

Esta síntesis no es un apunte de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

Independencia del camino en integral de línea de campo vectorial

Teorema

Sea $\vec{f}: H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $\vec{f}$ continuo en H abierto y conexo, si existe un campo $\phi: H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{f} = \nabla \phi$ en todo punto de H , la circulación de $\vec{f}$ desde $\vec{A}$ hasta $\vec{B}$ a lo largo de una curva suave a trozos $C \subset H$ no depende de la curva que se utilice, cumpliéndose que:

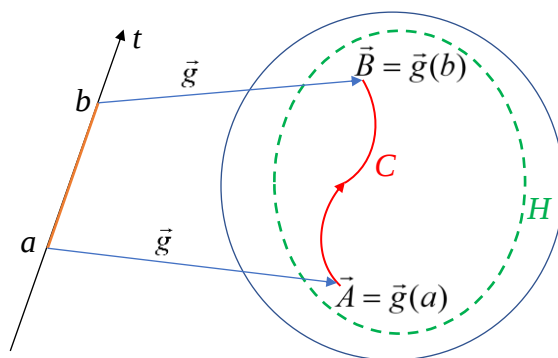
$$\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi(\vec{B}) - \phi(\vec{A}). \quad (1)$$

Demostración:

Primero consideremos C suave, de ecuación

$$\vec{X} = \vec{g}(t) \text{ con } a \leq t \leq b,$$

y que la parametrización establecida por $\vec{g}$ orienta a la curva desde el punto inicial $\vec{A} = \vec{g}(a)$ hacia el punto final $\vec{B} = \vec{g}(b)$, según se indica en el gráfico.



Entonces,

$$\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \underbrace{\vec{f}(\vec{g}(t))}_{\nabla \phi(\vec{g}(t))} \cdot \vec{g}'(t) dt = \int_a^b \underbrace{\nabla \phi(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t)}_{du} dt$$

Imponiendo $u = \phi(\vec{g}(t))$, resulta ⁽¹⁾

$$du = \nabla \phi(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t) dt \text{ con } u_a = \phi(\vec{g}(a)) = \phi(\vec{A}) \text{ y } u_b = \phi(\vec{g}(b)) = \phi(\vec{B})$$

$$\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \underbrace{\nabla \phi(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t) dt}_{du} = \int_{\phi(\vec{A})}^{\phi(\vec{B})} du = \phi(\vec{B}) - \phi(\vec{A}),$$

como se indica en (1).

Si la curva es suave a trozos y puede expresarse como $C = C_{A_0, A_1} \cup \dots \cup C_{A_{n-1}, A_n}$, es decir, la unión de n trozos suaves del tipo C_{A_{k-1}, A_k} con $k=1, \dots, n$, siendo $\vec{A}_0 = \vec{A}$ y $\vec{A}_n = \vec{B}$, también resulta:

$$\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{C_{A_0, A_n}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \sum_{k=1}^n \int_{C_{A_{k-1}, A_k}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \sum_{k=1}^n \phi(\vec{A}_k) - \phi(\vec{A}_{k-1}) = \phi(\vec{A}_n) - \phi(\vec{A}_0) = \phi(\vec{B}) - \phi(\vec{A}).$$

La función ϕ tal que $\vec{f} = \nabla \phi$, en H abierto y conexo, se denomina **función potencial** de $\vec{f}$.

$\phi(\vec{A})$ es el potencial del punto inicial del recorrido
 $\phi(\vec{B})$ es el potencial del punto final del recorrido

$\phi(\vec{B}) - \phi(\vec{A})$ es la diferencia de potencial (ddp), entre el punto final e inicial del recorrido.

⁽¹⁾ Ver derivada de campo escalar evaluado en puntos de una curva (Síntesis S-4A, pág. 5/6). Observe que al ser $\vec{f} = \nabla \phi$ continuo, resulta $\phi \in C^1 \Rightarrow \phi$ diferenciable, con lo cual se puede aplicar la regla de la cadena, pues $\vec{g}$ es derivable.

Por otra parte, siendo $\vec{f} = \nabla \phi$, se dice que “ $\vec{f}$ admite función potencial” o bien que “ $\vec{f}$ es un campo de gradientes”.

Consecuencias directas del teorema, cumpliéndose las hipótesis enunciadas:

1. La integral en camino cerrado es nula.

Dado que el arco de curva C es cerrado, $\vec{A} = \vec{g}(a) = \vec{g}(b) = \vec{B}$, entonces:

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\phi(\vec{B})}_{=\phi(\vec{A})} - \phi(\vec{A}) = 0.$$

2. Siendo $\vec{f} = \nabla \phi$, la $\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$ cuando $\phi(\vec{B}) = \phi(\vec{A})$.

