

Esta síntesis no es un apunte de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

Teorema del rotor o de Stokes

Considere la curva Γ , una superficie Σ que tiene a Γ como borde y un campo vectorial $\vec{f}$, si:

1. Γ es una curva cerrada, simple y suave a trozos en $\mathbb{R}^3$.
2. Σ es una superficie abierta, suave a trozos y orientable que tiene a Γ como borde y, en cada trozo, admite una parametrización mediante una función C^2 .
3. $\vec{f} \in C^1$ en todo punto de Γ y Σ , o en conjunto abierto que las incluya.

Entonces,

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \text{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{n} d\sigma, \quad (1)$$

donde Γ^+ simboliza la circulación de Γ en sentido positivo en relación con la orientación dada a Σ . Es decir, la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Γ es igual al flujo del rotor de $\vec{f}$ a través de Σ .

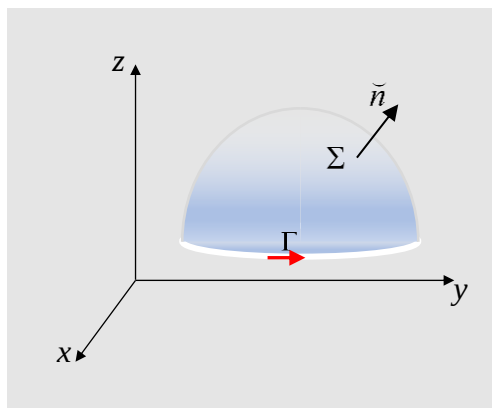
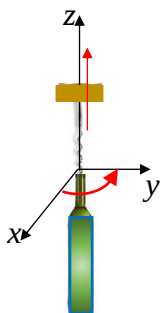
Corresponde hacer los siguientes comentarios.

- a) Puede elegirse “cualquier superficie” que cumpla con las hipótesis indicadas en “2.”⁽¹⁾
- b) Con la terna xyz indicada en el dibujo, las orientaciones relativas entre curva y superficie deben ser tales que: “una persona que recorra la curva en el sentido de circulación elegido, si su cabeza está orientada según $\vec{n}$, debe observar la superficie a su izquierda”.

Regla práctica para orientación

En la figura inferior izquierda se representa un sacacorchos que, si se lo hace girar 90° desde x^+ a y^+ va a moverse con la orientación de z^+ (saliendo del corcho). El giro y el movimiento se indican en color rojo. Cuando se cumple esto, se dice que estamos trabajando con **terna xyz derecha** o **dextrógira**.

La regla práctica con terna derecha, es usar la **mano derecha** como se indica en el gráfico de la derecha. Imaginando que tomamos la curva con la mano derecha, apuntando el pulgar en el sentido de la circulación, los otros dedos nos indican la orientación que debemos adoptar para la normal a la superficie, eso se observa en la imagen del centro, observe la orientación de la curva (en rojo) y el $\vec{n}$ hacia arriba.



⁽¹⁾ Observe que Γ es el borde de la superficie y no su frontera. No es posible identificarla como su frontera pues todos los puntos de una superficie son puntos frontera de la misma.

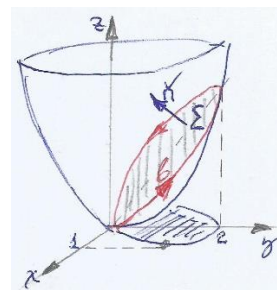
Ejemplo: Dada la curva C intersección de las superficies de ecuaciones $z = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 = 2y$, calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de C con la orientación $(0,0,0) \rightarrow (1,1,2) \rightarrow (0,2,4) \rightarrow \dots \rightarrow (0,0,0)$, sabiendo que $\vec{f}(x, y, z) = (z^2, xz, g(y))$ con g' continua en $\mathbb{R}$.

Veamos el planteo mediante el teorema del rotor.

La curva viene dada por:

$$C = \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases} \equiv \begin{cases} z = 2y \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases} \equiv \begin{cases} z = 2y \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases},$$

como es una curva plana pues está incluida en el plano de ecuación $z = 2y$, usaremos dicho plano como superficie Σ que tiene como borde a la curva.



