Esta síntesis no es un apunte de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

Comentarios adicionales sobre curvas

Dada la curva C de ecuación $\vec{X} = \vec{g}(t)$ con $t \in I$, habíamos definido que $\vec{A} = \vec{g}(t_0)$ es punto regular de la misma cuando queda definida $\vec{g}\,'(t_0)$ y $\vec{g}\,'(t_0) \neq \vec{0}$. [(1)]

La curva es regular cando todos sus puntos lo son.

Por otra parte, se dice que **la curva es suave** cuando es regular y $\vec{g}\,'$ es continua en I.

Recordemos que C es un *arco de curva* cuando el intervalo I es cerrado y acotado, del tipo $I = [a,b]$.

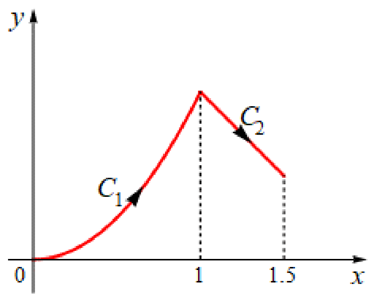
Vamos a considerar que ***un arco de curva es suave*** cuando $\vec{g}\,'$ es continua y no nula en un intervalo abierto que contenga al $[a,b]$.

Ejemplo: $\vec{X} = \underbrace{(3\cos(t),\, 3\mathrm{sen}(t))}_{\vec{g}(t)}$ con $0 \le t \le 2\pi$ es la ecuación vectorial de un arco de curva suave.

En este caso $\vec{g}\,'(t) = (-3\mathrm{sen}(t),\, 3\cos(t))$ es continua en $\Re$ y, por lo tanto, en $[0, 2\pi] \subset \Re$. Observe que las componentes son continuas (funciones trigonométricas).

Además $\vec{g}\,'(t) \neq \vec{0}\ \ \forall t \in \Re$, pues el “seno” y el “coseno” no pueden ser ambos nulos para un mismo valor de t, dado que $\mathrm{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1\ \ \forall t \in \Re$.

Por otra parte, se dice que **un arco de curva es suave a trozos** cuando se lo puede subdividir en una cantidad finita de arcos de curvas suaves.



En la figura de la derecha se representa un ejemplo de arco de curva $C = C_1 \cup C_2$ suave a trozos. En este caso son dos trozos, que admiten las siguientes ecuaciones:

$$C_1 : \ \vec{X} = (x,\, x^2) \ \text{ con } 0 \le x \le 1$$
$$C_2 : \ \vec{X} = (x,\, 2 - x) \ \text{ con } 1 \le x \le 1.5$$

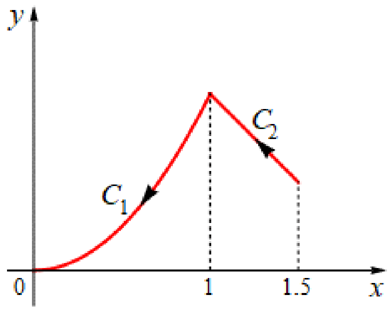
Correspondiendo para C : $\vec{X} = \vec{g}(x)$ con $0 \le x \le 1.5$, donde $\vec{g}(x) = \begin{cases} (x,\, x^2) & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ (x,\, 2-x) & \text{si } 1 \le x \le 1.5 \end{cases}$.

Observe que $\vec{g}(1) = (1,1)$, lo generan ambas partes de $\vec{g}$ y conviene que $x = 1$ figure para ambas. De esta manera, cada una define claramente los dos arcos de curva en los que se subdivide C.

La orientación de la curva se señala, en cada uno de sus trozos, mediante una flecha de color negro que muestra la evolución del punto $\vec{g}(x)$ –desplazándose sobre la curva– a medida que el parámetro x crece desde 0 hasta 1.5 en el intervalo [0, 1.5].

(1) Ver Síntesis S-3A, pág. 4/13.

En muchos casos interesa cambiar la orientación de la curva. A la derecha se representa nuevamente el **arco de curva suave a trozos** anterior, pero ahora con la orientación opuesta.



