Esta síntesis <u>no es un apunte</u> de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

Comentario inicial

Retomando el tema de diferenciabilidad (ver síntesis S-3B, pág. 10/10), si una función escalar *f* es diferenciable en *X*, la correspondiente transformación lineal aplicada al incremento *H* se denomina diferencial total de f denotándose $L(H) = df(X,H)$ o simplemente $df(X)$.

Cuando la función es de una variable, se utilizan letras en minúscula y la notación más común es:

$$df(x) = L(h) = h\ L(1) = h\ f'(x), \tag{1}$$

según expresión (4) de S-3B para un punto *x* genérico. Para una variable, la función es diferenciable si, y solo si, es derivable.

En particular, cuando $f(x) = x$ resulta $d\overbrace{f(x)}^{=x} = h.1 = h$. Es decir, para una variable independiente el diferencial es igual al incremento, que también se da en denotarlo como Δx:

$$dx = h = \Delta x.$$

Reemplazando esto en (1), se obtiene:

$$df(x) = f'(x)\ dx \tag{2}$$

que es la ***expresión analítica*** del diferencial total de una función escalar derivable de una variable.

En particular, si $y = f(x)$ se acostumbra indicar $y' = f'(x)$, en ese caso:

$$dy = y'\ dx, \tag{3}$$

que es la expresión típica para resolver integrales indefinidas por el método de cambio o sustitución de variables.

Por otra parte, siendo $y = f(x)$, para denotar la derivada correspondiente se puede usar $y' = f'(x)$, o bien,

$$y' = \frac{dy}{dx} \tag{4}$$

donde $\frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx}$ no es un cociente de diferenciales, es la expresión adoptada por Leibniz[(1)] para denotar la derivada.

Observando las dos expresiones (3) y (4) tenemos que:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} \equiv y' \quad \text{siendo} \quad dy = y'\ dx}$$

Si bien son dos conceptos diferentes, surge aquí la regla práctica que relaciona ambas expresiones. Para pasar de una a la otra es como si "pasáramos de término el dx", lo cual <u>no es correcto decirlo</u> porque $\frac{dy}{dx}$ no es un cociente de diferenciales. Pero desde el punto de vista práctico, "*lo hacemos sin decirlo*".

(1) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) –entre otras muchas cosas– filósofo y matemático alemán, fue el inventor de varios símbolos matemáticos, como ser d*y*/d*x* para la derivada y $\int$ para la integral.

Ecuaciones diferenciales – conceptos básicos

Comenzamos mencionando algunas definiciones y ejemplos relacionados con el tema a tratar.

Expresión diferencial: es toda expresión que contiene variables y sus derivadas o sus diferenciales.
Ejemplos: a) $y' + 2y + x$ b) $x\,y\,dx + x^2 y\,dy$

Ecuación diferencial: es toda ecuación que contiene expresiones diferenciales.

Ejemplos:

(1) $y'' + 2y' = x^2 - y$, suponiendo $y = y(x)$.
(2) $y' + y = 2x$, suponiendo $y = y(x)$
(3) $x\,y\,dx + x^2 y\,dy = 0$.
(4) $x z'_x + 2y z'_y = x z$, suponiendo $z = z(x, y)$.

Clasificación de ecuaciones diferenciales:

a) Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO): son aquellas en las que se tiene una única variable independiente, y las derivadas se toman respecto de ella. De los ejemplos anteriores serían (1), (2) y (3).

b) Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: son aquellas en las que se tienen dos o más variables independientes. De las anteriores sería la (4).

A partir de ahora sólo nos referiremos a las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

Orden de una EDO: es el de la derivada de mayor orden que figura en ella.

Considerando los ejemplos anteriores, tenemos:

Ecuación diferencial	Orden
(1)	2 o 2º orden
(2)	1 o 1º orden
(3)	(*)
(4)	---------

no es EDO.

Para el caso (*), si consideramos $y = f(x)$ entonces $dy = \overbrace{f'(x)}^{y'}\,dx$. Reemplazando queda:

$$x\,y\,dx + x^2 y\,y'\,dx = 0 \;\rightarrow\; (x\,y + x^2 y\,y')\,dx = 0,$$

donde, como dijimos en la página anterior, $dx = \Delta x$ es un incremento arbitrario de la variable independiente. Entonces, para que se cumpla la ecuación, debe ser $x\,y + x^2 y\,y' = 0$. Con lo cual, se trata de una EDO de 1º orden.

Solución de una EDO: es toda relación entre sus variables que satisface la ecuación.

Ejemplo: $y = \text{sen}(x) + 2x$ es una solución de la EDO $y' = \cos(x) + 2$, basta con reemplazar para verificar que se cumple.