Observando el gráfico vemos que, para la orientación de circulación solicitada (que indicaremos con C^+) el versor normal a la superficie debe estar orientado hacia z^+ .

$$\text{rot}(\vec{f}(x, y, z)) = \nabla \times \vec{f}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^2 & xz & g(y) \end{vmatrix} = (g'(y) - x, 2z, z).$$

Ecuación de la superficie $\vec{X} = \underbrace{(x, y, 2y)}_{\vec{F}(x, y)}$ con $(x, y) \in D_{xy}$ definido por $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$, con lo

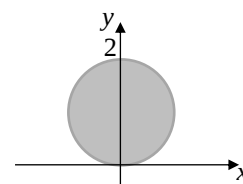
$$\text{cual, } \vec{n} = \vec{F}'_x(x, y) \times \vec{F}'_y(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (0, -2, 1) \text{ que cumple con la orientación deseada.}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \iint_{\Sigma} \text{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \text{rot}(\vec{f})(\vec{F}(x, y)) \cdot \frac{(0, -2, 1)}{\|(0, -2, 1)\|} \|(0, -2, 1)\| dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} \underbrace{(g'(y) - x, 4y, 2y) \cdot (0, -2, 1)}_{-6y} dx dy = -6 \iint_{D_{xy}} y dx dy \end{aligned}$$

La frontera de D_{xy} es $x^2 + y^2 = 2y$ que pasada a polares resulta $r = 2\text{sen}(\theta)$.

Dado que D_{xy} es el círculo dibujado a la derecha, con centro en $(0,1)$ y radio 1, resolviendo la integral en coordenadas polares es:



$$\begin{aligned} \oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} &= -6 \iint_{D_{xy}} y dx dy = -6 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\text{sen}(\theta)} r \text{sen}(\theta) r dr = -16 \int_0^\pi \text{sen}^4(\theta) d\theta \\ &= -16 \left[\frac{3}{8}\theta - \frac{1}{4}\text{sen}(2\theta) + \frac{1}{32}\text{sen}(4\theta) \right]_0^\pi = -6\pi. \end{aligned}$$

Ejercicio: Verifique que todo campo de gradientes $\vec{f} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ es irrotacional.

Ejemplo: Dado $\vec{f}(x, y, z) = (xy, x^2 + h(y), yz - x^2)$ con h' continua en $\mathbb{R}$, calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva C de ecuación $\vec{X} = (1 + \cos(t), 2 + \sin(t), 4)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, orientada según lo impone esta parametrización. (T.P. X – ítem 34)

En este caso no es posible calcular la circulación mediante una integral de línea porque no se conoce la expresión de h .

La parametrización de C impone $(x, y, z) = (1 + \cos(t), 2 + \sin(t), 4)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, que equivale a decir que la curva puede expresarse como intersección de dos superficies como sigue.

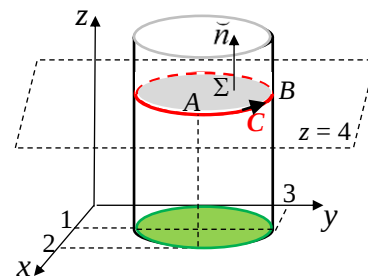
$$C = \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ z = 4 \end{cases},$$

es decir, es la intersección de una superficie cilíndrica con el plano de ecuación $z = 4$ como se indica en el esquema.

Denotando $\vec{g}(t) = (1 + \cos(t), 2 + \sin(t), 4)$, vemos que:

$$A = \vec{g}(0) = (2, 2, 4), \quad B = \vec{g}(\pi/2) = (1, 3, 4),$$

con lo cual surge la orientación de C que se indica y denotaremos C^+

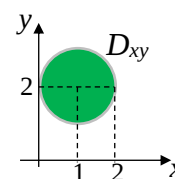


Por otra parte, $\nabla \times \vec{f}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & x^2 + h(y) & yz - x^2 \end{vmatrix} = (z, 2x, x)$ no depende de h .

Entonces podemos aplicar el teorema del rotor usando como superficie el trozo de plano Σ de ecuación:

$$z = 4 \quad \text{con} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1,$$

del cual la curva C es el borde.



La orientación de Σ , dada por $\vec{n}$, surge del esquema.