Ahora dicho arco $C = C_1 \cup C_2$, también se lo puede subdividir en dos trozos que –por ejemplo – admiten las siguientes ecuaciones:

$$C_1 : \vec{X} = (2-t, (2-t)^2) \text{ con } 1 \le t \le 2$$

$$C_2 : \vec{X} = (2-t, t) \text{ con } 0.5 \le t \le 1$$

Correspondiendo para $C : \vec{X} = \vec{w}(t)$ con $0.5 \le t \le 2$, donde $\vec{w}(t) = \begin{cases} (2-t, t) & \text{si } 0.5 \le t \le 1 \\ (2-t, (2-t)^2) & \text{si } 1 \le t \le 2 \end{cases}$

Para lograr el cambio de orientación, es común **realizar una reparametrización** de la curva, que consiste en aplicar un cambio de variables a través de una función escalar continua y estrictamente decreciente.

En el caso anterior teníamos $\vec{X} = \vec{g}(x)$ con $0 \le x \le 1.5$. Elegimos el cambio $x = 2-t$, donde "$2-t$" es la expresión de una función continua y estrictamente decreciente. Luego aplicamos la composición de funciones que permite generar $\vec{w}(t) = \vec{g}(2-t)$ con $0.5 \le t \le 2$, que expresa las curva con la orientación opuesta. Observe que cada trozo de curva queda con la orientación opuesta.

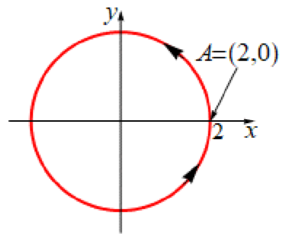
Es claro que no hay una única manera de reparametrizar, pero la más sencilla es a través de una relación lineal entre las variables. En el caso anterior, $x = 2-t$.

<u>Nota 1</u>: Una vez definida la parametrización con la que se desea trabajar, de existir varios trozos de curva, es típico numerarlos en forma creciente según la orientación establecida. En el último ejemplo se recorre primero C_2 y luego C_1 sólo para resaltar que cada trozo de la parametrización anterior ahora fue orientado en forma opuesta y, por supuesto, toda la curva se recorre en sentido opuesto.

<u>Nota 2</u>: Ante una reparametrización, nada obliga a que los intervalos de ambos parámetros deban ser iguales, en el ejemplo anterior no lo son. Si hubiéramos deseado que fueran iguales podríamos haber impuesto, por ejemplo, $x = 1.5 - t$.

<u>Ejemplo</u>: Una circunferencia de radio igual a 2 con centro en el origen admite la ecuación vectorial:

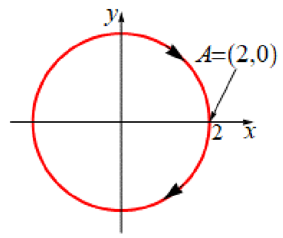
$$\vec{X} = \underbrace{(2\cos(t), 2\operatorname{sen}(t))}_{\vec{g}(t)} \text{ con } 0 \le t \le 2\pi .$$



A la derecha se la grafica indicando su orientación y el punto inicial y final $A = \vec{g}(0) = \vec{g}(2\pi) = (2,0)$ del arco de curva.

Imponiendo $t = 2\pi - u$, con $\vec{w}(u) = \vec{g}(2\pi - u)$ resulta:

$$\vec{X} = \underbrace{(2\cos(2\pi - u), 2\operatorname{sen}(2\pi - u))}_{\vec{w}(u)} \text{ con } 0 \le u \le 2\pi .$$



Equivalente[(2)] a: $\vec{X} = \underbrace{(2\cos(u), -2\operatorname{sen}(u))}_{\vec{w}(u)}$ con $0 \le u \le 2\pi$,

con orientación opuesta y $A = \vec{w}(0) = \vec{w}(2\pi) = (2,0)$.

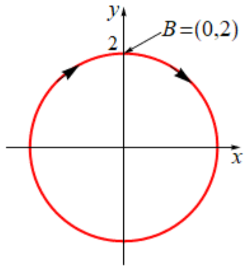
---

(2) Recuerde que $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) \pm \cos(a)\operatorname{sen}(b)$ y que $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$.

En este caso también podría cambiarse la orientación, redefiniendo la parametrización. Cambiando "seno" por "coseno", es decir adoptando la ecuación:

$$\vec{X} = \underbrace{(2\operatorname{sen}(v),\, 2\cos(v))}_{\vec{h}(v)} \text{ con } 0 \le v \le 2\pi\,,$$

pero cambia el punto inicial y final del arco de curva, ahora es $B = \vec{h}(0) = \vec{h}(2\pi) = (0,2)$.



