Esta síntesis <u>no es un apunte</u> de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

Diferencial total – diferenciales sucesivos

Una función escalar $f : D \subset \Re^n \to \Re$ es diferenciable en un punto A interior a su dominio, cuando para todo $A + H \in E(A)$ se puede expresar (ver síntesis S-3B):

$$f(A+H) = f(A) + L(H) + \| H \| \, \mu(H) \quad \text{con } L \text{ transformación lineal y } \mu(H) \xrightarrow[H \to 0]{} 0,$$

donde $L(H) = df(A,H)$ se denomina diferencial total de f en A.

En particular, para campos escalares ($n > 1$),

$$L(\vec{H}) = df(\vec{A},\vec{H}) = f'(\vec{A},\vec{H}) = \nabla f(\vec{A}) \cdot \vec{H} \,.$$

Suponiendo que la función es diferenciable en todo $\vec{X}$ de un conjunto abierto S_1, en S_1 resultará:

$$df(\vec{X},\vec{H}) = \nabla f(\vec{X}) \cdot \vec{H} = \varphi(\vec{X})\,.$$

Si esta nueva función φ es diferenciable en un conjunto abierto $S_2 \subset S_1$, en dicho conjunto resultará:

$$d(df)(\vec{X},\vec{H}) = d\,\varphi(\vec{X},\vec{H})\,,$$

donde $d(df)(\vec{X},\vec{H}) \doteq d^2 f(\vec{X},\vec{H})$ se denomina diferencial total 2º de f en $\vec{X}$.

De esta manera se puede seguir, obteniendo –si existen– los diferenciales sucesivos de la función original.

<u>Ejemplo</u>: Para fijar ideas, supongamos la función escalar $f \in C^2$ de las variables x e y.

Si $f \in C^2 \Rightarrow f \in C^1 \Rightarrow f$ diferenciable. Consideremos que $\vec{H} = (h,k)$.

$$df(\vec{X},\vec{H}) = \nabla f(\vec{X}) \cdot \vec{H} = (f'_x(\vec{X}),\, f'_y(\vec{X})) \cdot (h,k) = f'_x(\vec{X})\, h + f'_y(\vec{X})\, k = \varphi(\vec{X}) \qquad (*)$$

Como $f \in C^2 \Rightarrow f'_x,\ f'_y \in C^1 \Rightarrow f'_x,\ f'_y$ diferenciables $\Rightarrow \varphi$ diferenciable.

Entonces:

$$d^2 f(\vec{X},\vec{H}) = d\,\varphi(\vec{X},\vec{H}) = \nabla \varphi(\vec{X}) \cdot \vec{H} = (\varphi'_x(\vec{X}),\, \varphi'_y(\vec{X})) \cdot (h,k)\,,$$

donde $\varphi'_x(\vec{X}) = f''_{xx}(\vec{X})\, h + f''_{yx}(\vec{X})\, k$ y $\varphi'_y(\vec{X}) = f''_{xy}(\vec{X})\, h + f''_{yy}(\vec{X})\, k$, que al remplazarlas en la anterior y operando se obtiene:

$$d^2 f(\vec{X},\vec{H}) = f''_{xx}(\vec{X})\, h^2 + 2\, f''_{xy}(\vec{X})\, hk + f''_{yy}(\vec{X})\, k^2, \qquad (**)$$

donde se consideró que $f''_{xy}(\vec{X}) = f''_{yx}(\vec{X})$ pues $f \in C^2$.

Ahora observamos que las expresiones (*) y (**) se pueden obtener, como regla práctica, de la siguiente manera:

$$d^i f(\vec{X},\vec{H}) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\, h + \frac{\partial}{\partial y}\, k \right]^{(i)}_{f(\vec{X})} \quad \text{con } i = 1, 2.$$

Aquí $\left[\frac{\partial}{\partial x}\, h + \frac{\partial}{\partial y}\, k \right]$ es un operador elevado simbólicamente a la potencia i y aplicado a la función f en el punto $\vec{X}$. Por ejemplo, $\left[\frac{\partial}{\partial x}\, h \right]^{(2)}_{f(\vec{X})} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{X})\, h^2 = f''_{xx}(\vec{X})\, h^2$.

Propiedad: Dada $f : D \subset \Re^n \to \Re$ con $n > 1$, del tipo $f(x_1, \cdots, x_n)$, y el vector $\vec{H} = (h_1, \cdots, h_n)$. Cuando $f \in C^k(E(\vec{A}))$ la función admite diferenciales sucesivos hasta el orden k inclusive en $\vec{A}$, cuya expresión puede obtenerse mediante:

$$d^i f(\vec{A}, \vec{H}) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right]^{(i)}_{f(\vec{A})} \quad \text{con } i = 1, \cdots, k, \qquad (1)$$

donde las derivadas se aplican a f y se las evalúa en $\vec{A}$.

