Esta síntesis <u>no es un apunte</u> de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

En la asignatura sólo trabajaremos con funciones $f : D \subset \Re^n \to \Re^m$ y se las clasifica como sigue.

$$\begin{cases} \begin{matrix} m=1 \\ \text{función escalar} \end{matrix} & \begin{cases} n=1: \text{función escalar de una variable.} \\ n>1: \text{función escalar de varias variables o campo escalar.} \end{cases} \\ \\ \begin{matrix} m>1 \\ \text{función vectorial} \end{matrix} & \begin{cases} n=1: \text{función vectorial de una variable.} \\ n>1: \text{función vectorial de varias variables o campo vectorial.} \end{cases} \end{cases}$$

Convención de nomenclatura:
$$\begin{matrix} \bullet \in \Re^p \text{, se interpreta que } p \geq 1. \\ \vec{\bullet} \in \Re^p \text{, se interpreta que } p > 1. \end{matrix}$$

La notación $\vec{\bullet}$ no es obligatoria, sólo se usa como ayuda cuando se quiere resaltar que el elemento $\bullet$ pertenece a un espacio de más de una dimensión.

<u>*Funciones vectoriales*</u>:
Las funciones vectoriales son del tipo $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_m) : D \subset \Re^n \to \Re^m$ con $m > 1$, donde cada componente f_k con $k = 1, \cdots, m$ es una función escalar definida en D.

$$f_k : D \subset \Re^n \to \Re,\ k = 1, \cdots, m$$

Es decir, todas las f_k como componentes de $\vec{f}$ deben estar definidas en único dominio D que pasa a ser el dominio de $\vec{f}$.

<u>Ejemplo</u>: Sea $\vec{f} : D \subset \Re \to \Re^3 \ / \ \vec{f}(u) = (u^2 + 1, \sqrt{u}, 1/u)$, **halle** D.

Cuando se nos pide que hallemos el dominio, se supone que debemos hallar el dominio natural de la función (el "más grande" posible). Recordemos que cada componente debe ser real.

En este caso $u^2 + 1$ está definido en $\Re$, $\sqrt{u}$ en $\Re_0^+$, $1/u$ para $u \neq 0$. Debemos buscar la intersección de cada uno de estos requerimientos, de manera que las tres componentes puedan ser evaluadas en los valores de u que especifiquemos.

Entonces $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ tiene dominio natural $D = \{u \in \Re \ / \ u > 0\}$ y sus componentes son:

- $f_1 : D \subset \Re \to \Re \ / \ f_1(u) = u^2 + 1$
- $f_2 : D \subset \Re \to \Re \ / \ f_2(u) = \sqrt{u}$
- $f_3 : D \subset \Re \to \Re \ / \ f_3(u) = 1/u$

Resaltamos que todas las componentes deben estar definidas en el mismo dominio. De esta manera, más adelante veremos que la función vectorial tiene una determinada propiedad si, y sólo si, sus componentes la tienen (límite, continuidad, derivabilidad, …).

Representaciones geométricas de una función escalar

Sea $f : D \subset \Re^n \to \Re$, se denomina **gráfica de *f*** al conjunto $G_f \subset \Re^{n+1}$ definido por:

$$G_f \doteq \{(x_1,\cdots,x_n,u) \in \Re^{n+1} \;/\; \underbrace{(x_1,\cdots,x_n) \in D \wedge u = f(x_1,\cdots,x_n)}_{\text{ecuación cartesiana de la gráfica}}\},$$

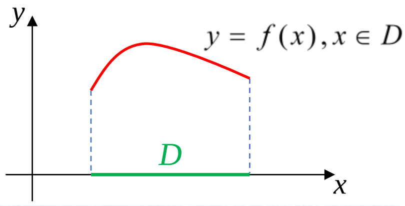
La representación geométrica de G_f es esencialmente práctica para funciones de 1 o de 2 variables.

función escalar de una variable

Para $f : D \subset \Re \to \Re$ podemos indicar:

$$\begin{array}{cc} x_1 & u \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$G_f \doteq \{(x, y) \in \Re^2 \;/\; x \in D \wedge y = f(x)\}$$

