FIUBA 2020 ANÁLISIS MATEMÁTICO II (81.01) y II "A" (61.03)

Ejemplos **Ejemplos resueltos del TP VIII, Integrales dobles y triples**

1. Grafique la región plana y calcule su área mediante una integral doble, siendo la región aquella definida por las inecuaciones:

$$x + y \leq 2 \quad \wedge \quad y \leq x \quad \wedge \quad y \geq 0.$$

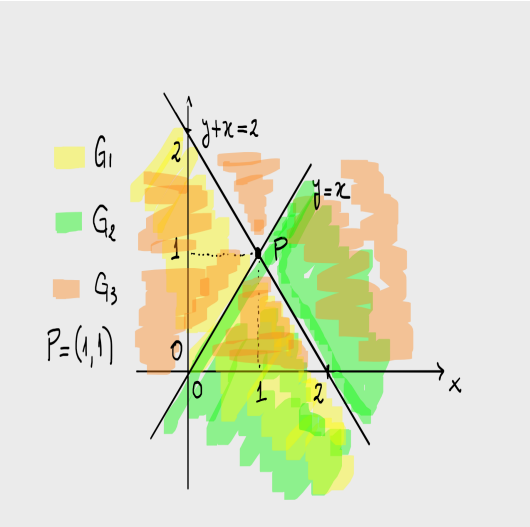
Resolución: Si llamamos G_i, $i = 1, 2, 3$ a las regiones definidas por

- $G_1 : x + y \leq 2$;
- $G_2 : y \leq x$;
- $G_3 : y \geq 0$;

entonces la región G definida por las tres inecuaciones es la intersección $G = G_1 \cap G_2 \cap G_3$.

La región G_1 es el semiplano cerrado cuya frontera o borde está dado por la recta de ecuación $x + y = 2$ y contiene al punto $(0, 0)$ ya que $0 + 0 \leq 2$. La región G_2 también es un semiplano cerrado, en este caso aquél cuyo borde satisface la ecuación $y = x$ y contiene al punto $(1, 0)$, pues $0 \leq 1$. Finalmente, la región G_3 es el semiplano cerrado formado por el eje x y lo que se encuentra por encima de éste.

Entonces G es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $P = (1, 1)$, donde el punto P es la intersección de la recta de ecuación $x + y = 2$ con la recta de ecuación $y = x$. Evidentemente, el área A de G es $A = 1$ ya que el triángulo tiene base 2 y altura 1. Vamos a calcularlo mediante la integral doble: $A = \iint_G 1 \, dxdy$. Dada la forma de G, en este caso es conveniente integrar primero respecto de x y luego respecto de y. Teniendo en cuenta que los puntos de G satisfacen las condiciones $0 \leq y \leq 1$, $x \geq y$, $y + x \leq 2$ y que



$$y + x \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2 - y,$$

tenemos entonces que

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq 2 - y\}.$$

Por lo tanto

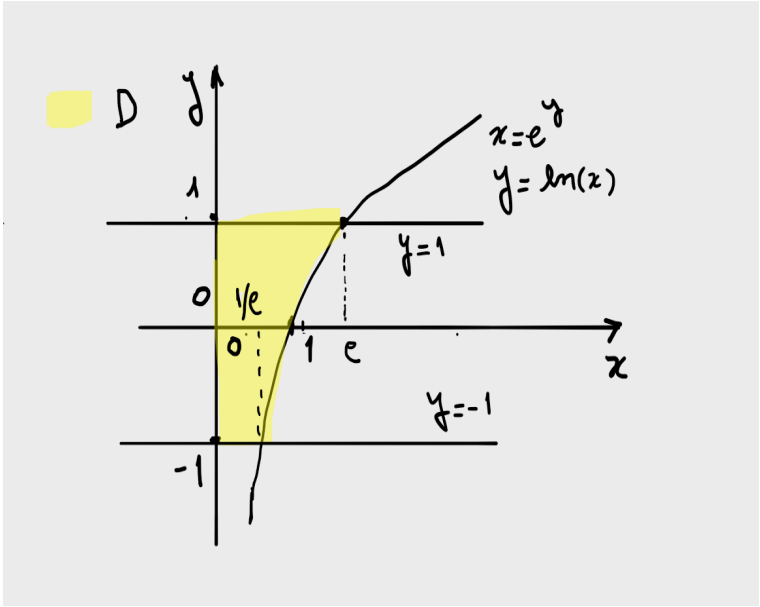
$$A = \iint_G 1 \, dxdy = \int_0^1 \left[\int_y^{2-y} 1 \, dx \right] dy = \int_0^1 [(2 - y) - y] dy = \int_0^1 [2 - 2y] dy = [2y - y^2]_0^1 = 1.$$

2. Dada la integral $\int_{-1}^{1} dy \int_{0}^{e^y} f(x,y)\, dx$, graficar la región de integración y expresar la integral invirtiendo el orden de integración.

