

Esta síntesis **no es un apunte** de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

Los contenidos del Trabajo Práctico X incluyen los denominados *teoremas integrales* (Gauss, Green y Stokes), comencemos presentando los elementos básicos esenciales.

Definiciones básicas

A continuación, trabajando en \mathcal{R}^3 y utilizando el operador nabla, que denotamos $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, veamos qué surge de aplicarlo a campos escalares y vectoriales.

No estamos indicando hipótesis, es claro que si se indican derivadas se supone que existen, las hipótesis específicas las indicaremos cuando se haga el uso correspondiente.

Operador nabla aplicado a campo escalar f

- $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) \equiv (f'_x, f'_y, f'_z) \doteq \text{grad}(f) : \text{gradiente de } f$

Operador nabla aplicado a campo vectorial $\vec{f} = (P, Q, R)$. Se dan dos posibilidades, como “producto escalar” o como “producto vectorial”.

- $\nabla \cdot \vec{f} \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (P, Q, R) = P'_x + Q'_y + R'_z \doteq \text{div}(\vec{f}) : \text{divergencia de } \vec{f}$
- $\nabla \times \vec{f} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) \doteq \text{rot}(\vec{f}) : \text{rotor de } \vec{f}$

En este caso la matriz jacobiana de \vec{f} es $D\vec{f} = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{pmatrix}$ y, por simple observación, vemos que:

- La suma de los elementos de la diagonal principal, $\text{tr}(D\vec{f}) = \text{div}(\vec{f})$
- $D\vec{f}$ es simétrica si, y sólo si, $\text{rot}(\vec{f}) \equiv \vec{0}$ ⁽¹⁾

Si ahora planteamos el cálculo de la $\text{div}(\text{grad}(f))$, resulta:

- $\nabla \cdot \nabla f \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (f'_x, f'_y, f'_z) = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} \doteq \nabla^2 f : \text{Laplaciano de } f$

Por último, sin establecer hipótesis de trabajo, sólo para indicar denominaciones específicas:

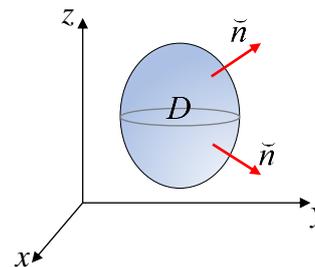
- Un campo \vec{f} es **solenoidal** cuando $\nabla \cdot \vec{f} \equiv 0$ (divergencia nula)
- Un campo \vec{f} es **irrotacional** cuando $\nabla \times \vec{f} \equiv \vec{0}$ (rotor nulo, equivalente a $D\vec{f}$ simétrica)
- Un campo f es **armónico** cuando $\nabla^2 f \equiv 0$ (Laplaciano nulo)

⁽¹⁾ Rotor idénticamente nulo, o bien, nulo en todo punto.

Teorema de la divergencia o de Gauss

Sea un cuerpo D , su superficie frontera ∂D y un campo \vec{f} , si:

1. D es acotado con frontera ∂D de volumen nulo y se puede subdividir en cantidad finita de regiones tipo RS4 de \mathbb{R}^3 . ⁽²⁾
2. ∂D es una superficie cerrada, suave a trozos, simple y orientable. Orientada en forma saliente de D .
3. $\vec{f} \in C^1$ en todo punto de D y ∂D , o en un conjunto abierto que los incluya.



Entonces,

$$\boxed{\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}(\vec{f}) \, dx \, dy \, dz}, \tag{1}$$

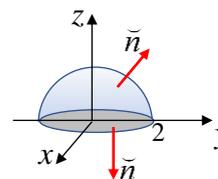
es decir, el flujo de \vec{f} a través de la superficie frontera de D es igual a la integral triple de la divergencia de \vec{f} extendida a D .

Ejemplo: Dado $\vec{f}(x, y, z) = (yz + xg(xy), xz - yg(xy), z^2)$ con $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, calcule el flujo de \vec{f} a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Dado que la expresión de g no se conoce, puede complicarse o incluso ser imposible el cálculo de flujo en forma directa.