Solución General (SG) de una EDO de orden n: es una relación entre las variables que satisface a la ecuación y contiene ***n*** constantes arbitrarias esenciales.

Ejemplo: $y' = 4y$ tiene como SG $y = Ce^{4x}$, donde C es una constante arbitraria.

Verificación: a) La EDO es de 1º orden, $y = Ce^{4x}$ tiene 1 constante.

b) De la SG $y = Ce^{4x} \rightarrow y' = 4Ce^{4x}$, que reemplazadas en la EDO resulta: $\underbrace{4Ce^{4x}}_{y'} = 4\underbrace{Ce^{4x}}_{y} \rightarrow 4Ce^{4x} = 4Ce^{4x}$, se verifica.

Observación: Si se hubiera dado como solución $y = Ae^{4x+B}$ con A y B constante arbitrarias, también se verifica que es solución pero tiene dos constantes y la EDO es de 1º orden. Por lo tanto, no es la SG.
Ocurre que las constantes A y B no son esenciales, porque se las puede agrupar en una sola, dado que $y = Ae^{4x+B} \Leftrightarrow y = \underbrace{Ae^{B}}_{C} e^{4x} \rightarrow y = Ce^{4x}$.

En la definición de SG, cuando dice "***n* constantes arbitrarias esenciales**", significa que no se puede disminuir su cantidad (*n*) mediante procesos algebraicos que logren agruparlas.

Ejercicio: Verifique que $y'' = 4y$ tiene como SG $y = Ae^{-2x} + Be^{2x}$ con A y B constante arbitrarias.
Observe que ahora no es posible reducir la cantidad de constantes mediante algún proceso algebraico que permita agruparlas.

Solución Particular (SP) de una EDO: es toda solución que surge de la SG dándole valores específicos a las constantes.

Ejemplo: $y'' = 4y$ tiene como SG $y = Ae^{-2x} + Be^{2x}$ con A y B constante arbitrarias.
Algunos ejemplos de SP son: $y = 2e^{-2x} - 5e^{2x}$, $y = 4e^{-2x}$ e $y = 0$.

Ejercicio: $y' = 4y$ tiene como SG $y = Ce^{4x}$, donde C es una constante arbitraria.
Verifique que $y = 5e^{4x}$ es la SP que pasa por (0,5), es decir, tal que $y(0) = 5$.

Solución Singular** (SS) **de una EDO: es toda solución que no está incluida en la SG.

Ejemplo: $y = xy' + (y')^2$ tiene SG $y = Cx + C^2$ con C constante arbitraria y SS $y = -x^2/4$
Se deja como ejercicio verificar la SG y la SS.

En nuestra asignatura, si bien se mencionan otros ejemplos, sólo interesa estudiar las EDO de 1º orden.

Teorema (de Cauchy): Sea $f : S \subset \Re^2 \rightarrow \Re$ con f y f'_y continuas en *S* abierto que contenga al rectángulo $H = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, entonces la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ tiene –para cada punto interior a *H*– una única solución que pasa por dicho punto (*teorema de existencia y unicidad de la solución*).

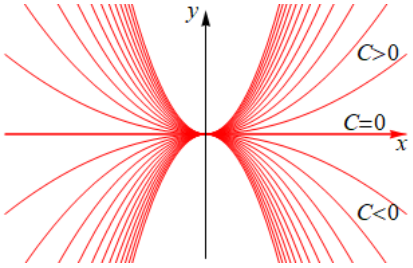
Cuando se cumplen las hipótesis del teorema, dicha solución única es la SP que se obtiene de la SG evaluando la constante para que pase por el punto.

Ejemplo: La SG de $y' = 2y$ es $y = Ce^{2x}$, la solución que pasa por el punto $(0,5)$ se obtiene de la SG imponiendo que $5 = Ce^{2\cdot 0} \rightarrow 5 = C$. Reemplazando $C = 5$ en la SG obtenemos $y = 5e^{2x}$, única solución de la EDO que pasa por el punto dado.

Si las hipótesis del teorema no se cumplen, pueden ocurrir varias situaciones. Por ejemplo, que tengamos la SG y alguna SS. También podría ocurrir que la EDO no tenga solución en el campo real, un ejemplo es $(y')^2 + 4y^2 = -4$.

Representación geométrica

Tomemos como ejemplo la EDO $xy' = 2y$, cuya SG es $y = Cx^2$.
Para cada valor de *C*, tenemos una SP cuya representación geométrica se muestra a la derecha.
Para $C \neq 0$ se trata de parábolas que pasan por (0,0), desde el eje x hacia arriba si $C > 0$ o hacia abajo si $C < 0$
Para $C = 0$ resulta la recta de ecuación $y = 0$ (el eje *x*).