Resolución: La región D de integración está definida por las condiciones

$$D: \quad -1 \leq y \leq 1 \qquad \wedge \qquad 0 \leq x \leq e^y.$$

con lo cual el gráfico de D es el siguiente:



Note que $x = e^y$ si y solo si $y = \ln(x)$.

Para poder invertir el orden de integración dividimos la región D en dos subregiones

$$D_1 : 0 \leq x \leq 1/e \qquad \wedge \qquad -1 \leq y \leq 1$$

y

$$D_2 : 1/e \leq x \leq e \qquad \wedge \qquad \ln(x) \leq y \leq 1$$

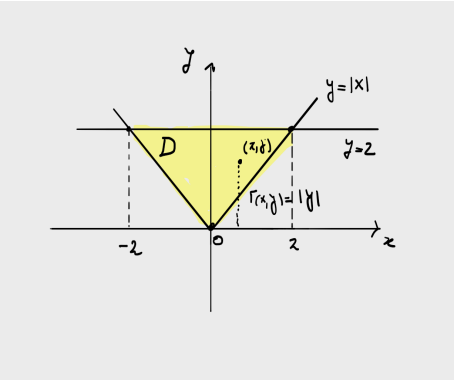
y entonces

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} dy \int_{0}^{e^y} f(x,y)\, dx &= \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^{1/e} dx \int_{-1}^{1} f(x,y)\, dy + \int_{1/e}^{e} dx \int_{\ln(x)}^{1} f(x,y)\, dy.\end{aligned}$$

3. Calcule el momento de inercia respecto del eje x de la placa plana D cuya densidad δ_0 es constante, cuando $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 2\}$.

Resolución: Llamemos $r(x,y)$ a la distancia del punto (x,y) al eje x. Entonces $r(x,y) = |y|$. Por lo tanto, el momento de inercia de la placa respecto del eje x viene dado por la fórmula

$$I_x = \iint_D r^2(x,y)\,\delta_0\,dx\,dy = \delta_0 \iint_D |y|^2\,dx\,dy.$$



Note que las condiciones $|x| \le y \le 2$ implican que $|x| \le 2$, con lo cual es inmediato que $-2 \le x \le 2$, con lo cual

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le x \le 2,\ |x| \le y \le 2\},$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $|y|^2 = y^2$

$$I_x = \delta_0 \int_{-2}^{2} dx \int_{|x|}^{2} y^2 dy = \delta_0 \int_{-2}^{2} \frac{y^3}{3}\Big|_{|x|}^{2} dx = \frac{\delta_0}{3} \int_{-2}^{2} (8 - |x|^3)\,dx. \tag{1}$$

Como la función $8 - |x|^3$ es par,

$$\int_{-2}^{2} (8 - |x|^3)\,dx = 2\int_{0}^{2} (8 - |x|^3)\,dx = 2\int_{0}^{2} (8 - x^3)\,dx = 2\left[8x - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 24.$$

Entonces, volviendo a (1), obtenemos $I_x = 8\delta_0$.

4. Calcule la integral $\iint_D (x+y)^3 dx\,dy$ donde

$$D: \quad 1 \le x + y \le 4, \qquad -2 \le x - 2y \le 1,$$

aplicando una transformación lineal conveniente.