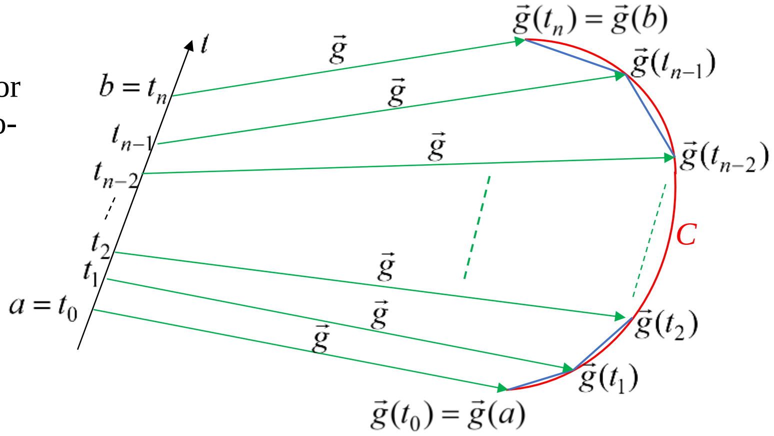
Longitud de un camino recorrido y de un arco de curva puntual

Sea el arco de curva C de ecuación $\vec{X} = \vec{g}(t)$ con $a \le t \le b$. Comencemos construyendo una partición $Q = \{t_0 = a, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, t_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, que lo subdivide en n partes.
Para cada punto t_k de Q, a través de $\vec{g}$, le corresponde un punto $\vec{g}(t_k) \in C$.
Ahora construimos la poligonal P como unión de los segmentos $\overline{\vec{g}(t_{k-1})\, \vec{g}(t_k)}$ con $k = 1, \cdots, n$. Es decir,

$$P = \overline{\vec{g}(t_0)\, \vec{g}(t_1)} \cup \overline{\vec{g}(t_1)\, \vec{g}(t_2)} \cup \cdots \cup \overline{\vec{g}(t_{n-1})\, \vec{g}(t_n)}\,.$$

En el gráfico se observa la curva C en color rojo, y la poligonal P con segmentos de color azul.
Se dice que P está inscripta en la curva.

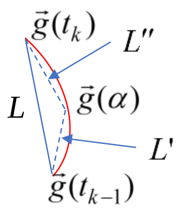
Es claro que la longitud de la poligonal, (suma de las longitudes de sus segmentos) nunca puede superar a la longitud de C.



Dada la continuidad de $\vec{g}$ –por definición de curva– a menor $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, menor será $\| \vec{g}(t_k) - \vec{g}(t_{k-1}) \|$ que es la longitud del segmento $\overline{\vec{g}(t_{k-1})\, \vec{g}(t_k)}$ y dicho segmento será cada vez "más parecido" al correspondiente trozo de curva. Denotando L_P la longitud de la poligonal P, resulta :

$$L_P = \sum_{k=1}^{n} \| \vec{g}(t_k) - \vec{g}(t_{k-1}) \|.$$

Es claro que, cualquiera sea la partición Q que consideremos, el sólo hecho de agregarle un punto más para crear una partición nueva, genera una situación como la de la figura. Si agregamos $t = \alpha$, tal que $t_{k-1} < \alpha < t_k$, el segmento de longitud $L = \| \vec{g}(t_k) - \vec{g}(t_{k-1}) \|$ se divide en dos de longitudes L' y L'', siendo $L' + L'' \ge L$.
Es decir, la nueva poligonal tiene longitud mayor o igual a L_P.



Es más, partiendo de dos particiones diferentes Q_1 y Q_2 que generan poligonales de longitudes L_{P1} y L_{P2}, si generamos una nueva partición Q^* con los puntos de ambas, la correspondiente poligonal inscripta tendrá longitud L_{P^*} que es mayor o igual a L_{P1} y a L_{P2}.

La pregunta es ¿cuánto puede crecer la longitud de una poligonal inscripta en C ?

¿Está acotada superiormente o puede tender a infinito?

En este contexto, consideremos el conjunto $H = \{\, L_P = \text{long}(P),\ \forall Q \text{ del} [a,b]\,\}$. Es decir, H es el conjunto de las longitudes de las poligonales inscriptas en C para toda posible partición Q del intervalo $[a,b]$.

Cuando H tiene cota superior, tiene supremo (la menor de sus cotas superiores) [(3)] y –en ese caso– se dice que **la curva es rectificable**, definiéndose $\text{long}(C) = \sup\{H\}$.

