Esta síntesis <u>no es un apunte</u> de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

Análisis de existencia de función potencial

Centramos ahora nuestro interés en analizar si un campo vectorial $\vec{f}: H \subset \Re^m \to \Re^m$ admite función potencial $\phi: H \subset \Re^m \to \Re$, tal que $\vec{f} = \nabla\phi$ en todo punto de H.

Vamos a trabajar suponiendo que se cumplen las hipótesis del teorema de Green o del teorema de Stokes, según corresponda, acorde a lo indicado en las Síntesis S-10B y S-10C.

Recordemos que, entre otras hipótesis,

- para Green se supone que $\vec{f} \in C^1$ en un conjunto abierto que incluya a D y ∂D
- para Stokes se supone que $\vec{f} \in C^1$ en un conjunto abierto que incluya a Γ y Σ

Supondremos que H es ese conjunto abierto y agregamos que sea conexo. En este caso, de existir función potencial, la matriz jacobiana $D\vec{f}$ es simétrica (Síntesis S-7C, pág. 3/7).

Suponiendo $D\vec{f}$ continua y simétrica en H abierto y conexo, notemos que:

- $D\vec{f}$ continua en H es equivalente a $\vec{f} \in C^1(H)$
- $D\vec{f}$ simétrica en H nos dice que…
  a) … para Green, con $\vec{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, resulta $Q'_x(x,y) = P'_y(x,y)$.
  b) … para Stokes, resulta equivalente a $\text{rot}(\vec{f}) \equiv \vec{0}$.

También corresponde recordar que si $\vec{f} = \nabla\phi$ en todo punto de H, $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 \ \ \forall C \subset H$. [1]

Luego de esta revisión de conceptos previos, corresponde enunciar el siguiente teorema.

<u>Teorema</u>: Sea $\vec{f}: H \subset \Re^m \to \Re^m$ continuo en H abierto y conexo, si se cumple que

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 \ \ \forall C \subset H,$$

entonces existe $\phi: H \subset \Re^m \to \Re$ tal que $\vec{f} = \nabla\phi$ en todo punto de H.

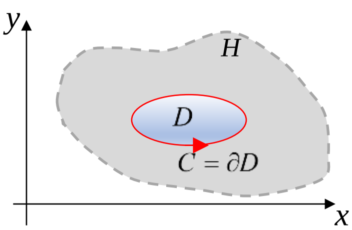
Este teorema es el que nos permite demostrar la existencia de función potencial, cuando logremos justificar que toda integral de línea en camino cerrado resulta nula. Para esto usaremos los teoremas de Green o de Stokes, según corresponda.

Por último, se invita a recordar el concepto de conjunto simplemente conexo comentado en las pág. 4/7 y 5/7 de la Síntesis S-7C.

[1] Ver Síntesis S-7C, pág. 1/7.

<u>*Propiedad*</u>: Sea $\vec{f}: H \subset \Re^m \to \Re^m$, si $D\vec{f}$ es continua y simétrica en H abierto y simplemente conexo, entonces existe ϕ tal que $\vec{f} = \nabla \phi$ en todo punto de H.

Sea $H \subset \Re^2$. Al ser simplemente conexo, no tiene agujeros, en el sentido que $D\vec{f}$ continua y simétrica en todo punto de cualquier conjunto $D \subset H$ y su frontera ∂D. Entonces se puede aplicar el teorema de Green, con lo cual, siendo $\vec{f} = (P, Q)$,



$$\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D \underbrace{[Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)]}_{\substack{=0\,, \\ \text{pues } D\vec{f} \text{ es simétrica}}} \, dx\, dy = 0 \quad \forall C = \partial D \subset H\,. \qquad (1)$$

Esto demuestra que existe función potencial.