Resolución: Llamemos $u = x + y$ y $v = x - 2y$. Entonces ponemos x e y en función de u y v resolviendo las ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = u \\ x - 2y = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2u+v}{3} \\ y = \frac{u-v}{3} \end{cases}.$$

Si definimos la transformación lineal, $(x,y) = T(u,v) = (\frac{2u+v}{3}, \frac{u-v}{3})$, y tenemos en cuenta que $x + y = u$, $x - 2y = v$ y

$$1 \le x + y \le 4, \qquad -2 \le x - 2y \le 1 \quad \iff \quad 1 \le u \le 4, \qquad -2 \le v \le 1,$$

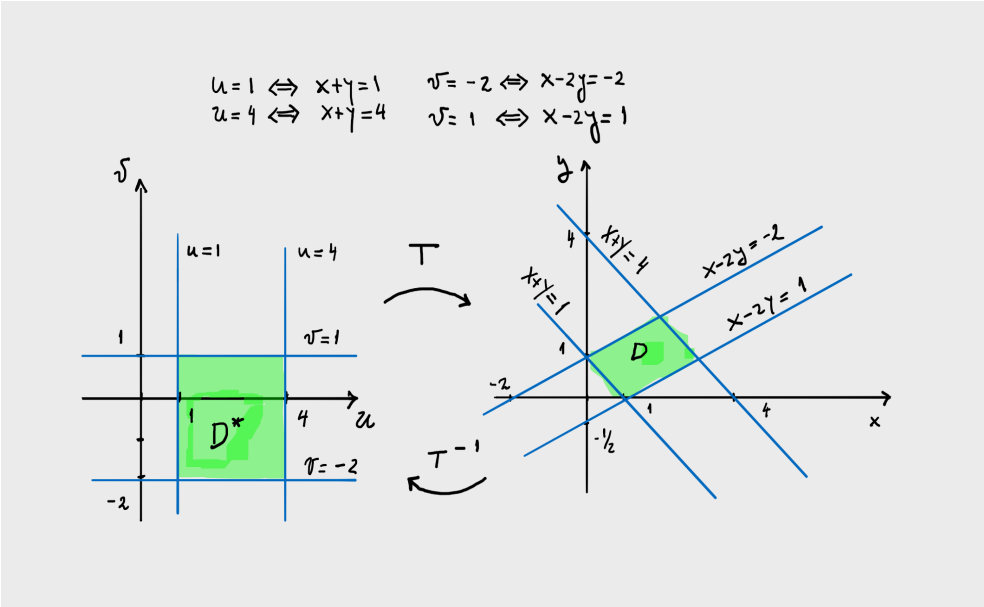
resulta que $T(u,v) \in D$ si y solo si $(u,v) \in D^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le u \le 4,\ -2 \le v \le 1\}$. Por lo tanto $D = T(D^*)$. Como T es una transformación biyectiva, ya que $(u,v) = (x+y, x-2y) = T^{-1}(x,y)$, de clase $\mathcal{C}^\infty$ y

$$JT(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3},$$

aplicando la fórmula de cambio de variable para una integral doble, y usando que $x+y=u$, queda

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)^3 dxdy &= \iint_{D^*} u^3 |JT(u,v)| dudv = \frac{1}{3}\iint_{D^*} u^3 dudv \\ &= \frac{1}{3}\int_1^4 du \int_{-2}^1 u^3 dv = \frac{1}{3}\int_1^4 3u^3 du = \frac{u^4}{4}\Big|_1^4 = 64 - \frac{1}{4} = \frac{255}{4}.\end{aligned}$$

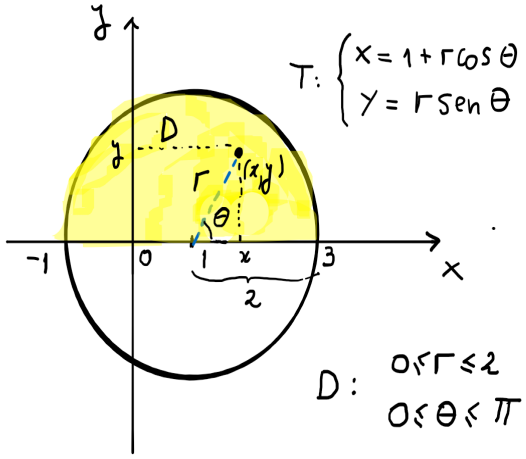
Note que la estrategia para resolver este ejercicio consistió en encontrar una transformación lineal $(x,y) = T(u,v)$ para la cual el dominio de integración D^* para las variables u, v resultara más simple que el dominio de integración D original. La transformación lineal T transforma la rectas $u=1$ en $x+y=1$, $u=4$ en $x+y=4$, $v=-2$ en $x-2y=-2$ y $v=1$ en $x-2y=-1$



5. Resolver la integral $\iint_D x\,y\,dx\,dy$, con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$, utilizando coordenadas polares.