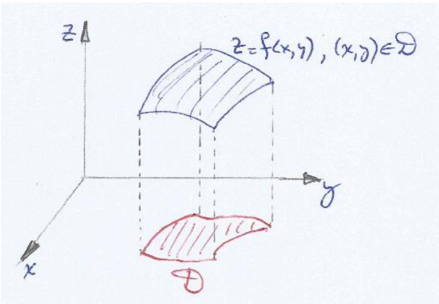


función escalar de dos variables

Para $f : D \subset \Re^2 \to \Re$ podemos indicar:

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & u \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$G_f \doteq \{(x, y, z) \in \Re^3 \;/\; (x,y) \in D \wedge z = f(x,y)\}$$



Por otra parte, siendo $f : D \subset \Re^n \to \Re$ el **conjunto de nivel *k*** de f es $L_k \subset \Re^n$ definido por:

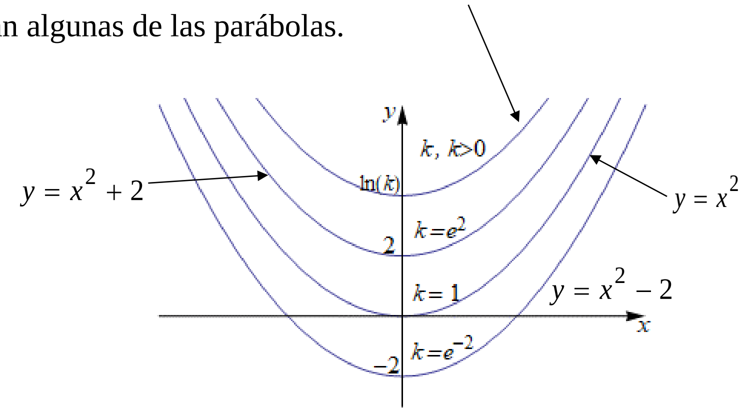
$$L_k \doteq \{X \in \Re^n \;/\; \underbrace{X \in D \wedge f(X) = k}_{\text{ecuación cartesiana de } L_k}\}$$

La representación geométrica de L_k se obtiene identificando gráficamente los puntos del dominio de la función para los cuales el valor de f es igual a k, para graficar no es necesario agregar un eje.

<u>Ejemplo</u>: Dada $f : \Re^2 \to \Re \;/\; f(x,y) = e^{y-x^2}$, halle y represente los conjuntos de nivel k de f.

Como $e^{y-x^2} > 0 \;\; \forall (x,y) \in \Re^2$, sólo tiene sentido considerar $k > 0$. La ecuación cartesiana de L_k es $e^{y-x^2} = k$, $k > 0$, $(x,y) \in \Re^2$. Esto es equivalente a: $y - x^2 = \ln(k)$, $k > 0$, $(x,y) \in \Re^2$.

Por lo tanto L_k es la parábola de ecuación $y = x^2 + \ln(k)$ con $k > 0$, para la representación geométrica se dibujan algunas de las parábolas.



Representaciones geométricas asociadas a una función vectorial

En este caso es típico que interese representar el conjunto imagen. Es decir, siendo:

$$\vec{f}: D \subset \Re^n \to \Re^m \text{ con } m > 1$$

el conjunto imagen es $\mathrm{Im}(\vec{f}) = \{\vec{X} \in \Re^m \,/\, \underbrace{\vec{X} = \vec{f}(U),\, U \in D}_{\substack{\text{ecuación paramétrica} \\ \text{vectorial de Im}(\vec{f})}}\}$.

U representa el parámetro, es una variable real cuando $n = 1$. Si $U = (u, v)$ tendremos dos parámetros que son las variables *u* y *v*, etc.

<u>Ejemplo</u>: Dada $\vec{f}: [0,1] \in \Re \to \Re^2 \,/\, \vec{f}(t) = (t, t^2)$, represente el correspondiente conjunto imagen.

Como las imágenes están en $\Re^2$ la representación debe hacerse en un plano, por ejemplo el *xy*, cuyos puntos genéricos son del tipo $\vec{X} = (x, y)$.

En este caso la <u>*ecuación paramétrica vectorial*</u> es $\vec{X} = (t, t^2)$ con $0 \le t \le 1$, el parámetro es t.