Es decir, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen igual potencial, lo cual no significa que sean coincidentes. Sólo indica que ambos puntos pertenecen al mismo conjunto de nivel de ϕ .

Los conjuntos de nivel de ϕ se denominan **conjuntos equipotenciales** (de igual potencial).

Ejemplo: Si $\phi(x, y) = xy - x^3 + 2$, $\vec{A} = (0, 0.5)$ y $\vec{B} = (1, 1)$,

$$\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi(\vec{B}) - \phi(\vec{A}) = 2 - 2 = 0.$$

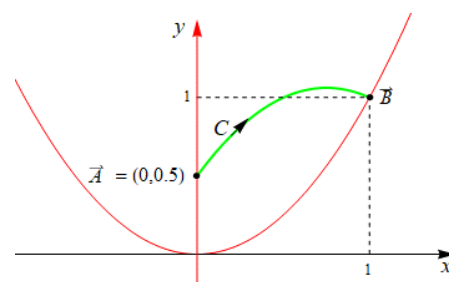
Ambos puntos tienen potencial igual a 2, pertenecen al conjunto equipotencial de potencial 2.

Dicho conjunto, L_2 , está formado por los puntos del plano que cumplen con:

$$xy - x^3 + 2 = 2 \rightarrow x(y - x^2) = 0.$$

Los puntos de L_2 son los de la parábola de ecuación $y = x^2$ y los del eje y , que se representan en color rojo en la figura.

En color verde se dibuja una curva cualquiera, de puntos extremos $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



3. Cuando $\vec{f}$ es un campo de fuerzas y $\vec{f} = \nabla \phi$, se dice que $\vec{f}$ es un **campo conservativo**.

El trabajo de un campo conservativo es nulo en camino cerrado y entre puntos de igual potencial.

En física, para este tipo de campos, interesa calcular el **trabajo realizado en contra del campo** que –por definición– es el realizado por el campo cambiado de signo. Es decir,

$$\text{Trabajo en contra del campo} = -\text{Trabajo realizado por el campo} = -\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -[\phi(\vec{B}) - \phi(\vec{A})]$$

Para ello, física define como función potencial a:

$$\boxed{U = -\phi}, \text{ con lo cual } \boxed{\vec{f} = \nabla \phi = -\nabla U},$$

de esta manera resulta “ $-\phi(\vec{B}) + \phi(\vec{A}) = U(\vec{B}) - U(\vec{A})$ ”, resultando:

$$\text{Trabajo en contra del campo} = -\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = U(\vec{B}) - U(\vec{A}).$$

Comentario: Dado que $\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi(\vec{B}) - \phi(\vec{A})$, la integral se calcula usando ϕ , que sólo tiene relación con el campo $\vec{f}$ y únicamente con los puntos inicial y final del recorrido. Por lo tanto, no depende de la curva que se considere.

Igualmente, no está de más observar el gráfico de la derecha.

Es claro que, como $\vec{f} = \nabla \phi$,

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0.$$

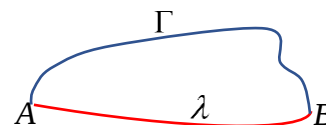
En este caso $C = \Gamma \cup \lambda$, donde Γ y λ son dos arcos de curva cualesquiera con puntos extremos A y B.

Entonces:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \int_{\Gamma_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\lambda_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = - \int_{\lambda_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{\Gamma_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\lambda_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s}. \end{aligned}$$

observe que el signo “-” se compensa con el cambio de orientación de λ

En esta última se resalta que la circulación desde A hasta B no cambia si usamos dos curvas diferentes que comparten dichos puntos extremos.



Teniendo ϕ , es fácil hallar $\vec{f}$. Por ejemplo, si $\phi(x, y) = x^2 + xy$ definida en $\mathbb{R}^2$, calculando el gradiente resulta $\vec{f}(x, y) = (2x + y, x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. El problema es, dado $\vec{f}$, analizar si existe ϕ y obtener su expresión. Comencemos por mencionar una condición necesaria de existencia.

Teorema

Sea $\vec{f}: H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $\vec{f} \in C^1$ en H abierto y conexo, si existe un campo $\phi: H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{f} = \nabla \phi$ en todo punto de H , la matriz jacobiana de $\vec{f}$ es simétrica.