Resolución: Notemos que la ecuación $(x-1)^2 + y^2 \leq 4$ es la del círculo centrado en $(1,0)$ con radio 2. Como $y \geq 0$, entonces D es el semicírculo superior.

Para resolver la integral consideramos las coordenadas polares "generalizadas", donde tomamos como centro el punto $(1,0)$ en lugar del $(0,0)$, esto es, consideramos las coordenadas r, θ pero ahora la relación es $x = 1 + r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, es decir, consideramos la transformación $T : [0,+\infty)\times[0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $T(r,\theta) = (1 + r\cos\ \theta, r\ \mathrm{sen}\ \theta)$. La relación geométrica entre (r,θ) y (x,y) puede apreciarse en el gráfico.



En estas coordenadas (r,θ) la descripción de D es $D:\ 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le \pi$.

En otras palabras, si $D^* = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le \pi\}$, entonces $(x,y) \in D$ si y solo si $(r,\theta) \in D^*$. Luego $T(D^*) = D$.

Teniendo en cuenta que T es de clase $\mathcal{C}^\infty$, uno a uno restringida a $(0,\infty)\times[0,2\pi)$, $T(0,\theta) = (1,0)$ para todo $\theta \in [0,2\pi)$ y que

$$JT(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\ \mathrm{sen}\ \theta \\ \mathrm{sen}\ \theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

Entonces

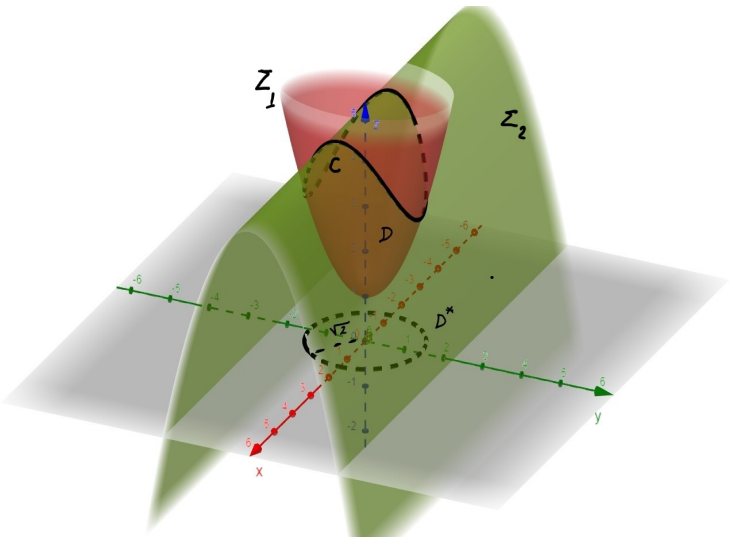
$$\begin{aligned} \iint_D x\,y\,dx\,dy &= \iint_{D^*} \overbrace{(1 + r\cos\ \theta)}^{x}\overbrace{(r\ \mathrm{sen}\ \theta)}^{y}\overbrace{r}^{|JT(r,\theta)|}\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\int_0^2 (1 + r\cos\ \theta)(r\ \mathrm{sen}\ \theta)\,r dr\right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\int_0^2 (r^2\ \mathrm{sen}\ \theta + r^3\cos\ \theta\ \mathrm{sen}\ \theta) dr\right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{8}{3}\ \mathrm{sen}\ \theta + 4\cos\ \theta\ \mathrm{sen}\ \theta\right) d\theta \\ &= \left[-\frac{8}{3}\cos\theta + 2\ \mathrm{sen}^2\ \theta\right]_0^\pi = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

6. Grafique el cuerpo D y calcule $\iiint_D 3x\,dx\,dy\,dz$ en coordenadas cartesianas, siendo

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge 2x^2 + y^2 + 1,\ z \le 5 - y^2\}.$$

Resolución:

