Esta síntesis <u>no es un apunte</u> de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

Integral doble

Sea $f : H = [a,b]\times[c,d] \subset \Re^2 \to \Re$, con f acotada [(1)] en el intervalo H [(2)].

Definamos ahora dos particiones cualesquiera, P_1 y P_2, de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente:

$$P_1 = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\},$$

$$P_2 = \{c = y_0, y_1, \cdots, y_m = d\}.$$

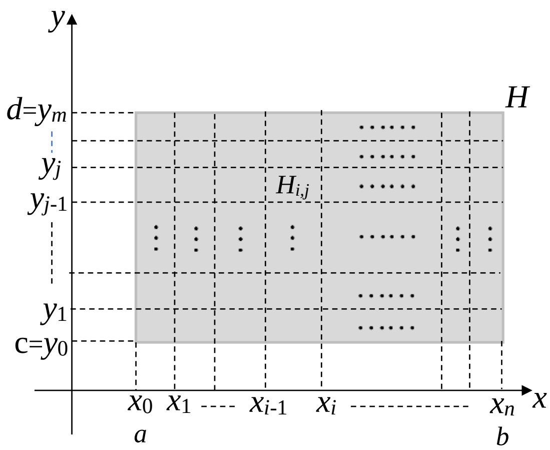
Entonces, la partición $P = P_1 \times P_2$ (el producto cartesiano de ambas), subdivide al intervalo H en $n\cdot m$ subintervalos

$$H_{i,j} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]$$

con $i = 1,\cdots,n$ y $j = 1,\cdots,m$, de áreas:

$$\text{área}(H_{i,j}) = \Delta x_i \,\Delta y_j$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, como se representa en el gráfico.



Para cada subintervalo $H_{i,j}$ calculemos el producto $f(\alpha_i,\beta_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j$, donde (α_i,β_j) es un punto cualquiera del $H_{i,j}$, y luego sumemos para todos los subintervalos. Es decir, consideremos la siguiente suma:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\alpha_i,\beta_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,,$$

que es una *suma doble* para contemplar a todos los $H_{i,j}$, con $i = 1,\cdots,n$ y $j = 1,\cdots,m$.

Si denotamos con $\delta_{i,j} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}$, que se denomina *diámetro* del $H_{i,j}$ (la longitud de su diagonal, ambas diagonales tienen igual longitud), la **norma de la partición *P*** se denota δ y es el máximo de todos los diámetros. Es decir, $\delta = \text{máx}\{\delta_{i,j},\, i = 1,\cdots,n\,,\ j = 1,\cdots,m\}$.

Cuando existe y es finito el límite que se indica,

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\alpha_i,\beta_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j \doteq \iint_H f(x,y)\,dx\,dy$$

es la integral doble de f en H.

Siendo x e y variables independientes, desde el punto de vista geométrico, cada diferencial (dx o dy) representa la longitud de un pequeño incremento de la variable, tan pequeño como podamos imaginarlo.
Por su parte, $d(\text{área}) = dx\,dy$ representa el área de un subintervalo tan pequeño como podamos imaginarlo.

De esta manera, $\iint_H f(x,y)\,dx\,dy$ se interpreta como el resultado de la "suma de los $f(x,y)\,dx\,dy$" extendida a cada punto de H.

(1) Recuerde que la función f es acotada en H, cuando existe M finito tal que: $|\,f(X)\,| \le M \quad \forall X \in H$.

(2) El rectángulo H es un intervalo en $\Re^2$, por ser generado mediante el producto cartesiano de dos intervalos reales.

Cálculo de integral doble en un rectángulo (teorema de Fubini).

Sea $f : H = [a,b] \times [c,d] \subset \Re^2 \to \Re$, con f acotada en el intervalo H.

Si existen $\iint_H f(x,y)\,dx\,dy$ y $\int_c^d f(x,y)\,dy = \varphi(x)\ \ \forall x \in [a,b]$, entonces existe $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ resultando:

$$\iint_H f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

donde $\int_c^d f(x,y)\,dy$ se calcula suponiendo que x es constante.

De esta manera, la integral doble se puede calcular como dos integrales simple sucesivas. La siguiente es una forma más amigable de anotar lo dicho:

$$\iint_H f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \{\overbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}^{\varphi(x)}\}\,dx,$$

que, desde el punto de vista práctico, no requiere mencionar a la función φ. Sin embargo. es muy raro que se indiquen las llaves, se puede observar notaciones del siguiente tipo:

$$\iint_H f(x,y)\,dx\,dy = \underbrace{\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx}_{\text{(I)}} \equiv \underbrace{\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy}_{\text{(II)}}.$$

En la forma (I), debemos interpretar que los límites c y d son para la integral respecto de la variable y, porque dy está "más cerca de ellos", luego se hace la integral respecto de x con límites a y b.
En la forma (II), la que usaremos en los ejemplos, queda claro que la integral respecto de y tiene límites c y d. Luego, su resultado debe integrarse respecto de x entre a y b.