Se puede demostrar que toda C suave es rectificable, y su longitud puede calcularse mediante:

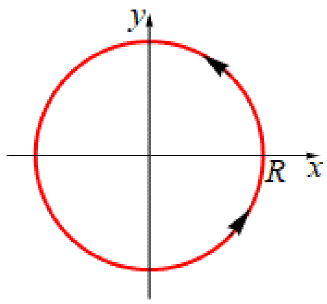
$$\boxed{\text{long}(C) = \int_a^b \| \vec{g}\,'(t) \| dt} \tag{1}$$

Ejemplo: Calcule la longitud de C de ecuación $\vec{X} = (R\cos(t), R\,\text{sen}(t))$ con $0 \le t \le 2\pi$, $R > 0$.

Denotando $\vec{g}(t) = (R\cos(t), R\,\text{sen}(t))$, resulta

$$\vec{g}\,'(t) = (-R\,\text{sen}(t), R\cos(t))$$

que –como vimos– es continua y no nula en $\Re$. Por lo tanto, también lo es en el intervalo $[0, 2\pi]$.



En este caso, $\| \vec{g}\,'(t) \| = \sqrt{R^2[\text{sen}^2(t) + \cos^2(t)]} = |R| = R$.

Entonces,

$$\text{long}(C) = \int_0^{2\pi} \| \vec{g}\,'(t) \| dt = \int_0^{2\pi} R\, dt = R\,[t]_0^{2\pi} = 2\pi R$$

Como era de esperarse, resultó la longitud de una circunferencia de radio R.

Pero cabe la siguiente pregunta, ¿cómo resulta el cálculo si $0 \le t \le 4\pi$?

Únicamente cambia el último renglón, es decir, ahora tendremos:

$$\text{long}(C) = \int_0^{4\pi} \| \vec{g}\,'(t) \| dt = \int_0^{4\pi} R\, dt = R\,[t]_0^{4\pi} = 4\pi R.$$

Observe que, con $0 \le t \le 4\pi$, el punto imagen recorre dos veces la circunferencia y resulta longitud doble.

La expresión **(1) permite calcular la longitud del camino recorrido** por el punto imagen, cuando el parámetro varía desde a hasta b.

Cuando *C* es simple, mediante (1) se calcula la **longitud del arco de curva puntual.** Es decir, de la representación geométrica dibujada como una ruta a recorrer.

***Cuando se pide el cálculo de la longitud de una curva, se debe interpretar que es la longitud del arco de curva puntual, hay que usar una parametrización con la cual la curva resulte simple*.**

[(3)] Por el axioma de continuidad de los reales, todo conjunto de números reales que tiene cota superior tiene supremo.

Ejemplo: Calcule la longitud del arco de curva C definido por la intersección de las superficies de ecuaciones $x+y+z=2$ e $y=x^2$ con $x,y,z\in\Re_0^+$.

Una ecuación vectorial para C es $\vec{X}=\underbrace{(x,\,x^2,\,2-x-x^2)}_{\vec{g}(x)}$ con $0\le x\le 1$.

El intervalo [0,1] se puede obtener como sigue.

- La 1º componente de $\vec{g}$ debe ser mayor o igual que cero, $x\ge 0$, para que $x\in\Re_0^+$.
- La 2º es siempre mayor o igual que cero. Es decir, $y\in\Re_0^+$.
- La 3º es $p(x)=2-x-x^2$, que se anula en $x_1=-2$ y en $x_2=1$, que son raíces simples de la ecuación polinómica $2-x-x^2=0$. Como, por ejemplo, $p(2)=-4<0$, es claro que $p(x)\ge 0$ para $-2\le x\le 1$. Esto asegura $z\in\Re_0^+$.

Con lo cual, para que $x,y,z\in\Re_0^+$, se requiere que $0\le x\le 1$.

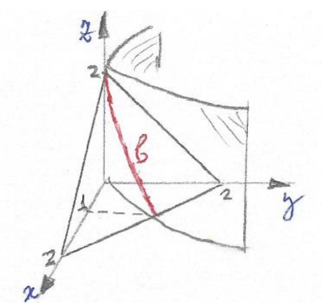
Esto se puede evitar por simple observación del gráfico inferior donde, para los puntos de C, los valores de x deben estar entre $x=0$, y la intersección de $y=x^2$ con $x+y=2$ en el 1º cuadrante del plano xy $\rightarrow$ $x=1$.