El cuerpo D se encuentra limitado por el paraboloide Σ_1 cuya ecuación cartesiana es $z = 2x^2 + y^2 + 1$ y el cilindro parabólico Σ_2 de ecuación $z = 5 - y^2$. Para poder calcular la integral triple en forma iterada, debemos encontrar la proyección de D sobre el plano xy. Teniendo en cuenta que



$$2x^2+y^2+1 \leq z \leq 5-y^2 \implies 2x^2+y^2+1 \leq 5-y^2 \implies 2x^2+2y^2 \leq 4 \implies x^2+y^2 \leq 2,$$

podemos concluir que $(x, y, z) \in D$ implica que $x^2 + y^2 \leq 2$, y de allí que la proyección D^* de D sobre el plano xy es el círculo centrado en el origen de radio $\sqrt{2}$. Otra forma de llegar a la misma conclusión en este caso, dado el gráfico resultante de D, consiste en hallar la curva $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ y proyectarla sobre el plano xy:

$$z = 2x^2 + y^2 + 1 \quad \wedge \quad z = 5 - y^2 \quad \implies \quad 2x^2 + y^2 + 1 = 5 - y^2 \quad \implies \quad x^2 + y^2 = 2.$$

Luego,

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 5 - y^2 \end{cases}$$

y entonces concluímos que la proyección de C sobre el plano xy es la circunferencia centrada en el origen de radio $\sqrt{2}$. Como esta circunferencia es la frontera de la proyección de D sobre el plano xy, llegamos al mismo resultado.

Pensemos ahora a la proyección D^* como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, entonces $D^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$ y D puede escribirse

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in D^*, 2x^2 + y^2 + 1 \leq z \leq 5 - y^2\}.$$

Ahora estamos en condiciones de calcular la integral triple:

$$\begin{aligned} \iiint_D 3x \, dx \, dy \, dz &= \iint_{D^*} \left[\int_{2x^2+y^2+1}^{5-y^2} 3x \, dz \right] dx \, dy = \iint_{D^*} 3x[(5 - y^2) - (2x^2 + y^2 + 1)] \, dx \, dy \\ &= \iint_{D^*} 6x(2 - x^2 - y^2) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

La última integral doble la podemos calcular utilizando coordenadas polares y teniendo en cuenta que D^* es un círculo de radio $\sqrt{2}$ centrado en $(0, 0)$, y que el jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$, con

lo cual

$$\begin{aligned}\iint_{D^*} 6x(2-x^2-y^2)\,dx\,dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 6\,(r\cos\theta)(2-r^2)\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} 6\,(r\cos\theta)(2-r^2)\,r\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} 6\,r^2(2-r^2)\left[\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta}_{=0}\right] dr = 0.\end{aligned}$$

Este resultado podría haberse obtenido a través de una interpretación física. Si pensamos que D es un cuerpo homogéneo cuya densidad de masa es 3 y tenemos en cuenta que el eje z es eje de simetría de D, el centro de masas (x_m, y_m, z_m) de D debe estar ubicado sobre el eje z. Por lo tanto, $x_m = 0$ e $y_m = 0$. Si llamamos M a la masa de D, tenemos que

$$x_m = \frac{1}{M}\iiint_D 3x\,dx\,dy\,dz = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \iiint_D 3x\,dx\,dy\,dz = 0.$$

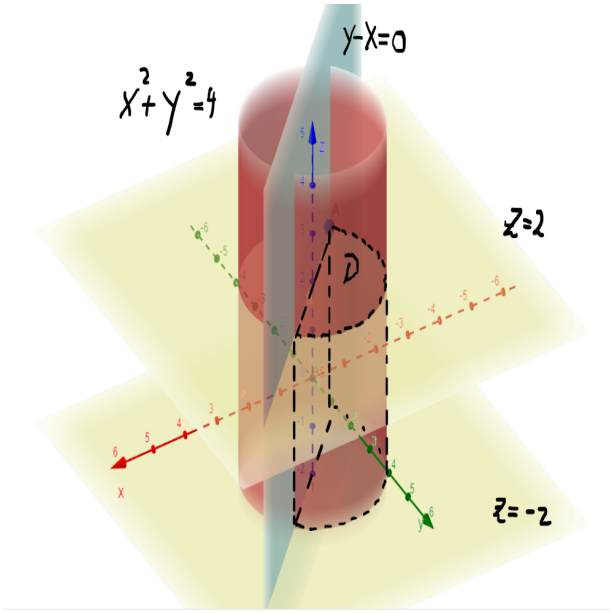
Note que con el mismo argumento podría deducirse que $\iiint_D 3y\,dx\,dy\,dz = 0$ (verifíquelo haciendo la cuenta).