Polinomio de Taylor

Dado un campo escalar $f : D \subset \Re^n \to \Re$ con $n > 1$ con $f \in C^k(E(\vec{A}))$, para todo $\vec{A} + \vec{H} \in E(\vec{A})$ puede expresarse, ver Apéndice:

$$f(\vec{A} + \vec{H}) = f(\vec{A}) + \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{d^i f(\vec{A}, \vec{H})}{i!} \right] + T, \qquad (2)$$

donde T se denomina término complementario.

Cuando se aproxima por Taylor de orden k, se desprecia el valor de T aceptando que:

$$f(\vec{A} + \vec{H}) \cong f(\vec{A}) + \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{d^i f(\vec{A}, \vec{H})}{i!} \right] \quad \text{con } \vec{H} \in E(\vec{0}),$$

interpretando que la aproximación es mejor cuanto más cerca esté $\vec{H}$ de $\vec{0}$.

Una forma más práctica que la anterior, se obtiene reemplazando:

$$\vec{X} = \vec{A} + \vec{H} \quad \to \quad \vec{H} = \vec{X} - \vec{A}, \text{ con } \vec{X} \text{ cercano a } \vec{A}$$

esto es:

$$\boxed{f(\vec{X}) \cong \underbrace{f(\vec{A}) + \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{d^i f(\vec{A}, \vec{X} - \vec{A})}{i!} \right]}_{p_k(\vec{X})} \quad \text{con } \vec{X} \in E(\vec{A})}, \qquad (3)$$

donde $p_k(\vec{X})$ es el polinomio para aproximar $f(\vec{X})$ por Taylor de orden k en un $E(\vec{A})$.

Para obtener los diferenciales sucesivos se aplica (1), teniendo en cuenta que $\vec{A} = (a_1, \cdots, a_n)$ y el punto $\vec{X} = (x_1, \cdots, x_n)$, resulta $\vec{H} = \vec{X} - \vec{A} = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$, quedando:

$$\boxed{d^i f(\vec{A}, \vec{X} - \vec{A}) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} (x_n - a_n) \right]^{(i)}_{f(\vec{A})} \quad \text{con } i = 1, \cdots, k}. \qquad (4)$$

Cuando $f \in C^{k+1}(E(\vec{A}))$, se puede demostrar que existe por lo menos un punto $\vec{B} = \vec{A} + \theta\,(\vec{X} - \vec{A})$ con $0 < \theta < 1$ en el cual el término complementario resulta:

$$T = \frac{d^{k+1} f(\vec{B}, \vec{X} - \vec{A})}{(k+1)!} \quad \textit{expresión de Lagrange para T},$$

esta es una de las expresiones mediante la cual se puede analizar la acotación del error que se comete al aproximar despreciando el valor de *T*.

<u>Caso particular</u>:

Veamos la aproximación por Taylor de 2º orden para $f(x,y)$ en un entorno del punto $\vec{A}=(x_0,y_0)$.

En este caso la expresión (3) se reduce a:

$$f(x,y)\cong f(\vec{A})+df(\vec{A},\vec{X}-\vec{A})+\tfrac{1}{2}d^2 f(\vec{A},\vec{X}-\vec{A}). \qquad (\#)$$

Como $\vec{X}=(x,y)$, $\vec{A}=(x_0,y_0)$, entonces $\vec{X}-\vec{A}=(x-x_0,y-y_0)$. Con lo cual, aplicando (4), los diferenciales sucesivos son del tipo:

$$d^i f(\vec{A},\vec{X}-\vec{A})=\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]^{(i)}_{f(\vec{A})} \quad \text{con } i=1,2,$$

es decir:

$$df(\vec{A},\vec{X}-\vec{A})=f'_x(\vec{A})\,(x-x_0)+f'_y(\vec{A})\,(y-y_0)$$

$$d^2 f(\vec{A},\vec{X}-\vec{A})=f''_{xx}(\vec{A})\,(x-x_0)^2+2\,f''_{xy}(\vec{A})\,(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(\vec{A})\,(y-y_0)^2$$

Reemplazando en (#) se obtiene la expresión buscada:

$$f(x,y)\cong \underbrace{\underbrace{f(\vec{A})+f'_x(\vec{A})(x-x_0)+f'_y(\vec{A})(y-y_0)}_{p_1(x,y)}+\tfrac{1}{2}[f''_{xx}(\vec{A})(x-x_0)^2+2\,f''_{xy}(\vec{A})(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(\vec{A})(y-y_0)^2]}_{p_2(x,y)}$$

Si usamos $f(x,y)\cong p_1(x,y)$ estamos haciendo aproximación lineal, es decir, Taylor de 1º orden. Observe que $z=p_1(x,y)$ es la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

Si usamos $f(x,y)\cong p_2(x,y)$ estamos haciendo aproximación por Taylor de 2º orden.