Demostración:

Es claro que si $\vec{f} = \nabla \phi$ y $\vec{f} \in C^1(H)$, $\nabla \phi \in C^1(H)$, con lo cual $\phi \in C^2(H)$.

Por otra parte, ya que $\vec{f} = \nabla \phi$, $\vec{f} = (\phi'_{x_1}, \phi'_{x_2}, \dots, \phi'_{x_m})$.

De donde, la matriz jacobiana de $\vec{f}$ es del tipo que se representa a la derecha.

Como puede observarse, los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son:

$$\phi''_{x_i x_j} = \phi''_{x_j x_i} \text{ pues } \phi \in C^2(H)$$

$$D\vec{f} = \begin{pmatrix} \phi''_{x_1 x_1} & \phi''_{x_1 x_2} & \cdots & \phi''_{x_1 x_m} \\ \phi''_{x_2 x_1} & \phi''_{x_2 x_2} & \cdots & \phi''_{x_2 x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_{x_m x_1} & \phi''_{x_m x_2} & \cdots & \phi''_{x_m x_m} \end{pmatrix}$$

Con lo cual queda demostrado que $D\vec{f}$ es simétrica en H .

¿Qué estamos asegurando?, con $\vec{f} \in C^1$ en H abierto y conexo:

$$\text{existe } \phi \text{ en } H \Rightarrow D\vec{f} \text{ simétrica en } H,$$

pero el recíproco no es válido. $D\vec{f}$ simétrica no asegura la existencia de ϕ .

El teorema asegura: “existe ϕ en $H \Rightarrow D\vec{f}$ simétrica en H ”,
con lo cual: $D\vec{f}$ no simétrica en $H \Rightarrow$ no existe ϕ en H .

Para que exista ϕ es necesario $D\vec{f}$ simétrica, pero no es suficiente.

Ejemplo: Dado $\vec{f}(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ definido en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, es fácil verificar que tiene matriz jacobiana continua y simétrica en su dominio (se deja como ejercicio).

Observe que $\vec{f} \in C^1 \equiv D\vec{f}$ continua.

Si ahora se calcula $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, donde C tiene ecuación $\vec{X} = \underbrace{(\cos(t), \sin(t))}_{\vec{g}(t)}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ (una circunferencia de radio 1 con centro en el origen), resulta:

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t) dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin(t), \cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))}_{=1} dt = 2\pi \neq 0$$

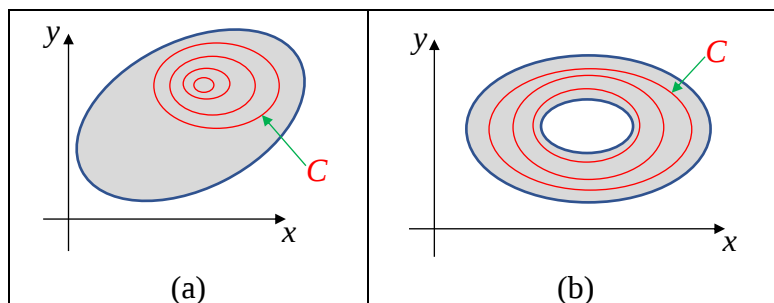
Como la integral en camino cerrado resultó no nula, se concluye que $\vec{f}$ no admite función potencial en su dominio (si existiera ϕ , toda integral en camino cerrado se anularía).

Conjunto simplemente conexo

Un conjunto conexo $H \subset \mathbb{R}^m$ se dice que es **simplemente conexo**, cuando toda curva cerrada trazada en él puede –por deformación continua– convertirse en un punto manteniéndose en el conjunto. ⁽²⁾

En las figuras de la derecha se muestran dos conjuntos H sombreados en el plano xy , ambos conexos.

También se representa una curva C en color rojo y diferentes curvas –cada vez más pequeñas– que tratan de mostrar la evolución de C intentando transformarse en un punto.