7. Grafique el cuerpo D y calcule su masa empleando coordenadas cilíndricas, siendo

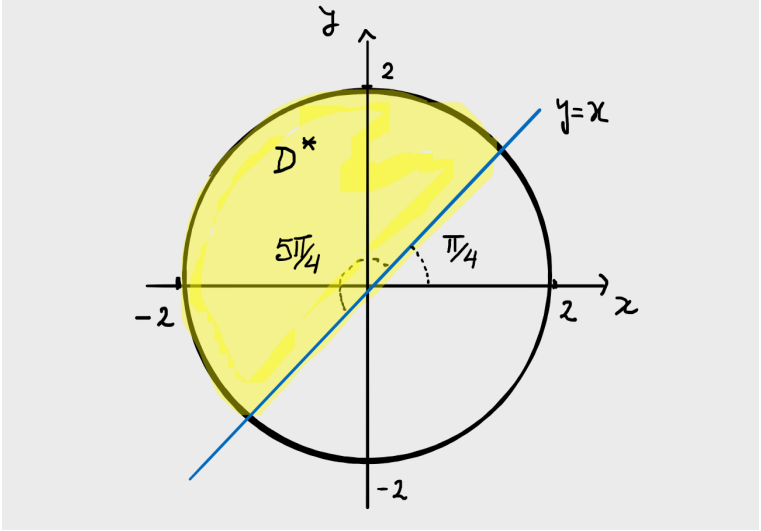
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le 4,\ y \ge x,\ |z| \le 2\},$$

y la densidad de masa $\delta(x,y,z) = kx^2$ con $k > 0$.

Resolución: El cuerpo D es la porción del cilindro sólido de ecuación $x^2+y^2 \le 4$, que se encuentra en el semiespacio limitado por el plano $y - x = 0$ que contiene al punto $(0,1,0)$ y está limitado inferiormente por el plano $z = -2$ y superiormente por $z = 2$.



Para describir D en coordenadas cilíndricas, necesitamos la proyección de éste sobre el plano xy, que en este caso es evidentemente el conjunto (pensado en $\mathbb{R}^2$) $D^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4,\ y \ge x\}$.
Las coordenadas cilíndricas del punto (x,y,z) son (r,θ,z), donde $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y $z = z$, con lo cual, teniendo en cuenta quién es D^*, resulta que D en coordenadas cilíndricas es:



$$D:\ 0 \le r \le 2,\ \frac{1}{4}\pi \le \theta \le \frac{5}{4}\pi,\ -2 \le z \le 2.$$

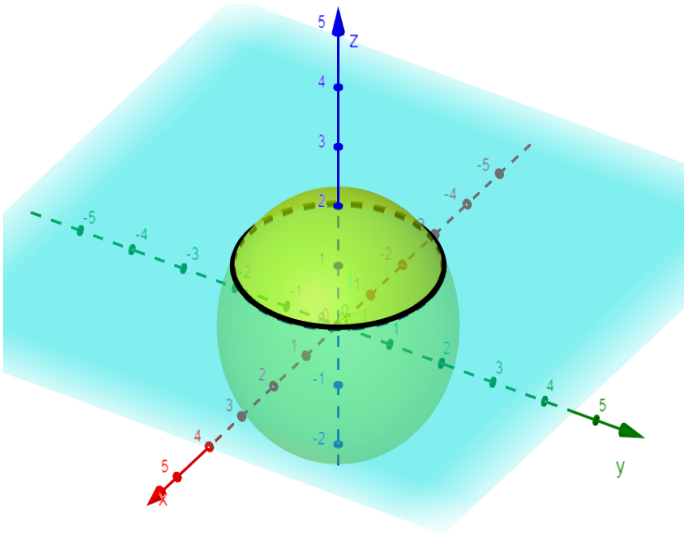
Recordando que el jacobiano del cambio de coordenadas es en este caso $JT(r,\theta,z) = r$,

La masa del cuerpo D es

$$M = \iiint_D kx^2 dx\,dy\,dz = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\int_0^2\int_{-2}^2 k\,\overbrace{r^2\cos^2\theta}^{x^2}\,r\,dz\,dr\,d\theta$$
$$= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\int_0^2 4\,k\,r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta = 16\,k\underbrace{\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\cos^2\theta\,d\theta}_{=\pi/2} = 8\,k\,\pi.$$

8. Grafique el cuerpo $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \le 1\}$ y calcule $\iiint_D 3\,y\,dx\,dy\,dz$ empleando coordenadas esféricas.