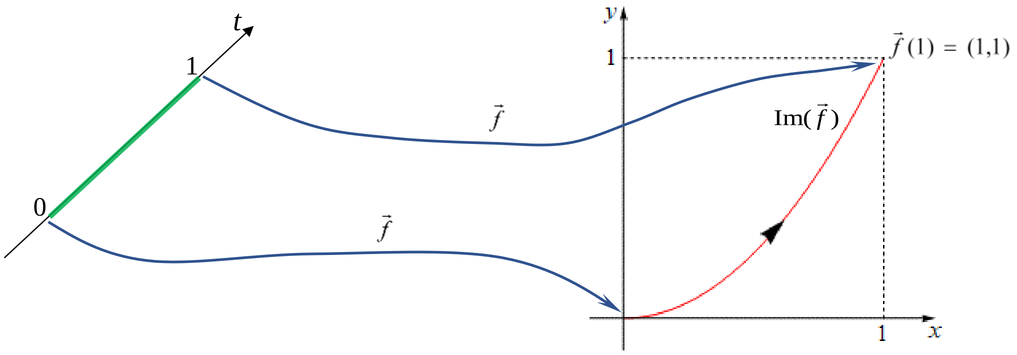
Siendo $\vec{X} = (x, y)$ y $\vec{X} = (t, t^2)$ con $0 \le t \le 1$, debe cumplirse que:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \text{con } 0 \le t \le 1 \;\; : \text{ que son las } \underline{\textit{ecuaciones paramétricas}} \text{ de } \mathrm{Im}(\vec{f}).$$

Eliminando el parámetro entre estas últimas resulta:

$$y = x^2 \text{ con } 0 \le x \le 1 \;\; : \text{ que es la } \underline{\textit{ecuación cartesiana}} \text{ de } \mathrm{Im}(\vec{f}).$$

La ecuación cartesiana de $\mathrm{Im}(\vec{f})$ es la que relaciona las variables del espacio en el que se encuentran las imágenes, sin usar parámetros. En este caso las variables *x* e *y*.



El conjunto imagen se dibujó en color rojo. La flecha colocada sobre él representa el *sentido de los arcos crecientes*, e indica la orientación con que desplaza el punto imagen a medida que el parámetro *t* crece. En este caso desde (0, 0) a (1,1).

LÍMITE

Dada $f : D \subset \Re^n \to \Re^m$ y un punto A que sea punto de acumulación de D, se dice que L es el límite al que tiende $f(X)$ cuando X tiende a A, denotando:

$$\lim_{X \to A} f(X) = L \quad \text{o bien} \quad f(X) \xrightarrow[X \to A]{} L,$$

cuando para todo $E(L)$ existe un $E^*(A)$ tal que, para todo $X \in E^*(A) \cap D$ resulta $f(X) \in E(L)$.

Para funciones escalares las propiedades de los límites son las mismas que se han estudiado para funciones de una variable.

<u>*Teorema*</u>: Dada $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_m) : D \subset \Re^n \to \Re^m$ con $m > 1$,

$$\exists\, \vec{L} = \lim_{X \to A} \vec{f}(X) \Leftrightarrow \exists\, L_k = \lim_{X \to A} f_k(X),\ k = 1, \cdots, m$$

$$\text{siendo } \vec{L} = (L_1, \cdots, L_m)$$

Un vector tiene límite si, y sólo si, sus componentes tienen límite.
El límite del vector se arma con el límite de las componentes.

<u>Ejemplos</u>:

- $\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{u^2-1}{u-1}$ se puede analizar de dos maneras:
  - $\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{u^2-1}{u-1} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{u \to 1} \dfrac{2u}{1} = 2$.
  - $\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{u^2-1}{u-1} = \lim\limits_{u \to 1} \dfrac{(u+1)(u-1)}{u-1} = \lim\limits_{u \to 1} \dfrac{u+1}{1} = 2.$

  En la primera forma aplicamos la regla de L'Hospital, en la segunda eliminamos la indeterminación mediante un proceso algebraico.

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = 1$.

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{|x|} \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{-x} = -1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{|x|}$.