Dado que $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, veamos qué ocurre si intentamos aplicar el teorema de la divergencia

En este caso, la divergencia del campo resulta:



$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{f}(x, y, z) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (yz + xg(xy), xz - yg(xy), z^2) = \\ &= g(xy) + xg'(xy)y - g(xy) - yg'(xy)x + 2z = 2z \end{aligned}$$

Entonces, aplicando (1), se obtiene:

$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D 2z \, dx \, dy \, dz$$

que no depende de g . En este caso el cuerpo es la mitad superior ($z \geq 0$) de una esfera de radio 2 con centro en el origen, que proyecta en el plano xy en el círculo $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 4$.

$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{D_{xy}} dx \, dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 2z \, dz = \iint_{D_{xy}} \underbrace{(4-x^2-y^2)}_{[z^2]_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}} dx \, dy,$$

pasando a polares,
$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \underbrace{(4-r^2)}_{[2r^2-r^4/4]_0^2} r \, dr = 4 \int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi.$$

Nota: Observe que la función g es escalar de una variable, el argumento es el producto xy que es un número real. Por ejemplo, aplicando la regla de la cadena, $(g(xy))'_x = g'(xy)y$.

⁽²⁾ Región tipo RS4 o simple respecto de los tres planos coordenados (ver Síntesis S-8C, pág. 2/6).

Ejemplo: Calcule el flujo de \vec{f} a través de la superficie Σ de ecuación $y = 5 - x^2 - z^2$ con $y \geq 1$, orientada hacia y^+ , sabiendo que $\vec{f}(x, y, z) = (x + ye^{\cos(y-z)}, 2y, xe^{\cos(y-x)})$.

En este caso, por más que el campo esté completamente definido, las expresiones de sus componentes pueden dificultar el cálculo del flujo en forma directa.

Pero la divergencia resulta muy sencilla,

$$\nabla \cdot \vec{f}(x, y, z) = 1 + 2 + 0 = 3 \text{ constante,}$$

y es fácil agregar una superficie S auxiliar de ecuación $y = 1$ (como se indica en el dibujo) para conformar la frontera de un cuerpo D .

La intersección de Σ con S es la curva

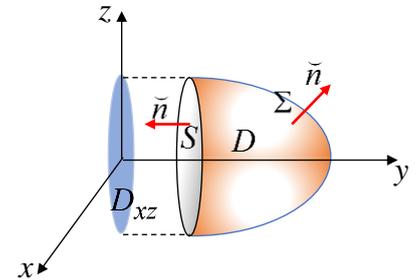
$$C = \begin{cases} y = 5 - x^2 - z^2 \\ y = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} 1 = 5 - x^2 - z^2 \\ y = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases},$$

con lo cual, tanto Σ como S y el cuerpo D cuya frontera es $\partial D = \Sigma \cup S$ proyectan contra el plano xz en la región D_{xz} definida por $x^2 + z^2 \leq 4$.

De esta manera $\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma$, con lo cual, aplicando el teorema de la divergencia se tiene que:

$$\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D \underbrace{\operatorname{div}(\vec{f})}_{=3} dx dy dz = \iiint_D 3 dx dy dz, \quad (\#)$$

donde Σ y S donde orientarse como se indica en la figura.



$$\begin{aligned} \iiint_D 3 dx dy dz &= 3 \iint_{D_{xz}} dx dz \int_1^{5-x^2-z^2} dy = 3 \iint_{D_{xz}} (4 - x^2 - z^2) dx dz = \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \underbrace{(4 - r^2)r}_{[2r^2 - r^4/4]_0^2} dr = 12 \int_0^{2\pi} d\theta = 24\pi \end{aligned}$$

El flujo en S , como es un trozo de plano paralelo al plano coordenado xz , es:

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{D_{xz}} \underbrace{\vec{f}(x, 1, z) \cdot (0, -1, 0)}_{-2} dx dz = -2 \iint_{D_{xz}} dx dz = -2\pi \cdot 2^2 = -8\pi$$