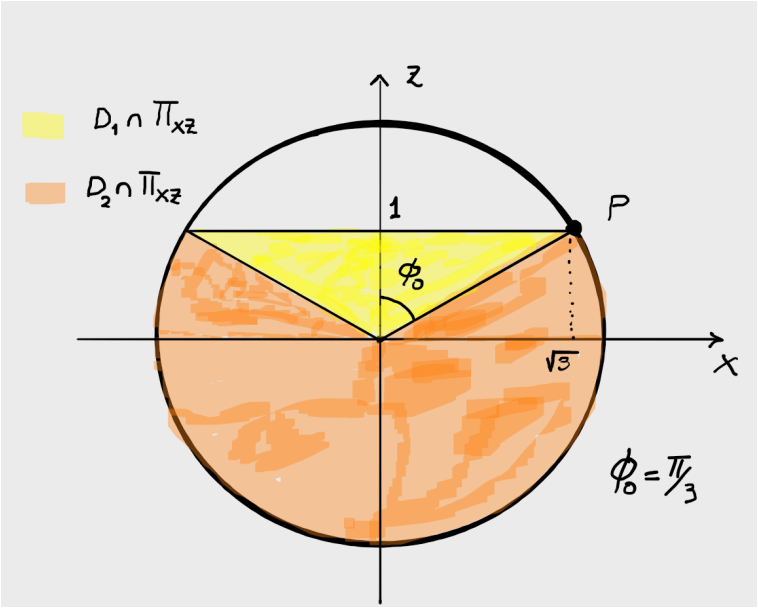
Resolución: El cuerpo D es la porción de esfera sólida de centro $(0,0,0)$ y radio $R = 2$ que se encuentra por debajo del plano $z = 1$. Para describirlo en las coordenadas esféricas:



$$x = r\,\cos\,\theta\,\text{sen}\,\phi,\ y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi,\ z = r\,\cos\,\phi$$

vamos a usar que es un cuerpo de revolución respecto del eje z, y que por lo tanto la coordenada θ será independiente de r y ϕ y sólo deberemos hallar qué relación cumplen (si la hay) estas dos últimas coordenadas.

Para facilitar el trabajo cortamos el cuerpo con un plano que contiene al eje z, por ejemplo el plano xz que llamamos π_{xz}, y obtenemos la figura



Donde P representa el punto con primera componente positiva en el cual se intersecan la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, el plano $z = 1$ y el plano π_{xz}. Resolviendo las ecuaciones resulta $P = (\sqrt{3}, 0, 1)$. El ángulo ϕ_0 entre el eje z positivo y el segmento que une el origen con P satisface $\tan\phi_0 = \sqrt{3}$ y por lo tanto vale $\phi_0 = \text{arc tan}(\sqrt{3}) = \pi/3$. El corte nos sugiere dividir el cuerpo D en dos cuerpos D_1 y D_2, que se obtienen rotando alrededor del eje z, respectivamente, las regiones pintadas en amarillo y en naranja. Resulta que D_1 es una porción de cono que en coordenadas esféricas tiene la representación:

$$D_1 : \ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq \overbrace{r\cos\phi}^{z} \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

La parte D_2 es más fácil de describir

$$D_2 : \ \frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Ya estamos en condiciones de calcular la integral pedida en coordenadas esféricas. Recordemos que $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}| = r^2\text{sen}\,\phi$. Entonces

$$\iiint_D 3y dx\, dy\, dz = \iiint_{D_1} 3y\, dx\, dy\, dz + \iiint_{D_2} 3y\, dx\, dy\, dz$$

$$\begin{aligned}\iiint_{D_1} 3y\, dx\, dy\, dz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{1/\cos\phi} 3\,\overbrace{r\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta}^{y}\,\overbrace{r^2\,\text{sen}\,\phi}^{|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}|}\, dr\, d\phi\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3}\int_0^{r/\cos\phi} 3\,r^3\,\text{sen}^2\,\phi\,\underbrace{\left[\int_0^{2\pi}\text{sen}\,\theta\, d\theta\right]}_{=0}\, dr\, d\phi = 0\end{aligned}$$

