}}{||\overrightarrow{r}||} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{R}(x,y,z)$$

Además, en cualquier superficie, el elemento de área vectorial, $d\overrightarrow{\sigma}$, se puede escribir como el elemento de área escalar, $d\sigma$, multiplicado por el versor normal a la superficie, $\check{n}$.



El siguiente gráfico ilustra el problema que nos ocupa, aunque con la normal orientada hacia el exterior de la esfera:



Para el flujo solicitado se tiene

$$\iint\limits_{\Sigma} \overrightarrow{f} \cdot d\overrightarrow{\sigma}_{int} = \iint\limits_{\Sigma} \overrightarrow{f} \cdot \check{n}_{int}\ d\sigma = -\iint\limits_{\Sigma} \overrightarrow{f} \cdot \check{n}_{ext}\ d\sigma = -\iint\limits_{\Sigma} (x,y,z) \cdot \frac{1}{3}(x,y,z)\ d\sigma =$$

$$= -\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2+z^2)\Big|_{\Sigma}\ d\sigma = -\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma} 9\ d\sigma = -3\iint\limits_{\Sigma} d\sigma$$

Luego, como $\iint\limits_{\Sigma} d\sigma = \acute{A}rea(\Sigma) = 2$, el flujo pedido es $-3.\acute{A}rea(\Sigma)$:

$$\iint\limits_{\Sigma} \overrightarrow{f} \cdot d\overrightarrow{\sigma}_{int} = -6$$

.