<u>Ejemplo</u>: Siendo $f(x,y)=x^2e^{x-2y}$, calcule aproximadamente $f(1.97,1.02)$ con Taylor de 2º orden.

Adoptamos $A=(x_0,y_0)=(2,1)$, desarrollamos todo lo que se indica en el caso particular de esta página y, luego de ello, estamos en condiciones de empezar a calcular.

$f(2,1)=4$

$f'_x(2,1)=[2xe^{x-2y}+x^2e^{x-2y}]_{(2,1)}=8$, $f'_y(2,1)=[-2x^2e^{x-2y}]_{(2,1)}=-8$

$f''_{xx}(2,1)=[2e^{x-2y}+2xe^{x-2y}+2xe^{x-2y}+x^2e^{x-2y}]_{(2,1)}=14$

$f''_{xy}(2,1)=[-4xe^{x-2y}-2x^2e^{x-2y}]_{(2,1)}=-16$, $f''_{yy}(2,1)=[4x^2e^{x-2y}]_{(2,1)}=16$

Con esto:

$$f(x,y)\cong \underbrace{\underbrace{4+8\,(x-2)-8\,(y-1)}_{p_1(x,y)}+\tfrac{1}{2}[14(x-2)^2-32(x-2)(y-1)+16(y-1)^2]}_{p_2(x,y)}$$

Entonces:

$$f(1.97,1.02)\cong \underbrace{\underbrace{4+8\,(-0.03)-8\,(0.02)}_{3.6}+\tfrac{1}{2}[14(-0.03)^2-32(-0.03)(0.02)+16(0.02)^2]}_{3.6191}$$

Aproximando por Taylor de 2º orden $f(1.97,1.02)\cong 3.6191$, la aproximación lineal es 3.6.

Propiedad de los polinomios de Taylor

El polinomio $p_j(\vec{X})$ que permite expresar $f(\vec{X}) \cong p_j(\vec{X})$ con $\vec{X} \in E(\vec{A})$, aplicando aproximación por Taylor de orden j, tiene las siguientes propiedades:

- $p_j(\vec{A}) = f(\vec{A})$.
- Hasta el orden j inclusive, las derivadas parciales de p_j en $\vec{A}$ son iguales a las correspondientes derivadas parciales de f en dicho punto.

<u>Ejemplo</u>: Sea $p(x,y) = x^2 + 3xy + 4x - y$ el polinomio de Taylor de 2º orden que permite aproximar $f(x,y)$ en un entorno del punto $(2,1)$.

a) Calcule la derivada direccional de f en $(2,1)$, en la dirección que va hacia el punto $(5,5)$.

b) Analice si la recta normal a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en $(2,1,z_o)$ interseca en algún punto al plano de ecuación $2x + y - z = 16$.

Dado que el polinomio no está expresado en potencias de $(x-2)$ e $(y-1)$, no es posible obtener por simple inspección el valor de la función y de sus derivadas en $(2,1)$.
Pero, por la propiedad que tienen los polinomios de Taylor, resultan:
$f(2,1) = p(2,1) = 17$
$f'_x(2,1) = p'_x(2,1) = [2x + 3y + 4]_{(2,1)} = 11$ y $f'_y(2,1) = p'_y(2,1) = [3x - 1]_{(2,1)} = 5$.
También podríamos calcular las derivadas de 2º orden, pero no son necesarias para lo que se pide.

a) Si tenemos Taylor de 2º orden, $f \in C^2(E(2,1)) \Rightarrow f \in C^1(E(2,1))$, entonces f es diferenciable en (2,1).
Entonces: $f'((2,1),\breve{r}) = \nabla f(2,1) \cdot \breve{r}$, donde $(5,5) - (2,1) = (3,4) \Rightarrow \breve{r} = \frac{(3,4)}{\sqrt{9+16}} = (3/5, 4/5)$.
Con lo cual: $f'((2,1),\breve{r}) = (11,5) \cdot (3/5, 4/5) \rightarrow \boxed{f'((2,1),\breve{r}) = 53/5}$.