Si $H \subset \Re^3$ el razonamiento es similar, siendo H simplemente conexo, toda curva C cerrada trazada en él permite imaginar una superficie $\Sigma \subset H$ que la tiene como borde. Como $D\vec{f}$ es continua en H podemos aplicar el teorema del rotor resultando:

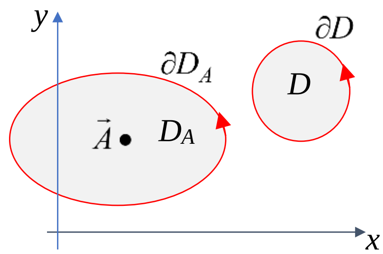
$$\oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma \underbrace{\text{rot}(\vec{f})}_{\substack{=\vec{0}\,, \\ \text{pues } D\vec{f} \\ \text{simétrica}}} \cdot \breve{n}\, d\sigma = 0 \quad \forall C \subset H \text{, entonces existe función potencial.}$$

Esta propiedad había sido enunciada(2) y con ella trabajamos en el T.P VII, el problema es ¿qué ocurre si H no es simplemente conexo? Veamos pautas de trabajo en estos casos.

Caso básico en el plano

Sea $\vec{f}: \Re^2 - \{\vec{A}\} \to \Re^2$, con $D\vec{f}$ continua y simétrica en su dominio.

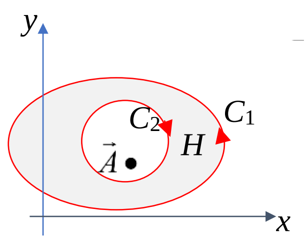
$\Re^2 - \{\vec{A}\}$ no es simplemente conexo, entonces veamos el gráfico de la derecha donde se indican dos tipos de curvas, las que rodean al punto $\vec{A}$ y aquellas que no lo rodean.



Para todo ∂D que no rodea a $\vec{A}$, como $f \in C^1$ en ∂D y D, según (1) resulta $\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$.

Pero para ∂D_A no se puede aplicar Green, porque en $\vec{A}$ el campo no es C^1.

Sin embargo, observando el gráfico de la derecha, trabajemos alrededor de $\vec{A}$ y dibujemos dos curvas C_1 y C_2 tal que $\partial H = C_1 \cup C_2$. Aquí sí se puede aplicar Green resultando, como antes: $\oint_{\partial H^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 \to \oint_{C_1^{\circlearrowleft}} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \oint_{C_2^{\circlearrowright}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$,



$$\oint_{C_1^{\circlearrowleft}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\oint_{C_2^{\circlearrowright}} \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad \to \quad \oint_{C_1^{\circlearrowleft}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_2^{\circlearrowleft}} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

Conclusión, mientras se respete un sentido de circulación, la circulación alrededor de $\vec{A}$ no depende de la curva que se utilice. Si con una curva se obtiene resultado nulo, con cualquier otra también.

En ese caso, tanto para las curvas que rodean al punto como para las que no lo hacen tendremos resultado nulo y podremos concluir que existe función potencial.

(2) Ver pág. 5/7 de la Síntesis S-7C.

La regla práctica es la siguiente, se calcula $\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{s}$ donde C es una curva que rodea al punto $\vec{A}$, …

- … si $\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{s} \neq 0$ no existe función potencial en $\Re^2 - \{\vec{A}\}$
- … si $\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0$ existe función potencial en $\Re^2 - \{\vec{A}\}$

Se puede demostrar que si hubiera más de un punto donde $\vec{f} \notin C^1$, para demostrar que existe función potencial alcanza con verificar que la circulación es nula alrededor de cada uno de ellos en forma individual (sin rodear a otro(s)).

<u>Ejemplo</u>: Si $\vec{E}(x,y) = k\,q\,\frac{(x,\,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ con k,q constantes no nulas y $k>0$, es una *versión plana* del campo electrostático generado por una carga puntual *q* en el origen de coordenadas. [3]

Se invita a verificar que su matriz jacobiana $D\vec{E}$ es continua y simétrica en $\Re^2 - \{\vec{0}\}$.
Entonces, para analizar si admite función potencial debemos calcular su circulación alrededor del origen, por ejemplo, con una circunferencia de radio 1 centrada en (0,0).

La ecuación de *C* puede escribirse $\vec{X} = \overbrace{(\cos(t), \text{sen}(t))}^{\vec{g}(t)}$ con $0 \le t \le 2\pi$, aquí no interesa analizar la orientación de la curva, sólo queremos saber sin la integral resulta nula o no.