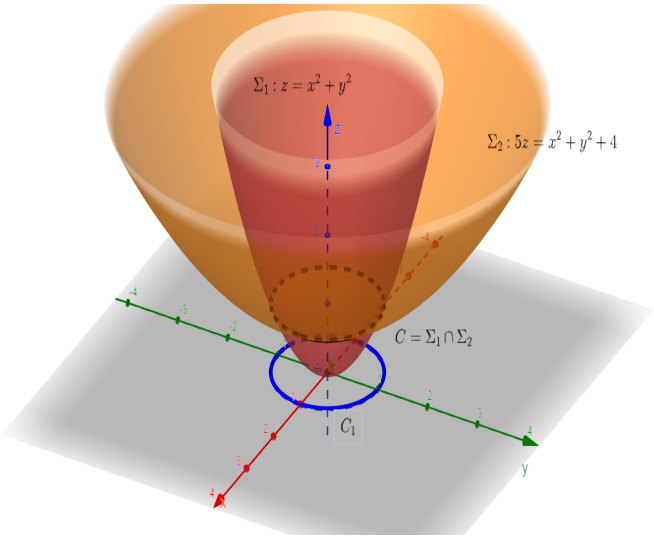
y

$$\iiint_{D_2} 3y\,dx\,dy\,dz = = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{0}\int_0^2 3\,\overbrace{r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta}^{y}\,\overbrace{r^2\,\mathrm{sen}\,\phi}^{|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}|}\,dr\,d\phi\,d\theta$$
$$= \int_{\pi/3}^{2\pi}\int_0^2 3\,r^3\,\mathrm{sen}^2\,\phi\,\underbrace{\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\right]}_{=0}\,dr\,d\phi = 0$$

donde en ambos cálculos hemos cambiado el orden de integración e integrado primero respecto de la variable θ. Con lo cual $\iiint_D 3\,y\,dx\,dy\,dz = 0$.

9. Calcular el momento de inercia respecto del eje x de un cuerpo de densidad constante limitado por $x = y^2 + z^2$ y $5x = y^2 + z^2 + 4$.

Resolución: Las superficies de ecuaciones $x = y^2 + z^2$ y $5x = y^2 + z^2 + 4$ son paraboloides con eje de simetría x. Para facilitar los cálculos empleando coordenadas cilíndricas o esféricas, ya veremos cuál es más conveniente, renombramos las variables, de modo que sea más sencilla y familiar la descripción del cuerpo D limitado por esas superficies. Si en lugar de x ponemos z y viceversa, las superficies que limitan al cuerpo son $\Sigma_1 : \ z = y^2 + x^2$ y $\Sigma_2 : \ 5z = y^2 + x^2 + 4$ y el momento de inercia buscado es ahora respecto del eje z. Como la densidad es constante no hay que efectuar ningún cambio en ella (si dependiera explícitamente de las coordenadas del punto habría que efectuar el cambio correspondiente). El gráfico que vemos al lado está hecho empleando las nuevas variables.



Como puede apreciarse del gráfico, D está limitado inferiormente por Σ_1 y superiormente por Σ_2, es decir

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z \leq \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{5} + \frac{4}{5}\}.$$

También se observa que la proyección D^* de D sobre el plano xy es la superficie cuyo borde es la curva C_1 que es la proyección de la curva $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ sobre ese plano.

Para hallar C resolvemos las ecuaciones

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 5z = x^2 + y^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 5(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Entonces C es la circunferencia de radio 1 y centro $(0, 0, 1)$ contenida en el plano de ecuación $z = 1$, y su proyección C_1 es la circunferencia de radio 1 centrada en el origen y contenida en el plano $z = 0$.

Dada la geometría del problema, lo más conveniente es utilizar coordenadas cilíndricas. El cuerpo D en esas coordenadas es

$$D:\ 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad r^2 \leq z \leq \frac{r^2}{5} + \frac{4}{5}.$$

Entonces, teniendo en cuenta que la densidad $\delta(x, y, z) = \delta_0$ es constante, la distancia de (x, y, z) al eje z es $\sqrt{x^2 + y^2}$ y que el jacobiano del cambio de coordenadas es r, tenemos que el momento de inercia pedido es

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{D_1} (x^2 + y^2)\delta_0 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\frac{r^2}{5}+\frac{4}{5}} \delta_0 \, r^3 dz \, dr \, d\theta \\ &= \delta_0 \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^1 r^3 \left[\frac{r^2}{5} + \frac{4}{5} - r^2\right]}_{=\frac{1}{15}} dr \, d\theta = \frac{2}{15}\pi \, \delta_0. \end{aligned}$$