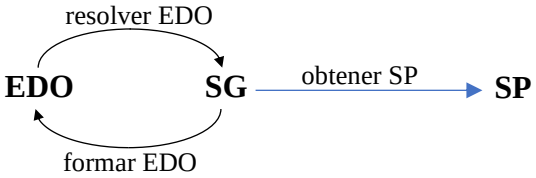


Por supuesto que no es posible representarlas a todas las SP, normalmente se dibujan algunas para dar idea de la forma que adoptan. La representación geométrica de la SG incluiría a todas las SP y constituye una ***familia de líneas simplemente infinita*** porque la expresión de la SG tiene 1 constante arbitraria.

El "orden de infinitud" de la familia es igual a la cantidad de constantes arbitrarias que tiene la SG, que coinciden con el orden de la EDO.

Hasta ahora realizamos una breve presentación de las ecuaciones diferenciales ordinarias, en relación a ellas pueden interesar dos tipos de problemas básicos:

- ***Resolver*** una EDO: Dato la EDO, hallar su SG (y, eventualmente, de ella obtener una SP).
- ***Formar*** una EDO: Dato la SG, hallar la EDO.



Para obtener la SP, se cuenta con datos adicionales que permiten evaluar la(s) constante(s) de la SG.

Ejemplo: Halle la solución de $y' = 2x$ que pasa por el punto (2,7).

En este caso la SG es $y = x^2 + C$, que inmediatamente puede ser verificada.
El dato adicional es "solución que pase por (2,7)", con lo cual, imponiendo esto en la SG obtenemos que $7 = 2^2 + C \Rightarrow C = 3$.
Por último, reemplazamos $C = 3$ en la SG y obtenemos $\boxed{y = x^2 + 3}$, que es la SP pedida. Es solución, porque surgió de la SG, y cumple con pasar por el punto pedido.

Formación de una ecuación diferencial ordinaria

Teniendo como dato la SG, para obtener la EDO se procede como sigue:

> Se la deriva la SG tantas veces como constantes haya en ella. La EDO surge del proceso que permita eliminar las constantes, desde un sistema de ecuaciones formado por la SG y la mencionadas derivadas.

Ejemplos:

- Halle la EDO cuya SG es $y = C\,x^4$. *Sólo tenemos que derivar* 1 *vez* (una constante)

  Armamos un sistema de ecuaciones con la EDO y su derivada $\begin{cases} y = C\,x^4 \\ y' = 4C\,x^3 \end{cases}$.

  Entre ambas ecuaciones trabajamos algebraicamente para eliminar la constante C:
  $y = \underbrace{C\,x^3}_{y'/4}\,x \;\rightarrow\; \boxed{y = \tfrac{1}{4}\,x\,y'}$ es la EDO pedida.

- Halle la EDO cuya SG es $y = x^2 + C$. Armamos el sistema: $\begin{cases} y = x^2 + C \\ y' = 2\,x \end{cases}$.

  En este ejemplo, como el proceso de derivación ya eliminó la constante, $\boxed{y' = 2\,x}$ es la EDO pedida.

- Halle la EDO cuya SG es $y = C_1\,x^2 + C_2$. Ahora tenemos 2 constantes, debemos derivar dos veces.

  El sistema es: $\begin{cases} y = C_1\,x^2 + C_2 \\ y' = 2C_1\,x \\ y'' = 2C_1 \end{cases}$, una constante se eliminó con la 1º derivada.

  Reemplazando $2C_1$ de la 3º en la 2º obtenemos, $\boxed{y' = y''\,x}$ que es la EDO pedida. En este caso resultó de 2º orden porque la SG tiene dos constantes.

- Halle la EDO cuya SG es $x^2 + y^2 = C$. En este caso, si suponemos $y = f(x)$,

  $$(y^2)' = (f^2(x))' = 2\,\overbrace{f(x)}^{y}\,\overbrace{f'(x)}^{y'} = 2\,y\,y'.$$

  Armando el sistema resulta: $\begin{cases} x^2 + y^2 = C \\ 2\,x + 2\,y\,y' = 0 \end{cases}$, la derivada eliminó la constante.

  Queda entonces $2\,x + 2\,y\,y' = 0$, o bien $\boxed{x + y\,y' = 0}$ que es la EDO pedida cuando se considera que *x* es la variable independiente.

- Halle la EDO cuya SG es $y = C \ln|x|$. Armamos el sistema: $\begin{cases} y = C \ln|x| \\ y' = C/x \end{cases}$.

  Despejando C de la 2º y reemplazando en la 1º resulta, $\boxed{y = x \ln|x|\,y'}$ que es la EDO pedida.

  Observe la nota siguiente.