Ahora calculamos $\vec{g}\,'(x)=(1,2x,-1-2x)$, entonces,

$$\|\vec{g}\,'(x)\|=\sqrt{8x^2+4x+2}=\sqrt{2}\,\sqrt{4x^2+2x+1},$$

de donde:

$$\operatorname{long}(C)=\int_0^1\|\vec{g}\,'(x)\|\,dx=\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{4x^2+2x+1}\,dx$$



Recurriendo a una tabla de integrales, obtenemos que:

$$\operatorname{long}(C)=\tfrac{\sqrt{2}}{16}\,[2(1+4x)\sqrt{4x^2+2x+1}+3\operatorname{senh}^{-1}(\tfrac{1+4x}{\sqrt{3}})]_0^1=$$

$$=\tfrac{\sqrt{2}}{16}\,[10\sqrt{7}-2+3(\operatorname{senh}^{-1}(5/\sqrt{3})-\operatorname{senh}^{-1}(1/\sqrt{3}))].$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{senh}^{-1}(u)=\ln(u+\sqrt{u^2+1})$, también se puede expresar:

$$\operatorname{long}(C)=\tfrac{\sqrt{2}}{16}\,[10\sqrt{7}-2+3\ln(\tfrac{5+2\sqrt{7}}{3})].$$

Dejando de lado que el cálculo de la longitud de curva puede ser complicado, dada la "$\sqrt{\ }$" del integrando que surge de la norma de $\vec{g}\,'$, quedan dos preguntas a realizarse:

- ¿Qué ocurre si usamos otra parametrización?
- ¿Cómo se trabaja si la curva es suave a trozos?

Si bien luego volvemos sobre el tema [(4)], podemos anticipar que el resultado no cambia mientras usemos una parametrización para la cual la curva sea suave y simple.

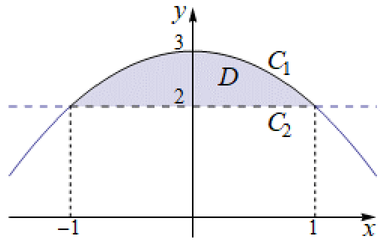
Si tiene varios trozos, se suma la longitud de cada trozo, las cuales se pueden calcular con la parametrización que más convenga (no es necesario establecer una parametrización única para toda la curva).

[(4)] Ver "propiedades de las integrales de línea" en la Síntesis S7-B.

<u>Ejemplo</u>: Sea $\vec{f}:D\subset\Re^2\to\Re^2 \,/\, \vec{f}(x,y)=(\sqrt{3-x^2-y}\,,\,\ln(y-2))$ definido en su dominio natural D, calcule el perímetro de D.

El conjunto D debe cumplir con: $\begin{cases} 3-x^2-y\geq 0 \;\to\; y\leq 3-x^2 \\ \quad y-2>0 \quad\;\to\quad y>2 \end{cases}$.

Entonces $D=\{(x,y)\in\Re^2 \,/\, 2<y\leq 3-x^2\}$, que se dibuja sombreado en la figura.



La frontera $\partial D=C_1\cup C_2$, con ecuaciones cartesianas:

$C_1:\; y=3-x^2$ con $x\in[-1,1]$ y $C_2:\; y=2$ con $x\in[-1,1]$

dado que en la intersección de ambas curvas debe ser:

$$3-x^2=2\;\to\; x^2=1\;\to\; x=-1\vee x=1$$

Es claro que $\text{long}(C_2)=2$, es la longitud del segmento de puntos extremos $(-1,2)$ y $(1,2)$.

Por su parte C_1 admite la ecuación $\vec{X}=\underbrace{(x,3-x^2)}_{\vec{g}(x)}$ con $x\in[-1,1]\;\to\;\|\vec{g}\,'(x)\|=\sqrt{1+4x^2}$, con

lo cual, $\text{long}(C_1)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+4x^2}\,dx=[\tfrac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\tfrac{1}{4}\ln(2x+\sqrt{1+4x^2})]_{-1}^{1}=\sqrt{5}+\tfrac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$

Entonces:

$$\text{long}(\partial D)=\text{long}(C_1)+\text{long}(C_2)=\sqrt{5}+\tfrac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})+2.$$

Estando en línea de puntos, ¿por qué se tiene en cuenta la longitud de C_2? Porque C_2 es parte de la frontera de D, independientemente que esté o no incluida en D.