b) Expresando la superficie en forma implícita

$$\underbrace{f(x,y) - z}_{F(x,y,z)} = 0 \text{ con } z_o = f(2,1) = 17,$$

vemos que:
(1) $F(2,1,17) = 17 - 17 = 0$.
(2) $\nabla F(x,y,z) = (f'_x(x,y),\ f'_x(x,y), -1)$ es continuo en un entorno de (2,1,17), porque $f \in C^1$ en un entorno de (2,1) y la tercera componente es constante.
(3) $\vec{n}_0 = \nabla F(2,1,17) = (f'_x(2,1),\ f'_x(2,1), -1) = (11,\ 5,\ -1) \neq \vec{0}$.
Con lo cual $\vec{n}_0$ dirige a la recta normal a la superficie, una ecuación para dicha recta es:

$$\vec{X} = (2,1,17) + u\,(11,5,-1) \quad \rightarrow \quad \vec{X} = (2 + 11u,\ 1 + 5u,\ 17 - u) \text{ con } u \in \Re$$

Para que esta recta interseque al plano de ecuación $2x + y - z = 16$, debe cumplirse que $2(2 + 11u) + 1 + 5u - (17 - u) = 16 \rightarrow u = 1$, remplazando en la ecuación de la recta:

$$\boxed{\text{Punto de intersección: } (13,\ 6,\ 16)}.$$

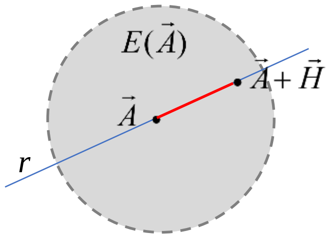
Apéndice

En esta sección, teniendo en cuenta lo dicho para diferenciales sucesivos, damos una noción de cómo se llega a la expresión (2).

Sea un campo escalar $f : D \subset \Re^n \to \Re$ con $n > 1$ y un punto $\vec{A} = (a_1, \cdots, a_n)$ interior a D. Por otra parte, considérese el punto $\vec{A} + \vec{H}$ con $\vec{H} \neq \vec{0}$ perteneciente a un entorno tipo esfera abierta $E(\vec{A}) \subset D$.

La recta r de la figura pasa por $\vec{A}$ y está orientada por $\vec{A} + \vec{H} - \vec{A} = \vec{H}$, una ecuación para r es:

$$\vec{X} = \underbrace{\vec{A} + u\,\vec{H}}_{\vec{g}(u)} \text{ con } u \in \Re .$$



El segmento de puntos extremos $\vec{A}$ y $\vec{A} + \vec{H}$, representado en color rojo, está incluido en $E(\vec{A})$ y admite ecuación:

$$\vec{X} = \vec{A} + u\,\vec{H} \quad \text{con } 0 \le u \le 1 .$$

La función f evaluada en los puntos de la recta r que están incluidos en $E(\vec{A})$ es:

$$h(u) = f(\vec{g}(u)) \text{ con } u \in I ,$$ (1)

es decir, se trata de un campo escalar evaluado en puntos de una curva (ver síntesis S-4A, pág. 5/6).

Suponiendo que $f \in C^k(E(\vec{A}))$, resultan:

$$h'(u) = \nabla f(\vec{g}(u)) \cdot \vec{g}\,'(u) = \nabla f(\vec{g}(u)) \cdot \vec{H} = df(\vec{g}(u), \vec{H}),$$

$$h''(u) = d(df)(\vec{g}(u), \vec{H}) = d^2 f(\vec{g}(u), \vec{H}) ,$$

y así sucesivamente.

Observando ahora que: $h(0) = f(\vec{g}(0)) = f(\vec{A})$, $h'(0) = df(\vec{A}, \vec{H})$, $h''(0) = d^2 f(\vec{A}, \vec{H})$, etc.

Mientras que $h(1) = f(\vec{g}(1)) = f(\vec{A} + \vec{H})$.

Como h es una función escalar de una variable derivable en 0, podemos aplicar Taylor alrededor del origen (Mc Laurin):

$$h(u) = h(0) + h'(0)\,u + \tfrac{1}{2!} h''(0)\,u^2 + \cdots + \tfrac{1}{k!} h^{(k)}(0)\,u^k + T ,$$

en particular:

$$\underbrace{h(1)}_{f(\vec{A}+\vec{H})} = \underbrace{h(0)}_{f(\vec{A})} + \underbrace{h'(0)}_{df(\vec{A},\vec{H})} + \tfrac{1}{2!} \underbrace{h''(0)}_{d^2 f(\vec{A},\vec{H})} + \cdots + \tfrac{1}{k!} \underbrace{h^{(k)}(0)}_{d^k f(\vec{A},\vec{H})} + T ,$$

es decir,

$$f(\vec{A} + \vec{H}) = f(\vec{A}) + \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{d^i f(\vec{A}, \vec{H})}{i!} \right] + T$$

LOS TEMAS CORRESPONDIENTES AL T.P. V CONTINÚAN EN LA SÍNTESIS S-5B

(1) I es el intervalo abierto necesario, del tipo ($-q$, q), para parametrizar el trozo de r incluido en $E(\vec{A})$.