Nota: Recuerde que si $\boxed{f(x) = \ln|x| \text{ con } x \neq 0}$, se dan dos situaciones:

a) Para $x > 0$, $|x| = x$. Entonces $f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = 1/x$.

b) Para $x < 0$, $|x| = -x$. Entonces $f(x) = \ln(-x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = 1/x$.

Como en ambos casos la derivada es la misma, resulta $\boxed{f'(x) = 1/x \text{ con } x \neq 0}$.

Por ello, $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

La Guía de TP incluye ejercicios que requieren resolver diferentes tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias. En esta síntesis tratamos los temas que abarca el Trabajo Práctico VI, que son los siguientes.

- Resolución de EDO tipo variables separables.
- Resolución de EDO tipo lineal de primer orden.
- Trayectorias ortogonales.
- Líneas de campo.

EDO tipo variables separables

Son aquellas que pueden expresarse en la forma: $\boxed{h(y)\,dy = g(x)\,dx}$ (I)

En este caso la resolución consiste simplemente en integrar ambos miembros, es decir:

$$\underbrace{\int h(y)\,dy}_{H(y)+A} = \underbrace{\int g(x)\,dx}_{G(x)+B}$$

Cada integral indefinida se resuelve mediante una primitiva (supuestamente existente) + una constante arbitraria. Así las funciones H y G son tales que $H' = h$ y $G' = g$.

Pero A y B no son constantes esenciales, pues pasando de término se pueden agrupar en una única constante C. Es decir, $H(y) = G(x) + \underbrace{C}_{B-A}$.

Conclusión: La EDO (I) tiene como SG $\boxed{H(y) = G(x) + C}$.

En la práctica, al integrar, se pone una sola constante en uno de los dos miembros de la ecuación.

Ejemplo: Halle la solución de $x^2 y' = x^2 - 1$ tal que $y(1) = 4$.

Comenzamos hallando la SG. De $x^2 y' = x^2 - 1 \rightarrow x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 - 1 \rightarrow dy = (1 - x^{-2})\,dx$ [(2)], con lo cual logramos el formato de variable separables. Integramos ambos miembros y ponemos constante de un solo lado.

$$\int dy = \int (1 - x^{-2})\,dx \rightarrow y = x + x^{-1} + C, \text{ esta es la SG.}$$

Ahora imponemos $y(1) = 4$, es decir que la solución pase por (1, 4), para ello reemplazamos en la SG: $4 = 1 + 1^{-1} + C \rightarrow C = 2$. Reemplazando en la SG queda $\boxed{y = x + x^{-1} + 2}$ que es la SP pedida.

[(2)] Recordar lo indicado en el comentario inicial de esta síntesis.

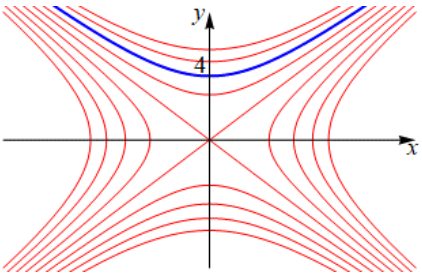
Ejemplo: Halle la solución de $y\,y' - 6x = 0$ tal que $y(0) = 4$.

Comenzamos hallando la SG, de $y\,y' - 6x = 0 \;\rightarrow\; y\,y' = 6x \;\rightarrow\; y\frac{dy}{dx} = 6x \;\rightarrow\; y\,dy = 6x\,dx$.

Logramos obtener el formato de "variables separables", es decir en un miembro de la ecuación todo función de y multiplicado por dy, en el otro todo función de x multiplicado por dx.

Integramos y ponemos constante de un solo lado:

$$\int y\,dy = \int 6x\,dx \;\rightarrow\; \tfrac{1}{2}y^2 = 3x^2 + C \quad \text{es la SG.}$$



Ahora imponemos que $y(0) = 4$, es decir que la solución pase por $(0,4)$. Reemplazando en la SG:

$$\tfrac{1}{2}4^2 = 3\cdot 0^2 + C \;\rightarrow C = 8.$$

Con este valor en la SG obtenemos $\frac{1}{2}y^2 = 3x^2 + 8$.

Sólo a modo de ejemplo, en color azul, se muestra en el dibujo la SP que pasa (0, 4), despejando de la última, su ecuación es $\boxed{y = \sqrt{6x^2 + 16} \;\text{ con }\; x \in \Re}$ (la $y = -\sqrt{\cdots}$ no pasa por el (0,4)).

EDO tipo lineal de 1º orden

Son aquellas que pueden expresarse en la forma:

$$y' + P(x)\,y = Q(x) \qquad \text{(I)}$$

Un método de resolución es el siguiente. Se propone el cambio de variables definido por:

$$y = u\,v \qquad \text{(II)}$$

donde u y v son dos funciones de x a determinar.