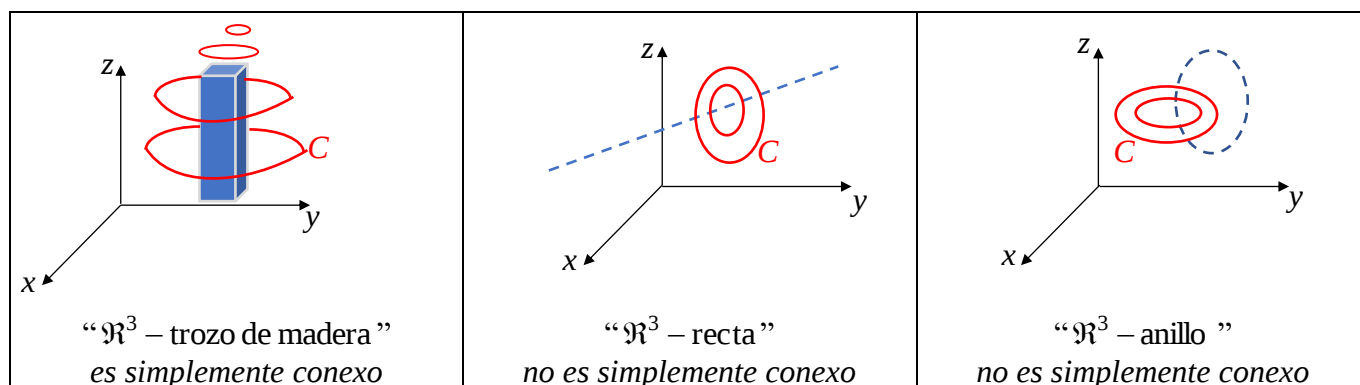
En el caso (a), cualquier C que tracemos puede convertirse en un punto manteniéndose en el conjunto H sombreado, entonces H es simplemente conexo.

En (b), el conjunto sombreado H no es simplemente conexo. Alcanza con ver que la C dibujada no puede “ir achicándose hasta transformarse en un punto”, manteniéndose en H .

En $\mathbb{R}^2$ un conjunto conexo es simplemente conexo, cuando no tiene agujeros.

En el ejemplo anterior, el campo $\vec{f}$ está definido en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ que es conexo, pero no es simplemente conexo (si al plano le quitamos el origen, tiene un agujero).

⁽²⁾ Esta es una descripción gráfica del concepto, no es una definición formal.



En los esquemas superiores, se muestran tres ejemplos en $\mathbb{R}^3$:

- “ $\mathbb{R}^3$ – trozo de madera” es simplemente conexo porque, aunque partamos de una curva que rodea al objeto, podemos ir moviéndola hasta transformarla en un punto sin tocar al objeto (la madera).
- “ $\mathbb{R}^3$ – recta” no es simplemente conexo, una curva que rodea a la recta no podemos achicarla hasta transformarla en un punto evitando tocar la recta (manteniéndose en el conjunto).
- “ $\mathbb{R}^3$ – anillo” no es simplemente conexo, una curva que enlace al anillo no puede transformarse en un punto sin tocar al anillo (manteniéndose en el conjunto).

Otros ejemplos:

- $\vec{f}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2} \right)$. El dominio natural, $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$, no es simplemente conexo.
- $\vec{f}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}, 4z \right)$. El dominio natural, $\mathbb{R}^3$ – eje z , no es simplemente conexo.
- $\vec{f}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \right)$. El dominio natural, $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$, es simplemente conexo.

Propiedad:

Dado $\vec{f} : H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, si $D\vec{f}$ es continua y simétrica en H abierto y simplemente conexo, entonces existe ϕ tal que $\vec{f} = \nabla \phi$ en todo punto de H .

Sin embargo, un campo puede tener función potencial en un conjunto que no es simplemente conexo.

Ejemplo: $\vec{f}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2} \right)$ admite como función potencial a $\phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ en $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$, que no es simplemente conexo.

El análisis completo sobre existencia de función potencial y la justificación de la propiedad mencionada, podremos encararlos cuando estudiemos los temas relativos al T.P. X (teoremas integrales).

Aun así, para los casos que exista función potencial, conviene saber desde ahora de qué manera se trabaja para lograr una expresión de la misma.

Obtención de la función potencial

Suponiendo que existe ϕ tal que $\vec{f} = \nabla\phi$ en $H \subset \mathbb{R}^m$, dado $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$ deberá cumplirse que:

$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) = (\phi'_{x_1}, \dots, \phi'_{x_m}), \text{ es decir, } \begin{cases} \phi'_{x_1} = f_1 \\ \vdots \\ \phi'_{x_m} = f_m \end{cases}.$$

El dato es $\vec{f}$, dado que las componentes del campo las conocemos, sabemos cuales son las expresiones de las derivadas parciales de ϕ . Por lo tanto, el problema se reduce a hallar la expresión de una función escalar conociendo las de sus derivadas parciales de 1º orden.

Ejemplo: Dado $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{f}(x, y) = (2xy + y, x^2 + x + 1)$, analice si admite función potencial en su dominio y, en caso afirmativo, determínela.