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\vec{E}(\vec{g}(t))}_{k\,q\,(\cos(t),\,\text{sen}(t))} \cdot \underbrace{\vec{g}\,'(t)}_{(-\text{sen}(t),\,\cos(t))} \, dt = k\,q \int_0^{2\pi} 0\; dt = 0\,.$$

Conclusión, el campo $\vec{E}$ admite función potencial en $\Re^2 - \{\vec{0}\}$.

Mediante el procedimiento correspondiente, el lector podrá verificar que una función potencial es $\phi(x,y) = \frac{-k\,q}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Las líneas equipotenciales son circunferencias con centro en el origen.

Por lo comentado en pág. 2/7 de S-7C, en física se usará $U(x,y) = -\phi(x,y) = \frac{k\,q}{\sqrt{x^2+y^2}}$, con lo cual $\vec{E} = \nabla\phi = -\nabla U$ y el potencial tiende a 0 para puntos cada vez más alejados del origen.

<u>Ejemplo</u>: Analice si $\vec{f}(x,y) = (-y,x)/(x^2+4y^2)$ admite función potencial en $\Re^2 - \{\vec{0}\}$.

En este caso $D\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy/(x^2+4y^2)^2 & (4y^2-x^2)/(x^2+4y^2)^2 \\ (4y^2-x^2)/(x^2+4y^2)^2 & -8xy/(x^2+4y^2)^2 \end{pmatrix}$ que es continua y simétrica en $\Re^2 - \{\vec{0}\}$. Ahora calculamos una circulación alrededor del origen, en este caso nos conviene usar una elipse para que resulte sencilla la evaluación de $\vec{f}$ en puntos de C. Por ejemplo, usamos $x^2+4y^2=1$ que admite ecuación vectorial $\vec{X} = \underbrace{(\cos(t),\, \tfrac{1}{2}\text{sen}(t))}_{\vec{g}(t)}$ con $0 \le t \le 2\pi$.

$$\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\vec{f}(\vec{g}(t))}_{(-\frac{1}{2}\text{sen}(t),\,\cos(t))} \cdot \underbrace{\vec{g}\,'(t)}_{(-\text{sen}(t),\,\frac{1}{2}\cos(t))} \, dt = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi \neq 0$$

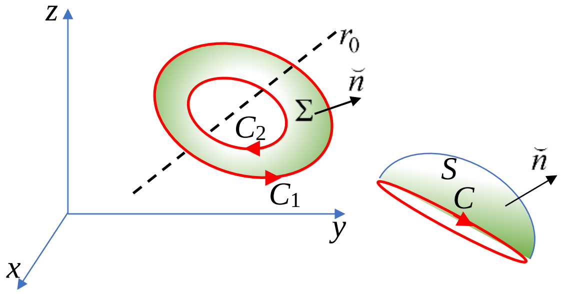
Conclusión, el campo no admite función potencial en $\Re^2 - \{\vec{0}\}$.

[3] Ver pág. 5/6 de la Síntesis S-10A.

Caso básico en el espacio xyz

Sea $\vec{f}:\Re^3 - r_0 \to \Re^3$, donde r_0 es una recta y $D\vec{f}$ continua y simétrica en su dominio.

$\Re^3 - r_0$ no es simplemente conexo, entonces veamos el gráfico de la derecha donde se indican dos tipos de curvas, las que rodean a la recta r_0 y aquellas que no la rodean.



Para C que no rodea a r_0, se puede trazar la superficie S que la tiene como borde y no tiene puntos de la recta.

En esta situación se puede aplicar el teorema del rotor, aquí también tendremos,

$$\oint_{C^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma \underbrace{\mathrm{rot}(\vec{f})}_{\substack{=\vec{0}\,,\\ \text{pues } D\vec{f}\\ \text{simétrica}}} \cdot \breve{n}\, d\sigma = 0 \quad \forall C \text{ que no rodea a la recta } r_0 .$$

En el otro caso, similar que en $\Re^2$, dibujamos dos curvas C_1 y C_2, ambas alrededor de r_0 y un superficie Σ tal que $C_1 \cup C_2$ es su borde. La recta no toca a la superficie ni a las curvas, en esa región podemos aplicar el teorema el rotor obteniendo que:

$$\oint_{C_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} + \oint_{C_2} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma \underbrace{\mathrm{rot}(\vec{f})}_{=\vec{0}} \cdot \breve{n}\, d\sigma = 0 \;\; \to \;\; \oint_{C_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -\oint_{C_2} \vec{f}\cdot d\vec{s} \;\; \to \;\; \oint_{C_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \oint_{C_2} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

Nuevamente vemos que, mientras se respete un sentido de circulación, la circulación alrededor de r_0 no depende de la curva que se utilice.