Reemplazando (II) y su derivada en (I) obtenemos:

$$\overbrace{u'v + u\,v'}^{y'} + P(x)\overbrace{u\,v}^{y} = Q(x)$$
$$u'v + u\left[v' + P(x)\,v\right] = Q(x)$$

Si en esta última ecuación imponemos que se anule la expresión encerrada entre corchetes, surgen las ecuaciones:

$$\begin{cases} v' + P(x)\,v = 0 & (\alpha) \\ u'\,v = Q(x) & (\beta) \end{cases}.$$

(α) es de variables separables, se resuelve y se obtiene la expresión de $\boxed{v}$ *una solución particular alcanza*.
Se reemplaza $\boxed{v}$ en (β), también es de variable separables, se resuelve y se obtiene $\boxed{u}$ *la SG*

Por último, reemplazando $\boxed{u}$ y $\boxed{v}$ en (II) se obtiene $\boxed{y = u\,v}$ que es la SG de (I).

Al hallar *v*, conviene usar una SP no nula. Si se usara la SG de *v* para reemplazar en (β), al multiplicar para hallar $y = u\,v$ se tendrían dos constantes que se puede agrupar en una sola para lograr la misma solución que si se hubiera usado una SP de *v*.

El inconveniente reside en que, si se omite realizar esa agrupación, se termina con dos constantes y en la SG de (I) debe haber una sola (es una EDO de 1º orden).

Éste es el método propuesto por Lagrange [3], también se pueden aplicar otros métodos, por ejemplo, el de variación de parámetros y el que usa un factor integrante.

El de factor integrante consiste en calcular un factor $r(x) = e^{\int P(x)\,dx}$, al multiplicar (I) por este factor resulta:

$$\underbrace{y'\,r + P(x)\,r\,y}_{(y\,r)'} = Q(x)\;r(x)\,,$$

dado que $(y\,r)' = y'\,r + y\,r' = y'\,r + y\,e^{\int P(x)\,dx}\,P(x) = y'\,r + y\,r\,P(x)$, con lo cual:

$$\int [\underbrace{y'\,r + P(x)\,r\,y}_{(y\,r)'}]\,dx = \underbrace{\int Q(x)\;r(x)\,dx}_{H(x)\text{ con }H'=Q\,r}\;.$$

Así, si $H(x)$ es un primitiva para la integral del 2º miembro de la ecuación, resulta:

$$y\,r = H + C$$

de donde $y = r^{-1}(H + C)$, es decir:

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\,(H(x) + C) \text{ es la S.G de (I).}$$

Ejemplo: Halle la solución particular de $x^2\,y' + x\,y = 6\,x^3$ que pasa por el punto (1,5).

Con $x \neq 0$ si dividimos por x^2 obtenemos $y' + x^{-1}y = 6\,x$ (I)

Aplicamos en (I) el reemplazo $y = u\,v$ (II), con lo cual obtenemos:

$$u'\,v + u\,v' + x^{-1}\,u\,v = 6\,x\,,$$

$$u'\,v + u\,\underbrace{[v' + x^{-1}v]}_{=0} = 6\,x\,. \quad \text{De donde resulta: } \begin{cases} v' + x^{-1}\,v = 0 & (\alpha) \\ u'\,v = 6\,x & (\beta) \end{cases}$$

Resolvemos (α) que es de variables separables:

$$\frac{dv}{dx} = -\,x^{-1}\,v \;\rightarrow\; \frac{dv}{v} = -\,\frac{dx}{x} \;\rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \;\rightarrow\; \ln|v| = -\ln|x| + A$$

$$|v| = e^{\ln|x|^{-1}+A} \;\rightarrow\; |v| = e^A\,|x|^{-1} \;\rightarrow\; v = \underbrace{\pm\,e^A}_{B}\,x^{-1} \;\rightarrow\; v = B\,x^{-1}\text{, una SP es: } v = x^{-1}\;.$$

Reemplazamos esta última en (β), con lo cual: $\frac{du}{dx}\,x^{-1} = 6\,x \;\rightarrow\; du = 6\,x^2\,dx$.

Integrando esta última: $u = 2\,x^3 + C$.

Aplicando (II), resulta $y = u\,v \;\rightarrow\; y = (2\,x^3 + C)\,x^{-1} \;\rightarrow\; y = 2\,x^2 + \frac{C}{x}$ es la SG de (I).

Por último, imponemos en la SG que la solución pase por (1,5), es decir,

$5 = 2 \cdot 1^2 + \frac{C}{1} \;\rightarrow\; C = 3$ que, reemplazada en la SG, se obtiene:

$$\boxed{y = 2\,x^2 + \frac{3}{x}} \text{ SP pedida.}$$

Ejercicio: Se sugiere usar la SG de v, para reemplazarla en (β), y verificar que se llega a la misma solución general, pero con la necesidad de agrupar constantes.