Comentario previo a los temas que siguen – Veamos los siguientes ejemplos:

- $\int_4^t 2x\,dx=[x^2]_4^t=t^2-16=\varphi(t)$, porque t figura en el límite de integración, y se cumple que $\varphi'(x)=[2t]_{t=x}=2x$ (la expresión del integrando).
- $\int_4^t 2u\,du=[u^2]_4^t=t^2-16=\varphi(t)$, porque t figura en el límite de integración, y se cumple que $\varphi'(u)=[2t]_{t=u}=2u$ (la expresión del integrando).

  Estamos mostrando que el resultado de la integral definida de una función escalar de una variable, no depende de la variable de integración (la que figura en la expresión de la función que se está integrando). Lo cual surge directamente de su definición. Además –con la derivada– sólo mostramos lo que asegura el teorema fundamental del cálculo integral, del cual también se obtiene la regla de Barrow que aplicamos para estos cálculos.

Es así que $\int_4^t 2t\,dt=[t^2]_4^t=t^2-16=\varphi(t)$ igual que en los casos anteriores, con la ventaja que $\varphi'(t)=2t$, exactamente igual a la expresión del integrando, sin necesidad de realizar un cambio de variables.

En general, siendo w una función continua y t el límite superior de la integral,

$$\boxed{\int_a^t w(t)\,dt=\varphi(t)\,,\text{ siendo }\varphi'(t)=w(t)} \qquad (2)$$

Abscisa curvilínea – diferenciales de longitud de arco de curva – parámetro intrínseco

Dada la curva suave C de ecuación $\vec{X} = \vec{g}(t)$ con $t \in I$ y un punto $t_0 \in I$, se define

$$s = \int_{t_0}^{t} \| \vec{g}\,'(t) \| \, dt \tag{3}$$

que se denomina **abscisa curvilínea** de los puntos de C con origen en el punto $\vec{g}(t_0)$ de la curva.

De acuerdo a (2), resulta:

$$s = \int_{t_0}^{t} \| \vec{g}\,'(t) \| \, dt = \varphi(t)\,, \tag{4}$$

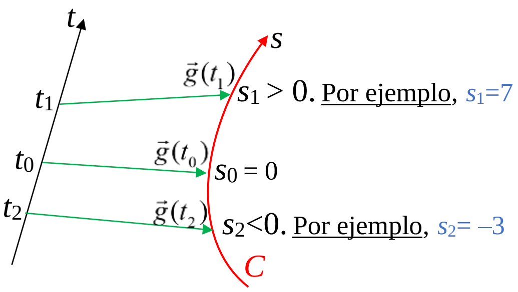
siendo $ds = \varphi'(t)\,dt = \| \vec{g}\,'(t) \| \, dt$.

$$\boxed{ds = \| \vec{g}\,'(t) \| \, dt} \quad \textbf{diferencial escalar de longitud de arco de curva}. \tag{5}$$

Para fijar ideas, veamos la siguiente interpretación geométrica.

Recordemos que (1) permite calcular la longitud de un arco de curva.
Ahora calculemos los valores de s para tres puntos de la curva teniendo en cuenta que, según (4), para el punto genérico $\vec{g}(t)$ es:

$$s = \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \| \vec{g}\,'(t) \| \, dt$$



- Para $t = t_0$, $s_0 = \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} \| \vec{g}\,'(t) \| dt = 0$.
- Para $t = t_1 > t_0$, $s_1 = \varphi(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \| \vec{g}\,'(t) \| dt = \operatorname{long}(C_{\vec{g}(t_0),\vec{g}(t_1)})$, la longitud del arco de curva entre los puntos $\vec{g}(t_0)$ y $\vec{g}(t_1)$. Por ejemplo, podría ser $s_1=7$, como se indica en el dibujo.
- Para $t = t_2 < t_0$, $s_2 = \varphi(t_2) = \int_{t_0}^{t_2} \| \vec{g}\,'(t) \| dt = -\int_{t_2}^{t_0} \| \vec{g}\,'(t) \| dt = -\operatorname{long}(C_{\vec{g}(t_0),\vec{g}(t_2)})$, $(-1)\cdot$ la longitud del arco de curva entre los puntos $\vec{g}(t_0)$ y $\vec{g}(t_2)$. Por ejemplo, $s_2 = -3$, como se indica en el dibujo. (5)

Entonces, comenzamos eligiendo un punto $\vec{g}(t_0)$ para el cual resulta $s = 0$. Basándonos en los ejemplos, vemos que:

El punto de $s = 7$ se encuentra a longitud de curva igual a 7 del de $s = 0$, recorriendo en el sentido de los arcos crecientes.
El punto de $s = -3$ se encuentra a longitud de curva igual a 3 del de $s = 0$, recorriendo en el sentido contrario al de los arcos crecientes.