- $\lim\limits_{(x,y) \to (1,2)} x\,y + 3 = 5$, pues $\lim\limits_{(x,y) \to (1,2)} x\,y = 1 \cdot 2 = 2$ y el valor 3 es constante.

- $\lim\limits_{(x,y) \to (1,2)} (x\,y + 3,\ 2x + y) = (5,\ 4)$.

- $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x\,y}{x^2 + 2\,y^2}$. En este caso estamos en problemas. Encontramos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, no se observa una manera algebraica de eliminarla y <u>no existe una regla como la de L'Hospital para expresiones de 2 o más variables</u>.
  Vamos a dejarlo pendiente, necesitamos avanzar con la teoría. Lo analizaremos luego de definir curva.

CONTINUIDAD

Dada $f : D \subset \Re^n \to \Re^m$, se dice que f **es continua** en un punto $A \in D$ cuando $\begin{cases} \bullet\ \exists\ L = \lim\limits_{X \to A} f(X) \\ \bullet\ L = f(A) \end{cases}$.

f es **continua en un conjunto de puntos** $S \subset D$ cuando lo es en todo punto de *S*. En particular, la expresión "f continua" se interpreta como "f continua en su dominio".

<u>*Teorema*</u>: Dada la función vectorial $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_m) : D \subset \Re^n \to \Re^m$ con $m > 1$,

$\vec{f}$ es continua en $A \in D$ si, y sólo si, f_k es continua en *A* con $k = 1, \cdots, m$.

Una función vectorial es continua en un punto si, y sólo si,
todas sus componentes son continuas en dicho punto.

Las funciones escalares continuas más comunes son: valor absoluto, polinomio, logaritmo, exponencial, trigonométrica, raíz cuadrada.
Para funciones escalares continuas también resultan continuas –si quedan definidas– su composición, suma, resta, producto y cociente con denominador no nulo.
Recuerde que la continuidad de una función en un punto es una propiedad que la función puede tener o no tener, pero no tiene sentido preguntarse si una función es continua en un punto que no pertenece al dominio.

Comentario: Un monomio en la variable x tiene la forma $k\,x^n$, donde $k \in \Re - \{0\}$ y *n* es un número natural que se denomina *grado del monomio*. Si se acepta agregar $n = 0$, se tiene la constante como monomio de grado cero. Análogamente:

Un monomio en las variables *x* e *y* tiene la forma $k\,x^n y^m$, su grado es $n + m$.

Un monomio en las variables *x*, *y*, *z* tiene la forma $k\,x^n y^m z^p$, su grado es $n + m + p$.

Y así sucesivamente.

Se denomina polinomio a la suma de monomios, su grado es el del monomio de mayor grado que interviene, por ejemplo:

"$x + 2x^3 - 1$" es un polinomio de grado 3, "$x^3 y^2 + x^4 - 2y$" es un polinomio de grado 5.

<u>Ejemplos</u>:

- $f(x) = \cos(x^2 + 1)$ es continua en $\Re$, por ser composición de funciones continuas.
- $f : \Re_0^+ \to \Re\ /\ f(u) = \sqrt{u}$ es continua en todo su dominio (la raíz cuadrada es continua).
- $f : \Re^2 \to \Re\ /\ f(x, y) = 2x + xy$ es continua en $\Re^2$, por ser polinómica.
- Dada $f(x, y) = \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}$ para $(x, y) \neq (0,0)$, analice la continuidad de la función. Además, analice si se puede definir $f(0,0)$ para que f resulte continua en $\Re^2$ (extensión del dominio por continuidad).

  La función es continua para todo $(x, y) \neq (0,0)$ pues su expresión es cociente de funciones continuas con denominador no nulo.
  Ahora debemos analizar si $f(x, y)$ tiene límite finito cuando $(x, y) \to (0,0)$.

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} \underset{u = x^2 + y^2}{=} \lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} \overset{L'H}{=} \lim_{u \to 0} \frac{e^u}{1} = 1 .$$

  Esto de "pasar a una variable", sólo es válido si se lo hace a través de una función continua.