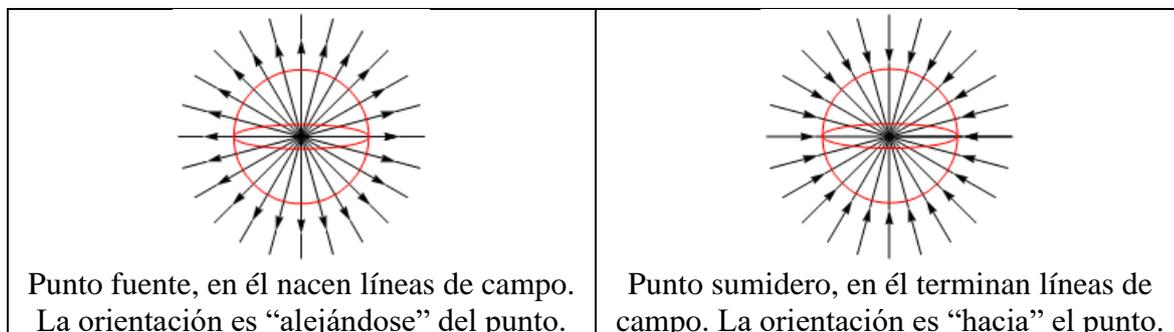
Reemplazando en (#) queda $\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma + (-8\pi) = 24\pi \rightarrow \iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = 32\pi$.

Ejercicio: Sea $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\vec{f} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ y $\vec{g}(x, y, z) = (x, y, z) + \nabla \times \vec{f}(x, y, z)$, demuestre que el flujo de \vec{g} a través de una superficie cerrada es proporcional al volumen del cuerpo que ella encierra.

Ejercicio: Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, demuestre que si f es armónico entonces el flujo de $f \nabla f$ a través de una superficie cerrada nunca es entrante al cuerpo que ella encierra.

Síntesis de definiciones y enunciados: S-10A, versión 1.1

Observación: Considere un campo \vec{f} y sus correspondientes líneas de campo. Si en un punto del espacio “nacen” líneas de campo, se dice que es un **punto fuente**. En cambio, si en él “terminan” líneas de campo, se dice que es **punto sumidero**. Puede haber más de un punto de este tipo, o ninguno.



En ambos ejemplos se agrega, en color rojo, una superficie cerrada ∂D que encierra al punto y que supondremos orientada hacia afuera del cuerpo D que ella encierra.

En el caso de “punto fuente”, el campo atraviesa a la superficie también “hacia afuera”, resultarán todos los $\vec{f} \cdot \vec{n} > 0$, con lo cual $\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma > 0$.

Cuando es “punto sumidero”, el campo atraviesa a la superficie “hacia adentro”, resultarán todos los $\vec{f} \cdot \vec{n} < 0$, con lo cual $\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma < 0$.

¿Qué ocurre si $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y $\nabla \cdot \vec{f} \equiv 0$?, **caso de campo solenoidal**.

En este caso, sin importar en qué sector del espacio ubiquemos la superficie cerrada, resulta:

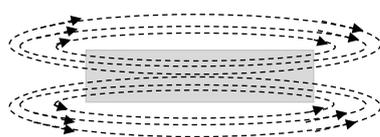
$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D \underbrace{\text{div}(\vec{f})}_{=0} dx dy dz = 0,$$

es decir, nunca logramos encerrar a punto fuente ni a punto sumidero. Es porque no existen.

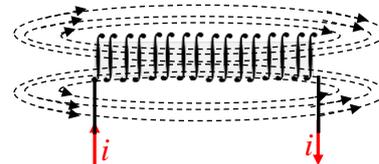
Conclusión, si el campo es solenoidal las líneas de campo no tienen origen ni fin, no existen puntos fuente ni sumidero.

Un ejemplo importante de campo solenoidal es el campo *inducción magnética* \vec{B} , en este caso las líneas de campo son cerradas, $\text{div}(\vec{B}) \equiv 0$.