Tenemos un *eje de abscisas* dibujado sobre la curva, **abscisas curvilíneas**, usando para ello la variable s.
El **origen de las abscisas curvilíneas** es el $\vec{g}(t_0)$ para el cual resulta $s = 0$.
El punto de abscisa s se encuentra –desplazándose sobre la curva– a una longitud igual al $|s|$ del origen de abscisas ($s = 0$), en el sentido de los arcos crecientes si $s>0$ y en el opuesto si $s<0$.

(5) Hubo que permutar los límites de integración porque la fórmula de longitud de curva supone que el límite inferior de la integral es menor o igual al superior. Por otra parte, la longitud de un arco de curva entre dos puntos de la misma, no depende del orden en que se menciona a dichos puntos.

Continuando con el ejemplo anterior, si ahora queremos calcular la longitud de curva entre $\vec{g}(t_2)$ y $\vec{g}(t_1)$, bastaría con ver que desde $\vec{g}(t_2)$ a $\vec{g}(t_0)$ la longitud es 3, y desde $\vec{g}(t_0)$ a $\vec{g}(t_1)$ es 7. La longitud total debería resulta igual a $3+7=10$, en las unidades de medida que corresponda.
Veamos si es cierto:

$$\text{long}(C_{\vec{g}(t_2),\vec{g}(t_1)}) = \int_{t_2}^{t_1} \| \vec{g}\,'(t) \| dt$$

Por (4) y (5), $s = \varphi(t)$ con $ds = \| \vec{g}\,'(t) \| dt$. Siendo $\varphi(t_1) = s_1$ y $\varphi(t_2) = s_2$, entonces:

$$\text{long}(C_{\vec{g}(t_2),\vec{g}(t_1)}) = \int_{t_2}^{t_1} \underbrace{\| \vec{g}\,'(t) \| dt}_{ds} = \int_{s_2}^{s_1} ds = [s]_{s_2}^{s_1} = s_1 - s_2 \ ,$$

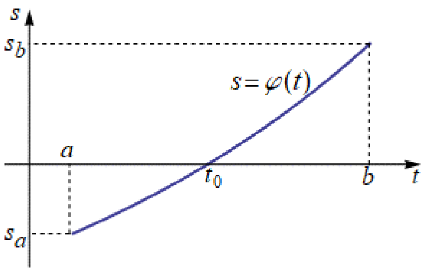
para el ejemplo, $s_1 - s_2 = 7-(-3) = 10$ como habíamos mencionado.

En esta última expresión, cuando se obtuvo que:

$$\text{long}(C_{\vec{g}(t_2),\vec{g}(t_1)}) = \int_{s_2}^{s_1} ds = s_1 - s_2 \ ,$$

se pone en evidencia que ds, desde el punto de vista geométrico representa la longitud de un trozo de curva tan pequeño como pueda ser imaginado [6]. Por ello se denomina *diferencial escalar de longitud de arco de curva*.

Supongamos ahora el arco de curva suave C de ecuación $\vec{X} = \vec{g}(t)$ con $a \le t \le b$, para el cual se ha definido $s = \int_{t_0}^{t} \| \vec{g}\,'(t) \| \, dt = \varphi(t)$ con $t_0 \in [a,b]$.



Siendo C suave $\vec{g}\,'$ no se anula y, por lo tanto, tampoco se anula su norma. De donde, $\| \vec{g}\,'(t) \| > 0$, entonces $\varphi'(t) = \| \vec{g}\,'(t) \| > 0$.

Es decir φ es estrictamente creciente con $\varphi(a) = s_a$ y $\varphi(b) = s_b$, admitiendo función inversa φ^{-1}.

Así, siendo $s = \varphi(t)$ con $a \le t \le b$, queda definida $t = \varphi^{-1}(s)$ con $s_a \le s \le s_b$. Reemplazando esta última en la ecuación original de la curva resulta:

$$\vec{X} = \underbrace{\vec{g}(\varphi^{-1}(s))}_{\vec{\Omega}(s)} \ \text{con} \ s_a \le s \le s_b \qquad (6)$$

que se denomina **ecuación normal de la curva**, en este caso s se denomina **parámetro intrínseco**.