En este caso x^2+y^2 es continua, por ser un polinomio. Si logramos pasar a una variable nuevamente podemos aplicar la regla de L'Hospital.
Imponiendo entonces $f(0,0)=1$, la función resulta continua en $\Re^2$. En este caso quedaría:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

CURVA

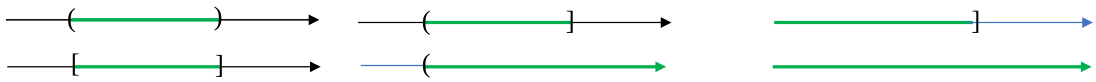
Dada $\vec{g}: I \subset \Re \to \Re^m$ si $\begin{cases} \bullet\ I \text{ es un intervalo} \\ \bullet\ \vec{g} \text{ es continua en } I \end{cases}$, el conjunto imagen de $\vec{g}$ se denomina **curva**.

Denotando con $\vec{X}$ a los puntos genéricos de $\Re^m$, la ecuación paramétrica vectorial de la curva es del tipo $\vec{X}=\vec{g}(t)$ con $t\in I$ donde t es el parámetro.

Dado que un intervalo real I es un conjunto conexo en $\Re$, la curva también es conexa por ser la imagen de un conexo a través de una función continua (*las curvas pueden dibujarse de un solo trazo*).

Es importante resaltar que, desde el punto de vista práctico –por ser conexo– un intervalo real es un "trozo de eje todo junto", incluso todo el eje lo es.

Todos los conjuntos representados en color verde son ejemplos de intervalos reales



<u>Ejemplo</u>: En la página 3 se ha considerado la función vectorial $\vec{f}:[0,1]\in\Re\to\Re^2 \,/\, \vec{f}(t)=(t,t^2)$.
En este caso el conjunto imagen $\mathrm{Im}(\vec{f})$ que se ha dibujado es una curva, pues $[0,1]$ es un intervalo real y la función vectorial $\vec{f}$ es continua, por tener componentes continuas (polinomios).

Suponiendo que $\mathrm{Im}(\vec{g})$ es una curva, es común denotarla con una sola letra ($C,\Gamma,\ldots$). También si en el mismo contexto hay más de una curva se suelen usar subíndices ($C_1,C_2,\ldots$).

<u>Comentario</u>: Trabajando por ejemplo en el plano *xy*, toda expresión del tipo $y=w(x)$ con $x\in I$ con w continua e I un intervalo, es la ecuación cartesiana de una curva pues admite la expresión vectorial:

$$\vec{X}=\underbrace{(x,\,w(x))}_{\vec{g}(x)} \text{ con } x\in I\,,$$

donde $\vec{g}$ es continua por tener componentes continuas. También se podría trabajar expresando x como función de y.
La curva más elemental es la línea recta, por ejemplo: $y=2x+3$ con $x\in\Re$.
Otros casos son la parábola $y=x^2$ con $x\in\Re$, también $x=y^2$ con $y\in\Re$.
Por otra parte, $y=\frac{1}{x}$ con $x\in\Re-\{0\}$ <u>no es</u> la ecuación de una curva. Si bien $1/x$ es continua para todo $x\neq0$, el conjunto $\Re-\{0\}$ no es un intervalo.

LÍMITE POR CURVA

Para analizar el límite de una función f de varias variables, a veces es de ayuda ver qué ocurre cuando nos acercamos al punto desplazándonos por una curva que contenga a dicho punto y esté incluida en el dominio de la función. Respetando la nomenclatura que se usa en el ítem 12, pág. 10, de la Guía de TP corresponde.

Sean $f: D \subset \Re^n \to \Re^m$ con $n > 1$ y C una curva incluida en D.

Si $L = \lim\limits_{\vec{X} \to \vec{A}} f(\vec{X})$ y el límite por curva es $L_C = \lim\limits_{\vec{X} \xrightarrow{C} \vec{A}} f(\vec{X})$, tomando para el análisis de L_C únicamente puntos $\vec{X} \in C$, se cumple que "si existe L, existe L_C resultando $L_C = L$".

<u>Consecuencias</u>:

- Si no existe L_C, no existe L.
- Si existen L_{C_1} y L_{C_2}, siendo $L_{C_1} \neq L_{C_2}$ entonces no existe L.