Si con una curva se obtiene resultado nulo, con cualquier otra también. En ese caso, tanto para las curvas que rodean a la recta como para las que no lo hacen tendremos resultado nulo y podremos concluir que existe función potencial.

Así, la regla práctica es similar a la indicada para trabajar en el plano. También se puede demostrar que si hubiera más de un elemento donde $\vec{f} \notin C^1$, para demostrar que existe función potencial alcanza con verificar que la circulación es nula alrededor de cada uno de ellos en forma individual (sin rodear a otro(s)).

<u>Ejemplo</u>: $\vec{E}(x,y,z) = k\,q\,\dfrac{(x,\,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ con k,q constantes no nulas y $k>0$, es el campo electrostático generado por una carga puntual q ubicada en el origen de coordenadas.

El lector podrá verificar que la matriz jacobiana $D\vec{E}$ es continua y simétrica en $\Re^3 - \{\vec{0}\}$, como este conjunto es simplemente conexo, podemos afirmar que existe función potencial.

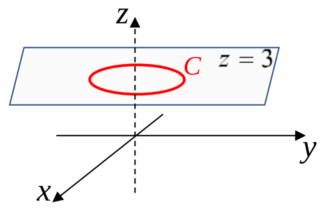
La simetría de $D\vec{E}$ equivale a rotor nulo en $\Re^3 - \{\vec{0}\}$.

Mediante el procedimiento correspondiente podrá verificar que una función potencial para $\vec{E}$ es $\phi(x,y,z) = \dfrac{-k\,q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ en $\Re^3 - \{\vec{0}\}$.

Recordamos que en física usarán $U(x,y,z) = -\phi(x,y,z) = \dfrac{k\,q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ en $\Re^3 - \{\vec{0}\}$, para que $\vec{E} = \nabla\phi = -\nabla U$. Las superficies equipotenciales son superficies esféricas con centro en el origen y el potencial tiende a 0 para puntos cada vez más alejados del origen.

<u>Ejemplo</u>: Analice si $\vec{f}(x,y,z) = (\frac{2y}{2x^2+3y^2}\,,\,\frac{-2x}{2x^2+3y^2}\,,\,z^2)$ admite función potencial en su dominio natural.

El dominio natural está formado por todos los puntos (x,y,z) tales que $2x^2+3y^2 \neq 0$, es decir, no incluye puntos del tipo $(0,0,z)$ que son los eje *z*.



Por lo tanto, es "$\Re^3 -$ eje z", que no es simplemente conexo. Por ello, en el dibujo, el eje z se representa en líneas de puntos.

Calculando la matriz jacobiana resulta:

$$D\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{-8xy}{(2x^2+3y^2)^2} & \frac{4x^2-6y^2}{(2x^2+3y^2)^2} & 0 \\ \frac{4x^2-6y^2}{(2x^2+3y^2)^2} & \frac{12xy}{(2x^2+3y^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}$$ continua y simétrica en $\Re^3 -$ eje z.

Ahora calculamos la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de una curva que rodee al eje z, por ejemplo, la elipse de ecuación $2x^2+3y^2=1$ en el plano $z=3$ que admite ecuación vectorial:

$$\vec{X} = \underbrace{(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(t),\, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}(t), 3)}_{\vec{g}(t)} \quad \text{con} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Entonces,

$$\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\vec{f}(\vec{g}(t))}_{(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}(t),\, \frac{-2}{\sqrt{2}}\cos(t),\, 9)} \cdot \underbrace{\vec{g}\,'(t)}_{(\frac{-1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(t),\, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(t),\, 0)} dt = -\tfrac{2}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi} dt = -\tfrac{4}{\sqrt{6}}\pi \neq 0\,.$$

Conclusión, $\vec{f}$ no admite función potencial en $\Re^3 -$ eje z.