En las figuras de abajo se representa la forma básica de las líneas de \vec{B} en el caso de un imán recto y de un solenoide por el que circula una corriente eléctrica de intensidad i (circulación de corriente indicada en sentido convencional). Son líneas cerradas que no se cortan entre sí.



Aspecto básico de las líneas de campo en un imán recto, las líneas son cerradas y no se cortan.



Líneas de campo generado por la circulación de corriente eléctrica en un solenoide (arrollamiento de alambre conductor)

Nota: No intente una realización práctica casera del solenoide, la alimentación para que circule corriente debe hacerse en forma adecuada para no producir un accidente que afecte la seguridad física de las personas y de los elementos.

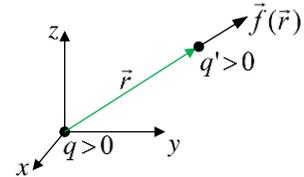
Síntesis de definiciones y enunciados: S-10A, versión 1.1

Carga eléctrica (noción): Un cuerpo eléctricamente neutro es aquel que tiene igual cantidad de electrones que de protones, alcanza con hacerlo tocar con la tierra (planeta tierra) para que esto ocurra. Existen procedimientos que, en ciertos cuerpos, permiten producir un desbalance de las mencionadas cantidades. Cuando esto se produce, se dice que el cuerpo adquiere carga eléctrica (se mide en Coulomb). Si al cuerpo neutro se le quitan electrones (de carga negativa), queda cargado positivamente. Si se le agregan adquiere carga negativa. Dos cuerpos con carga eléctrica del mismo signo se repelen, de distinto signo se atraen.

Si imaginamos cuerpos puntuales eléctricamente cargados, la fuerza que se genera entre ambos –con cargas eléctricas q y q' – es directamente proporcional al producto $q q'$ e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos.

Supongamos el caso de la figura, donde el cuerpo puntual con carga q está fijo en el origen de coordenadas, y el de carga q' está ubicado en el punto $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. La fuerza entre ellos es:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \vec{f}(x, y, z) = k \frac{q q'}{\|(x, y, z)\|^2} \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|}, \text{ con } k > 0 \text{ constante.}$$



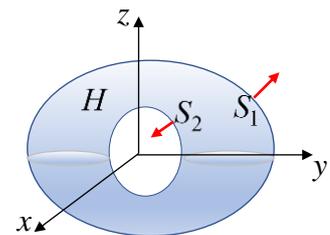
Siendo $\vec{r} = \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|}$ el versor que apunta desde el origen hacia el punto $\vec{r} = (x, y, z)$, si denotamos $r = \|\vec{r}\|$, también se puede indicar $\vec{f}(\vec{r}) = k q q' \vec{r} / r^3$. El campo electrostático generado por el cuerpo puntual en el origen es, por definición, $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r}) / q'$ donde q' se denomina “carga de prueba” y –por convención– se la considera positiva. ⁽³⁾

La orientación de \vec{E} depende del signo de q , la carga del cuerpo puntual que lo genera. Si $q > 0$ el origen es un punto fuente, las líneas de campo son salientes, al poner una carga de prueba $q' > 0$ tenderá –por efectos del campo– a alejarse del origen. Si $q < 0$ el origen es un punto tipo sumidero, las líneas se orientan hacia él indicando que una $q' > 0$ será atraída hacia el origen.

Notemos que $\vec{E}(x, y, z) = k q (x, y, z) / \|(x, y, z)\|^3$ está definido en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$, en el origen no hay campo, allí está la carga que lo genera. Derivando, se invita a demostrar que $\text{div}(\vec{E}) \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$. Si quisiéramos calcular $\iint_{\partial D} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma$, donde ∂D es una superficie cerrada que rodea al origen, no podemos aplicar el teorema de la divergencia porque no se cumplen sus hipótesis. Se requiere que $\vec{E} \in C^1$ en todo punto de ∂D y el cuerpo D del cual es frontera, y eso no se cumple pues \vec{E} no está definido en el origen que es punto interior de D .