La existencia de límites por curvas no permite concluir sobre la existencia de *L*.

<u>Ejemplo</u>: Volvemos al ejemplo que quedó pendiente en la pág. 4. Analizar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x\,y}{x^2+2\,y^2}}_{f(x,y)}$.

Se produce una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. En este ejemplo podemos tomar las rectas de ecuación $y = m\,x$ con $x \in \Re$ y m constante, que contienen al punto $(0,0)$. Planteamos el límite por curva, en este caso son rectas, que denotaremos C_m para cada valor de m.

$$L_{C_m} = \lim_{(x,y)\xrightarrow{y\,=\,m\,x}(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, m\,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\,m\,x}{x^2+2(m\,x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+2\,m^2} = \frac{m}{1+2\,m^2}$$

Como vemos el límite por recta existe, pero depende de la pendiente de la recta que se considere. Por ejemplo, $L_{C_1} = \frac{1}{1+2} = 1/3$ mientras que $L_{C_2} = \frac{2}{1+8} = 1/9$. Como $L_{C_1} \neq L_{C_2}$, podemos concluir que <u>no existe</u> el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{x^2+2\,y^2}$.

<u>Ejemplo</u>: Siendo $f(x,y) = \frac{x^2\,y}{x^4+y^2}$ definida para $(x,y) \neq (0,0)$, analice el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Usando las parábolas Γ_k de ecuación $y = k\,x^2$ con $x \in \Re$ y k constante, resulta:

$$L_{\Gamma_k} = \lim_{(x,y)\xrightarrow{y\,=\,k\,x^2}(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, k\,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,k\,x^2}{x^4+(k\,x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

Por ejemplo, $L_{\Gamma_1} = 1/2$ y $L_{\Gamma_2} = 2/5$, como $L_{\Gamma_1} \neq L_{\Gamma_2}$ $\Rightarrow$ <u>no existe</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Se deja como ejercicio verificar que en este caso todos los límites por recta resultan nulos, incluso cuando nos acercamos desplazándonos por puntos de la recta de ecuación $x = 0$ con $y \in \Re$.

<u>Comentario</u>: Dado que $x^2 \leq x^2 + y^6$, pues $y^6 \geq 0$, en entorno reducido de $(0,0)$ resulta $0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^6} \leq 1$.

Análogamente se demuestra que para n y m pares, $\frac{x^n}{x^n+y^m}$ y $\frac{y^m}{x^n+y^m}$ están acotadas en $[0,1]$ en todo entorno reducido del origen.

Aprovechando este último comentario veamos el siguiente ejemplo.

<u>Ejemplo</u>: Analice la continuidad de $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^7}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Para $(x,y)\neq(0,0)$ la función es continua por ser cociente de funciones continuas (polinomios) con denominador no nulo, es la expresión $\frac{x^7}{x^4+y^2}$.

Como f está definida en el origen, $f(0,0)=0$, falta analizar el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^7}{x^4+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\underbrace{x^3}_{\downarrow\, 0}\cdot\underbrace{\frac{x^4}{x^4+y^2}}_{\text{acotado en }[0,1]}=0.$$

Dado que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$, f también es continua en el origen.

Conclusión: la función es continua en todo punto de $\Re^2$.

SUPERFICIE

Dada $\vec{F}:D\subset\Re^2\to\Re^3$ con $\begin{cases}\bullet\ D \text{ conexo}\\ \bullet\ \vec{F} \text{ continua en } D\end{cases}$, el conjunto imagen de $\vec{F}$ se denomina **superficie**.

Denotando con $\vec{X}$ a los puntos genéricos de $\Re^3$, la ecuación paramétrica vectorial de la superficie es del tipo $\vec{X}=\vec{F}(u,v)$ con $(u,v)\in D$ donde *u*, *v* son los parámetros.

Dado que *D* es un conjunto conexo en $\Re^2$, la superficie también es conexa por ser la imagen de un conexo a través de una función continua.