Salvo casos muy particulares, en general no es posible obtener una forma explícita para la ecuación normal, pero su uso conceptual es muy importante en algunas aplicaciones técnicas y de física teórica. Sólo para fijar ideas, veamos el siguiente ejemplo sencillo.

<u>Ejemplo</u>: Dada la circunferencia de ecuación $\vec{X} = (3\cos(t), 3\text{sen}(t))$ con $0 \le t \le 2\pi$, halle su ecuación normal tomando como origen de abscisas curvilíneas el punto (0,3).

En este caso $\vec{g}(t) = (3\cos(t), 3\text{sen}(t)) \to \vec{g}\,'(t) = (-3\text{sen}(t), 3\cos(t)) \to \| \vec{g}\,'(t) \| = 3$. Además, $t_0 = \pi/2$ para que $\vec{g}(t_0) = \vec{g}(\pi/2) = (0,3)$, el origen de abscisas especificado.

[6] De la misma manera que en la $\int_a^b f(x)\,dx$ el dx es, geométricamente, una longitud Δx tan pequeña como pueda imaginársela.

Entonces, aplicando (4), $s = \int_{t_0}^{t} \| \vec{g}\,'(t) \| \, dt = \int_{\pi/2}^{t} 3 \, dt = \underbrace{3(t - \pi/2)}_{\varphi(t)}$.

Dado que $s = 3\,(t - \pi/2) \to t = \underbrace{s/3 + \pi/2}_{\varphi^{-1}(s)}$. Además, con $0 \le t \le 2\pi$, resulta $-\frac{3}{2}\pi \le s \le \frac{9}{2}\pi$.

Reemplazando en la ecuación original, la de $\vec{X} = (3\cos(t), 3\mathrm{sen}(t))$ con $0 \le t \le 2\pi$, resulta:

$$\vec{X} = \underbrace{(3\cos(s/3 + \pi/2), 3\mathrm{sen}(s/3 + \pi/2))}_{\vec{\Omega}(s)} \text{ con } -\tfrac{3}{2}\pi \le s \le \tfrac{9}{2}\pi,$$

que es la ecuación normal de la curva con origen en $\vec{\Omega}(0) = (0{,}3)$.

Observe que la longitud de la circunferencia podemos calcularla como $\frac{9}{2}\pi - (-\frac{3}{2}\pi) = 6\pi$, es decir, $2\pi \cdot \text{radio} = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$. También se verifica que la recorremos desde $\vec{\Omega}(-\frac{3}{2}\pi) = (3{,}0)$, pasando por $\vec{\Omega}(0) = (0{,}3)$, hasta $\vec{\Omega}(\frac{9}{2}\pi) = (3{,}0)$, con los mismos puntos inicial y final (coincidentes) y la misma orientación impuesta por la ecuación original.

Por último, por conveniencia para estudiar los temas que siguen, definimos el *diferencial vectorial de longitud de arco de curva* que lo denotaremos $d\vec{s}$.

Es un vector cuya longitud es la de ds, el diferencial escalar de longitud de arco de curva, es tangente a la curva y está orientado en el sentido de los arcos crecientes.

Es decir,

$$\boxed{d\vec{s} \doteq ds\,\breve{T}} \quad \textbf{diferencial vectorial de longitud de arco de curva}. \qquad (7)$$

Donde $\breve{T}$ es un versor tangente a la curva y orientado en el sentido de los arcos crecientes.

> La intención es rectificar el trozo de curva de longitud ds en la dirección de la recta tangente y generar un vector con esa longitud, que esté orientado en el sentido de los arcos crecientes.

Siendo C una curva suave de ecuación $\vec{X} = \vec{g}(t)$ con $t \in I$, dado que $\vec{g}\,'(t)$ es continuo y no nulo, es tangente a C en el punto $\vec{g}(t)$ y está orientado en el sentido de los arcos crecientes, podemos obtener $\breve{T}$ normalizando $\vec{g}\,'(t)$.

Además, por (5) resulta $ds = \| \vec{g}\,'(t) \| dt$, entonces reemplazando en (7) obtenemos:

$$d\vec{s} \doteq \| \vec{g}\,'(t) \| dt \, \frac{\vec{g}\,'(t)}{\|\vec{g}\,'(t)\|},$$

es decir,

$$\boxed{d\vec{s} = \vec{g}\,'(t)\, dt} \qquad (8)$$

permite obtener la expresión del diferencial vectorial de longitud de arco de curva.

Los temas correspondientes al T.P. VII continúan en la síntesis S-7B