En este caso $D\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+1 \\ 2x+1 & 0 \end{pmatrix}$ es continua y simétrica en $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists \phi$.⁽³⁾

Para hallar ϕ planteamos: $\begin{cases} \phi'_x(x, y) = 2xy + y & (1) \\ \phi'_y(x, y) = x^2 + x + 1 & (2) \end{cases}$

Ahora integramos, por ejemplo:

$$(1) \rightarrow \phi(x, y) = \int (2xy + y) dx = x^2 y + xy + \lambda(y) \quad (*)$$

La integral se realizó respecto de x , considerando la y constante, porque así se calcula ϕ'_x . Es más, la constante de integración debe considerarse que es función de la variable que se toma como constante en el proceso de integración.

Ahora de (*) derivamos respecto de y , debe resultarnos lo indicado en (2). Es decir,

$$\phi'_y(x, y) \stackrel{(*)}{=} x^2 + x + \lambda'(y) \stackrel{(2)}{=} x^2 + x + 1$$

$$\text{De donde, } \lambda'(y) = 1 \rightarrow \frac{d\lambda(y)}{dy} = 1 \rightarrow d\lambda(y) = dy \rightarrow \int d\lambda(y) = \int dy \rightarrow \lambda(y) = y + C$$

Finalmente, reemplazando esta última en (*) resulta:

$$\phi(x, y) = x^2 y + xy + y + C$$

Verificación:

$$\nabla\phi(x, y) = (2xy + y, x^2 + x + 1) = \vec{f}(x, y) \text{ en } \mathbb{R}^2, \text{ para todo valor de la constante } C.$$

Nota: Observe que el proceso nos lleva a obtener la familia de las posibles funciones potenciales de $\vec{f}$, toda cumplen con $\nabla\phi = \vec{f}$. En la práctica se trabaja con la más sencilla, por ejemplo la de $C=0$, porque no importa el potencial de un punto, sólo importa la diferencia de potencial entre puntos (ddp) y esa diferencia no depende del valor que adoptemos para la constante.

Sólo interesa la expresión (1): $\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi(\vec{B}) - \phi(\vec{A})$ que calcula la integral mediante ddp .

⁽³⁾ Es claro que todo el espacio es abierto y simplemente conexo.

Ejemplo: Dado $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \vec{f}(x, y, z) = (z + 4yz^2, z + 4xz^2, x + y + 8xyz + 2)$, analice si admite función potencial en su dominio y, en caso afirmativo, determínela.

En este caso $D\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 4z^2 & 1+8yz \\ 4z^2 & 0 & 1+8xz \\ 1+8yz & 1+8xz & 8xy \end{pmatrix}$ es continua y simétrica en $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists \phi$.

Para hallar ϕ planteamos:

$$\begin{cases} \phi'_x(x, y, z) = z + 4yz^2 & (1) \\ \phi'_y(x, y, z) = z + 4xz^2 & (2) \\ \phi'_z(x, y, z) = x + y + 8xyz + 2 & (3) \end{cases}$$

Ahora integramos, por ejemplo, desde (2):

$$(2) \rightarrow \phi(x, y, z) = \int (z + 4xz^2) dy = yz + 4xyz^2 + \lambda(x, z) \quad (*)$$

Integramos considerando x y z constantes, la constante de integración λ depende de ellas.

Derivamos (*) respecto de x para usar (1): ⁽⁴⁾

$$\phi'_x(x, y, z) \stackrel{(*)}{=} 4yz^2 + \lambda'_x(x, z) \stackrel{(1)}{=} z + 4yz^2$$

De donde, $\lambda'_x(x, z) = z \rightarrow \lambda(x, z) = \int z dx = xz + \varphi(z)$, que reemplazada en (*) produce:

$$\phi(x, y, z) = yz + 4xyz^2 + xz + \varphi(z) \quad (**)$$

Por último, derivamos (**) respecto de z para igualar a (3):

$$\phi'_z(x, y, z) \stackrel{(**)}{=} y + 8xyz + x + \varphi'(z) \stackrel{(3)}{=} x + y + 8xyz + 2$$

Entonces, $\varphi'(z) = 2 \rightarrow \varphi(z) = 2z + C$ la cual, reemplazada en (**), permite obtener:

$$\phi(x, y, z) = yz + 4xyz^2 + xz + 2z + C.$$

Que es la familia de todas las posibles funciones potenciales de $\vec{f}$, basta con calcular el gradiente para verificar que $\nabla \phi = \vec{f}$ en $\mathbb{R}^3$.

⁽⁴⁾ También se podría derivar respecto de z para usar (3) y, al final, usar (2).