Si denotamos con la letra Σ a la superficie, se denominan **líneas coordenadas** a aquellas líneas incluidas en Σ que resultan de dejar a uno de los dos parámetros constantes. Es así que tenemos dos tipos de líneas coordenadas a saber:

Las líneas de $u=u_0$, C_{u_0}, de ecuación vectorial $\vec{X}=\vec{F}(u_0,v)$ con $(u_0,v)\in D$.

y aquellas de $v=v_0$, C_{v_0}, de ecuación vectorial $\vec{X}=\vec{F}(u,v_0)$ con $(u,v_0)\in D$.

<u>Ejemplo</u>: Sea $\vec{F}:[0,2\pi]\times[0,2]\subset\Re^2\to\Re^3\,/\,\vec{F}(u,v)=(\cos(u),\operatorname{sen}(u),v)$.

Las imágenes de $\vec{F}$ están en $\Re^3$, supondremos el espacio *xyz* de puntos $\vec{X}=(x,y,z)$.

Vemos que $\vec{F}$ es continua en su dominio pues sus componentes lo son.

El dominio es conexo, es el rectángulo $[0,2\pi]\times[0,2]=\{(u,v)\in\Re^2\,/\,u\in[0,2\pi]\wedge v\in[0,2]\}$.

Entonces el conjunto imagen es una superficie que denotaremos Σ.

$\boxed{\vec{X}=(\cos(u),\operatorname{sen}(u),v)\ \text{con}\ (u,v)\in[0,2\pi]\times[0,2]}$ es la <u>ecuación paramétrica vectorial</u> de Σ.

Las variables *u* y *v* son los parámetros.

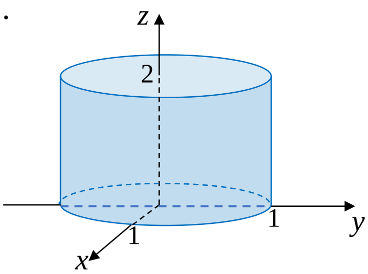
Como $\begin{cases} \vec{X} = (x,y,z) \\ y \\ \vec{X} = (\cos(u),\text{sen}(u),v) \end{cases}$, debe cumplirse que:

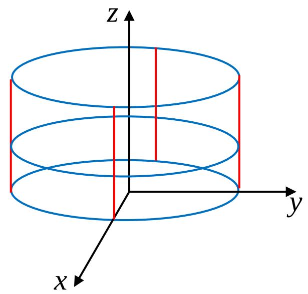
$\boxed{\begin{cases} x = \cos(u) \\ y = \text{sen}(u) \ \text{ con } \ (u,v) \in [0,2\pi]\times[0,2] \\ z = v \end{cases}}$, que son las <u>ecuaciones paramétricas</u> de Σ.

Si partiendo de estas últimas se trabaja para eliminar el parámetro (no siempre es posible), resulta:

$\boxed{x^2 + y^2 = 1 \ \text{ con } \ 0 \le z \le 2}$, que se denomina <u>ecuación cartesiana</u> de Σ.

En este caso se trata de un trozo de superficie cilíndrica, vertical al plano xy.





En la figura de la derecha se dibujan en rojo y azul algunas líneas coordenadas:

Rojo, $C_{u_0} : \vec{X} = (\cos(u_0),\text{sen}(u_0), v)$ con $0 \le v \le 2$, u_0 constante en $[0,2\pi]$, son segmentos.

Azul, $C_{v_0} : \vec{X} = (\cos(u),\text{sen}(u), v_0)$ con $0 \le u \le 2\pi$, v_0 constante en $[0,2]$, son circunferencias.

<u>Comentario</u>: Una ecuación del tipo $z = f(x,y)$ con $(x,y) \in D$, D conexo y f continua, es la ecuación de una superficie en el espacio de puntos $\vec{X} = (x,y,z)$. Una ecuación vectorial sería:

$$\vec{X} = (x,\ y,\ f(x,y)) \ \text{ con } \ (x,y) \in D.$$

Las líneas coordenadas de $x = x_0$ e $y = y_0$ se visualizan gráficamente observando la intersección de la superficie con planos paralelos a los coordenados, los de $x = x_0$ e $y = y_0$.

Análogamente, según el caso, se podría trabajar con $x = g(y,z)$ o bien $y = h(x,z)$.