Con esto queda:

$$\oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \nabla \times \vec{f}(x, y, 4) \cdot (0, 0, 1) dx dy = \iint_{D_{xy}} x dx dy,$$

donde D_{xy} es el círculo representado en color verde, proyección de Σ sobre el plano xy .

Como el centro no está en el origen, para usar polares, podemos plantear $x-1 = r \cos(\theta)$ e $y-2 = r \sin(\theta)$. Es decir $(x, y) = (1 + r \cos(\theta), 2 + r \sin(\theta))$, con esto estamos imponiendo una traslación de ejes y las polares las planteamos respecto de un nuevo par de ejes paralelos a los ejes x e y pero con origen en $(1, 2)$, punto que resulta para $r = 0$.

El jacobiano no cambia porque cuando derivamos las constantes aditivas ("1" y "2") se anulan, entonces resulta:

$$\oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{D_{xy}} x dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 + r \cos(\theta)) r dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos(\theta) \right) d\theta$$

$$\left[\frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{3} r^3 \cos(\theta) \right]_0^1 \quad \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \sin(\theta) \right]_0^{2\pi}$$

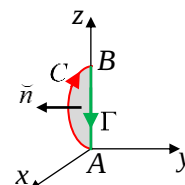
$$\oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \pi.$$

Ejemplo: Dado $\vec{f}(x, y, z) = (xy, x^2 + h(y), 5 + yz - x^2)$ con h' continua en $\mathbb{R}$, calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva C de ecuación $x^2 + 4(z-2)^2 = 16$ con $x \geq 0$ en el plano xz , desde $(0,0,0)$ hasta $(0,0,4)$.

Nuevamente, como en el ejemplo anterior, no podemos calcular la circulación mediante una integral de línea porque no conocemos la expresión de la función h .

A ello se agrega que la curva es abierta, según se indica en el dibujo. Pero podemos cerrarla agregando el segmento Γ de puntos extremos $A = (0,0,0)$ y $B = (0,0,4)$.

Con ello consideramos la superficie Σ que es el trozo de plano xz limitado por C y Γ , que se representa sombreado en gris.



Por otra parte, $\nabla \times \vec{f}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & x^2 + h(y) & 5 + yz - x^2 \end{vmatrix} = (z, 2x, x)$ no depende de h .

Aplicando el teorema del rotor, si denotamos $\lambda = C \cup \Gamma$ a la curva borde de Σ e indicamos con λ^+ la orientación de circulación deseada, se tiene que:

$$\underbrace{\oint_{\lambda^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}}_{\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\Gamma_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s}} = \iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{D_{xz}} (z, 2x, x)_{y=0} \cdot (0, -1, 0) dx dz = -2 \iint_{D_{xz}} x dx dz$$

de donde:

$$\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -2 \iint_{D_{xz}} x dx dz - \int_{\Gamma_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad (\#)$$

El segmento Γ puede parametrizarse $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ con $0 \leq z \leq 4$, pero así tiene orientación opuesta a la deseada, entonces:

$$\int_{\Gamma_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = - \int_{\Gamma_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = - \int_0^4 \underbrace{\vec{f}(\vec{g}(z))}_{(0, h(0), 5)} \cdot \underbrace{\vec{g}'(z)}_{(0, 0, 1)} dz = -5 \int_0^4 dz = -20.$$

Para la integral doble, D_{xz} es $x^2 + 4(z-2)^2 \leq 16$ con $x \geq 0$.

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{(z-2)^2}{2^2} \leq 1 \quad \text{con } x \geq 0$$

Conviene usar polares generalizadas incluyendo una traslación para trabajar con origen en el punto $(0,2)$, es decir:

$$(x, z) = (4r \cos(\theta), 2 + 2r \sin(\theta)),$$

el valor absoluto del jacobiano no cambia, es: $abr = 8r$.

Entonces, $\iint_{D_{xz}} x dx dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \underbrace{4r \cos(\theta) 8r}_{\frac{32}{3} \cos(\theta) [r^3]_0^1} dr = \frac{32}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos(\theta)}_{[\sin(\theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2}} d\theta = \frac{64}{3}.$

Reemplazando en (#) resulta:

$$\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -2 \frac{64}{3} - (-20) = -\frac{68}{3}.$$

Los temas correspondientes al TP X se completan en la Síntesis S-10D