. . . . . .

[3] Joseph Louis Lagrange (1735-1813), matemático y astrónomo italiano.

Si queremos usar factor integrante, $r(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int x^{-1}\,dx} = e^{\ln|x|} = |x|$, una SP alcanza. Ahora multiplicamos (I) por el factor integrante, note que la ecuación resultante es la misma si usamos x (para $x>0$) o "$-x$" (para $x<0$). Entonces queda: $x\,y' + y = 6x^2$.

Luego: $\int [x\,y' + y]\,dx = \int 6x^2\,dx \;\rightarrow\; x\,y = 2x^3 + C \;\rightarrow\; y = 2x^2 + \frac{C}{x}$, que es la misma SG obtenida por el otro método.

Ejemplo: Halle las curvas tales que, en cada punto, la recta tangente tiene ordenada al origen igual al producto de las coordenadas del punto.

Si la curva tiene ecuación $y = f(x)$, la recta tangente en un punto (x_0, y_0) de la misma tiene ecuación:

$$y - \underbrace{f(x_0)}_{y_0} = \underbrace{f'(x_0)}_{y_0'}(x - x_0)$$

La ordenada al origen de la recta es el valor de $y = b$ para $x = 0$, en este caso se pide $b = x_0\,y_0$, reemplazando queda:

$$x_0\,y_0 - y_0 = y_0'\,(0 - x_0), \text{ es decir, } x_0\,y_0 - y_0 = -y_0'\,x_0.$$

Esta última debe cumplirse para todos los puntos (x_0, y_0) de la curva, con lo cual si (x, y) pertenece a la curva deberá cumplirse que:

$$x\,y - y = -y'\,x,$$

que es la EDO de la familia de curvas que cumple con lo solicitado. Vamos a resolverla:

$$(x-1)\,y = -\frac{dy}{dx}\,x \;\rightarrow\; (x-1)\,\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \;\rightarrow\; \frac{dy}{y} = (1/x - 1)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (1/x - 1)\,dx \;\rightarrow\; \ln|y| = \ln|x| - x + A \;\rightarrow\; |y| = e^{\ln|x| - x + A}$$

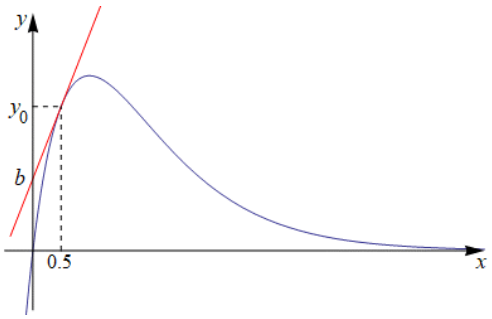
$$|y| = e^A\,|x|\,e^{-x} \;\rightarrow\; y = \underbrace{\pm e^A}_{C}\,x\,e^{-x}.$$

Todas las curvas que cumplen con la condición solicitada pertenecen a la familia de ecuación:

$$\boxed{y = C\,x\,e^{-x}}.$$

A modo de ejemplo, en el gráfico inferior se representa la SP de ecuación $y = 4\,x\,e^{-x}$, y su recta tangente de ecuación $y - y_0 = y_0'\,(x - x_0)$ para el punto $(x_0, y_0) = (0.5, 2e^{-0.5})$.

En este caso, la ecuación de la recta es $y = 2e^{-0.5}\,x + e^{-0.5}$, cuya ordenada al origen es $b = e^{-0.5}$ y resulta igual a $x_0\,y_0 = 0.5 \cdot 2\,e^{-0.5} = e^{-0.5}$



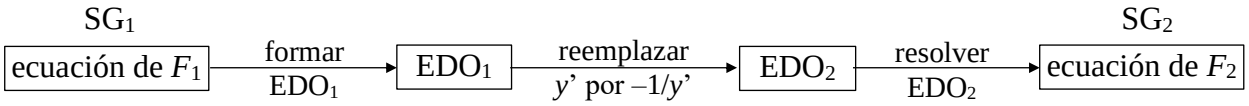
Trayectorias ortogonales

Considere dos familias simplemente infinitas de curvas F_1 y F_2 en el plano *xy*. Se dice que dichas familias son ortogonales cuando, por cada punto por el que pasa una curva de F_1 también pasa una curva de F_2, y dichas curvas son ortogonales en ese punto (rectas tangentes perpendiculares).

Es claro que si en un punto (*x*,*y*) una curva tiene pendiente y' la ortogonal tiene pendiente $-1/y'$, supuestamente con y' no nula. Si una tuviera recta tangente horizontal, la otra la tendría vertical. [4]

El problema a resolver es, teniendo como dato la ecuación de F_1, hallar la de F_2.