Pero es interesante observar el esquema de la derecha, aquí tenemos un cuerpo H que no incluye al origen y tiene como frontera $\partial H = S_1 \cup S_2$.

En este caso podemos aplicar el teorema de la divergencia orientando las superficies como se indica en el dibujo, hacia afuera del cuerpo. Entonces: $\iint_{\partial H} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_H \underbrace{\text{div}(\vec{E})}_{=0} dx dy dz = 0$.



Como $\iint_{\partial H} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \rightarrow \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = - \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma$, de donde:

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Esta última nos dice que el flujo de \vec{E} es el mismo si se calcula a través de dos superficies cualesquiera que rodean el origen, mientras que sean orientadas de la misma forma. En este caso ambas, S_1 y S_2 consideradas individualmente, están orientadas en forma saliente del cuerpo del que cada una de ellas es frontera y contiene al origen. Falta calcular cuál es el valor de dicho flujo.

⁽³⁾ La intensidad del campo se mide en N/Coul (Newton/Coulomb) que es equivalente a V/m (Volt/metro).

Dado que con cualquier superficie Σ que rodee al origen se obtiene el mismo resultado y la expresión del campo es:

$$\vec{E}(x, y, z) = k q \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|^3} = k q \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

lo más razonable es trabajar con una superficie esférica, por ejemplo, de radio 1. En este caso, al evaluar \vec{E} en puntos de la superficie el denominador será igual a $(1)^{3/2} = 1$.

Podemos parametrizar la superficie usando coordenadas esféricas con $\rho = 1$, es decir, la ecuación de Σ resulta:

$$\vec{X} = \underbrace{(\text{sen}(\varphi)\cos(\theta), \text{sen}(\varphi)\text{sen}(\theta), \cos(\varphi))}_{\vec{F}(\varphi, \theta)} \text{ con } 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

En este caso resulta:

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D \vec{E}(\vec{F}(\varphi, \theta)) \cdot \frac{\vec{F}'_{\varphi} \times \vec{F}'_{\theta}}{\|\vec{F}'_{\varphi} \times \vec{F}'_{\theta}\|} \|\vec{F}'_{\varphi} \times \vec{F}'_{\theta}\| d\theta d\varphi,$$

donde D queda definido por $0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$.

Además, puede verificar que $\vec{F}'_{\varphi}(\varphi, \theta) \times \vec{F}'_{\theta}(\varphi, \theta) = (\text{sen}^2(\varphi)\cos(\theta), \text{sen}^2(\varphi)\text{sen}(\theta), \text{sen}(\varphi)\cos(\varphi))$, que (por ejemplo) en el 1º octante tiene las tres componentes positivas. Es decir, orienta a la superficie hacia afuera de la esfera que encierra.

Por su parte, el producto $\vec{E}(\vec{F}(\varphi, \theta)) \cdot \vec{F}'_{\varphi} \times \vec{F}'_{\theta} = k q \text{sen}(\varphi)$, entonces:

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D k q \text{sen}(\varphi) d\theta d\varphi = k q \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^{\pi} \text{sen}(\varphi) d\varphi}_{-[\cos(\varphi)]_0^{\pi}} = 2k q \int_0^{2\pi} d\theta = 4k \pi q.$$

Esto responde a la ley de Gauss para \vec{E} , “el flujo del campo electrostático a través de una superficie que encierra una carga eléctrica, no depende de la superficie y es proporcional a la cantidad de carga encerrada”.

Si Ud. piensa que esta forma de resolver el cálculo de flujo usando coordenadas esféricas es complicada, tiene razón. Puede decirse que es elegante, pero para el que maneja esto con cierta facilidad.

Lo invito a resolverlo comenzando a plantearlo en cartesianas, va a ver que lo calcula en cuatro pasos y sin tantos senos y cosenos. Recuerde que tiene que dividir la superficie esférica en dos, por ejemplo, para $z = -\sqrt{\dots}$ y $z = \sqrt{\dots}$.

Los temas correspondientes al T.P. X continúan en la Síntesis S-10B