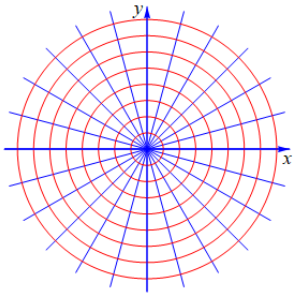
Dado que son familias simplemente infinitas, su ecuación tiene una constante arbitraria, tipo SG de una EDO de 1º orden. Entonces el método de trabajo para resolver el problema es el siguiente.



Observe que, al reemplazar y' por $-1/y'$, se impone que en cada (*x*,*y*) la curva de una familia sea ortogonal a la de la otra.

Ejemplo: Dada la familia de curvas de ecuación $x^2+y^2=C$, con $C>0$, halle la familia ortogonal.

Comenzamos determinando la EDO de la familia dato.



$$\begin{cases} x^2+y^2=C \\ 2x+2yy'=0 \end{cases} \rightarrow \quad x+yy'=0 \text{ EDO de la flia. dato.}$$

Reemplazamos y' por $-1/y'$, $x-y/y'=0$:

$$xy'=y \quad \text{EDO de la flia. ortogonal}$$

Resolvemos esta última:

$$xy'=y \rightarrow x\frac{dy}{dx}=y \rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x} \rightarrow \ln|y|=\ln|x|+A \rightarrow |y|=e^{\ln|x|+A}$$

$$|y|=e^A|x| \rightarrow y=\underbrace{\pm e^A}_{K}x\,.$$

Entonces: $\boxed{y=Kx}$ es la ecuación de la familia ortogonal a la dada.

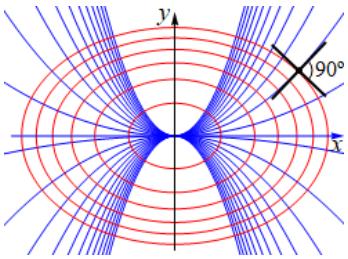
Comentario: $K=0$ se admite porque genera $y=0$, que es solución de la ecuación diferencial.

En el gráfico se muestra la familia de circunferencias y la de rectas, que son ortogonales en cada punto de intersección. En el proceso hemos perdido la recta $x=0$, que corresponde considerar, por haber supuesto que *y* es función de *x*.

Si resolviéramos suponiendo *x* como función de *y*, perderíamos la recta de ecuación $y=0$.

[4] Ver Síntesis S-3A, pág. 7/13.

Ejemplo: Sea la familia F de curvas de ecuación $x^2+2y^2=C$, halle la curva de F y la de su familia ortogonal $F_\perp$ que pasen por el punto (1,2).



Familia dato: $x^2+2y^2=C$.

Formación de su EDO: $\begin{cases} x^2+2y^2=C \\ 2x+4yy'=0 \end{cases}$, EDO: $x+2yy'=0$.

Reemplazando y' por $-1/y'$, se obtiene:

$$x-2y/y'=0, \text{ EDO de } F_\perp.$$

Resolvemos esta última: $x-2y/y'=0 \rightarrow x=2y/y' \rightarrow y'=2y/x \rightarrow \frac{dy}{dx}=2y/x$, entonces:

$$\frac{dy}{y}=2\frac{dx}{x} \rightarrow \int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x} \rightarrow \ln|y|=2\ln|x|+A \rightarrow |y|=e^{\ln|x|^2+A}=e^A|x|^2=e^Ax^2,$$

$$|y|=e^Ax^2 \rightarrow y=\underbrace{\pm e^A}_{K}x^2. \text{ Conclusión: } \boxed{y=Kx^2 \text{ ecuación de } F_\perp}.$$

Las curvas de ambas familias que pasan por el punto (1,2), son:

$$F:\ 1^2+2\cdot 2^2=C \rightarrow C=9, \ \boxed{x^2+2y^2=9}.$$

$$F_\perp:\ 2=K\,1^2 \rightarrow K=2, \ \boxed{y=2x^2}.$$

En el dibujo se muestra su ortogonalidad en el punto.

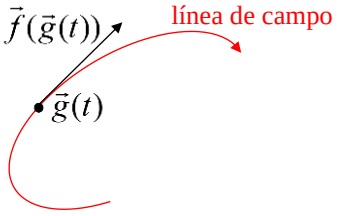
Líneas de campo

Dado un campo vectorial $\vec{f}$ interesa hallar líneas tales que, en cada punto, el campo resulte tangente a la línea y esté orientada por el campo en el sentido de los arcos crecientes.
De esta manera, si la línea tiene ecuación:

$$\vec{X}=\vec{g}(t) \text{ con } t\in I$$

Supondremos que la línea admite recta tangente en cada punto y, para que se cumpla lo enunciado, definimos como línea de campo a toda aquella que cumpla con:

$$\vec{f}(\vec{g}(t))=\vec{g}'(t) \text{ con } t\in I \qquad (\#)$$



Recordemos que $g'(t)$ es tangente a la línea en el punto $\vec{g}(t)$ y está orientado en el sentido de los arcos crecientes. El problema a resolver consiste en hallar la ecuación de las líneas de campo, conociendo el campo $\vec{f}$.
Se puede plantear y resolver en forma paramétrica desde (#), o bien intentando un formato cartesiano para hacerlo. Por ejemplo, si se trabaja en el plano *xy*, el campo será del tipo $\vec{f}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ y los puntos de la línea del tipo $\vec{g}(t)=(x(t),y(t))$.
De donde si denotamos $d\vec{s}=\vec{g}'(t)\,dt=(\underbrace{x'(t)\,dt}_{dx},\underbrace{y'(t)\,dt}_{dy})=(dx,dy)$, este vector es tangente a la línea.

Más adelante veremos que $d\vec{s}$ tiene gran importancia en muchas aplicaciones y se puede hacer una interpretación muy clara del significado geométrico del mismo. Por ahora está claro que es tangente a la línea y está orientado en el sentido de los arcos crecientes. Con esto, si planteamos el paralelismo entre $d\vec{s}$ y $\vec{f}$ obtenemos una EDO que permite obtener una expresión cartesiana para las líneas de campo.

Es decir, al plantear $d\vec{s} \,//\, \vec{f}$ estamos imponiendo $(dx,dy) \,//\, (P(x,y),Q(x,y))$, que es equivalente a:

$$\boxed{\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}},$$

que es la EDO de las líneas de campo en el plano xy .

Con un razonamiento similar en el espacio xyz, $d\vec{s} = (dx,dy,dz)$, el campo será del tipo $\vec{f} = (P,Q,R)$ y el planteo cartesiano queda:

$$\boxed{\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}}$$

Ejemplo: Dado el campo vectorial $\vec{f}(x,y) = (y, 2xy)$, halle la ecuación de la línea de campo que pasa por el punto $A = (1,3)$. Represéntela e indique su orientación en dicho punto.

Realizando el planteo cartesiano, la EDO es

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{2xy} \text{ , es decir, } dy = 2x\,dx .$$

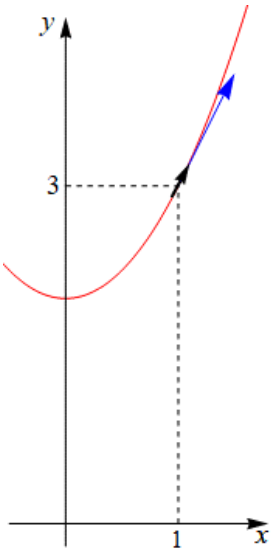
$$\int dy = \int 2x\,dx$$

$$y = x^2 + C$$

es la ecuación de la familia de líneas de campo.
La que pasa por (1,3) es la SP de ecuación

$$y = x^2 + 2 ,$$

que se representa en color rojo.
Por su parte $\vec{f}(1,3) = (3,6)$, representado en color azul y aplicado en el punto (1,3), es tangente a la curva y en dicho punto le otorga la correspondiente orientación (que se representa en color negro sobre la curva).



Si hacemos el planteo en forma paramétrica, normalmente más complicado, queda:

$$\vec{f}(\vec{g}(t)) = \vec{g}'(t) \quad \text{con} \quad \vec{g}(t) = (x(t), y(t))$$

$$\vec{f}(x(t),y(t)) = (x'(t),y'(t)) \;\rightarrow\; (y(t),\, 2x(t)\,y(t)) = (x'(t),y'(t)) \;\rightarrow\; \begin{cases} x'(t) = y(t) & (1) \\ y'(t) = 2x(t)\,y(t) & (2) \end{cases}$$

Derivando (1) y reemplazando en (2) queda $x''(t) = 2x(t)\,x'(t)$, que es una ecuación diferencial de 2º orden. No seguimos porque no es tema del curso resolver ecuaciones de este tipo.
Sin embargo, sin hallar las componentes de $\vec{g}$, en este caso particular de la última ecuación podemos observar que: $\frac{d\,x'(t)}{dt} = \frac{d\,x^2(t)}{dt} \rightarrow x'(t) = x^2(t) + C$, pero por (1), $x'(t) = y(t)$, es decir,

$$y(t) = x^2(t) + C$$

Dado que la parametrización de la curva se planteó como $(x,y) = \underbrace{(x(t),y(t))}_{\vec{g}(t)}$, en el formato cartesiano llegamos nuevamente a $y = x^2 + C$.