Análogamente, podría resolverse en el otro orden de integración, es decir:

$$\iint_H f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy \equiv \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

<u>Ejemplo</u>: Calcule $\iint_H (x\,y + 2\,y)\,dx\,dy$ con $H = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, 3 \le x \le 4 \wedge 0 \le y \le 2\}$.

$$\iint_H (x\,y+2\,y)\,dx\,dy = \int_3^4 dx \underbrace{\int_0^2 (x\,y+2\,y)\,dy}_{\substack{[\frac{1}{2}x\,y^2+y^2]_0^2= \\ =2\,x+4}} = \int_3^4 (2\,x+4)\,dx = [x^2+4\,x]_3^4 = 11.$$

También podríamos haber hecho:

$$\iint_H (x\,y+2\,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dy \underbrace{\int_3^4 (x\,y+2\,y)\,dx}_{\substack{[\frac{1}{2}x^2 y+2\,x\,y]_3^4= \\ =\frac{7}{2}y+2\,y}} = \int_0^2 \tfrac{11}{2}\,y\ dy = [\tfrac{11}{4}\,y^2]_0^2 = 11.$$

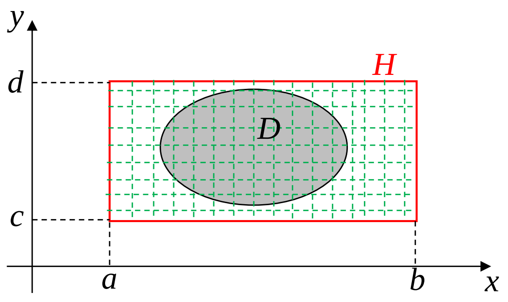
Por ahora sólo sabemos cómo se integra en un rectángulo y no mencionamos aplicaciones.

Vamos a plantear la forma de cálculo para regiones más generales, mencionemos algunas propiedades y luego nos dedicamos a las aplicaciones.

Integral doble en regiones más generales

Sea $f : D \subset \Re^2 \to \Re$, con f acotada en D. Supongamos además que D es un conjunto acotado con frontera ∂D de área nula. (3)

Dado que D es un conjunto acotado se lo puede incluir en un rectángulo $H = [a,b] \times [c,d]$, como se indica en la figura.



En estas condiciones se define una función ψ tal que:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \in H - D \end{cases}.$$

Se dice que f es integrable en D cuando ψ lo es en H, resultando –por definición– que:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_H \psi(x,y)\,dx\,dy .$$

Observando el gráfico vemos que una partición P de H (representada en color verde) tiene subintervalos $H_{i,j}$ incluidos en D, para ellos $\psi = f$. También tiene $H_{i,j}$ afuera de D, para ellos el aporte de ψ es nulo. Por último, en el conjunto formado por la unión de los $H_{i,j}$ que tienen puntos interiores y puntos exteriores a D está incluida la frontera de D. El concepto de frontera de área nula tiene relación con que el área de dicho conjunto puede hacerse tan pequeña como se desee, manteniendo a la frontera incluida en él.
Como estamos trabajando con funciones acotadas, la colaboración de ψ para estos subintervalos también puede hacerse tan pequeña como se desee. Es decir, es lo mismo que en la integral (en el límite, cuando la norma de la partición tiende a cero) se conciba trabajar sólo con los $H_{i,j}$ interiores a D o incluir también a aquellos que contienen a la frontera de D.

Este planteo permite extender la fórmula de cálculo mencionada en la página anterior, en principio, a dos regiones planas denominadas **regiones simples**.

Cálculo de la integral doble en una región simple

Existen dos tipos de regiones simples, que describimos a continuación.

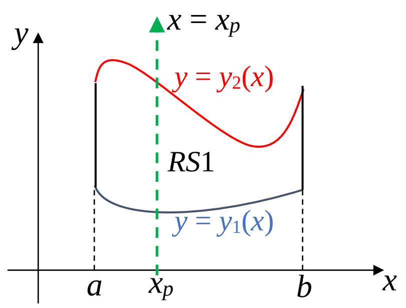
***Región simple tipo* 1** ($RS1$)

Como se observa en el esquema,

$$RS1 = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\; y_1(x) \le y \le y_2(x) \;\wedge\; a \le x \le b\},$$

donde y_1, y_2 son funciones continuas en el $[a, b]$. Además, toda recta paralela al eje y de ecuación $x = x_p$ con $a < x_p < b$ tiene, a lo sumo, dos puntos en común con la frontera de la región:

$$(x_p, y_1(x_p)) \text{ y } (x_p, y_2(x_p)).$$



Para este tipo de región, la integral se resuelve de la siguiente manera:

$$\iint_{RS1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Observe que los límites de y son, **en el sentido creciente del eje *y***, “el límite inferior: $y = y_1(x)$” y “el límite superior $y = y_2(x)$”.

(3) Para las aplicaciones alcanza con que ∂D sea la unión de una cantidad finita de arcos de curva, en ese caso $\text{área}(\partial D) = 0$.

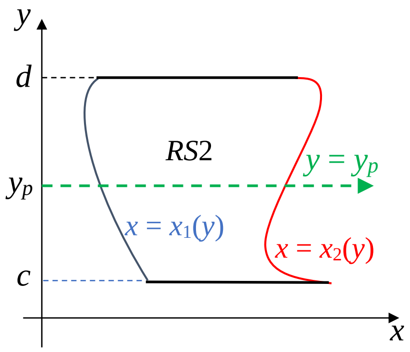
Región simple tipo 2 ($RS2$)

Como se observa en el esquema,

$$RS2 = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\; x_1(y) \le x \le x_2(y) \;\wedge\; c \le y \le d\},$$

donde x_1, x_2 son funciones continuas en el $[c, d]$. Además, toda recta paralela al eje x de ecuación $y = y_p$ con $c < y_p < d$ tiene, a lo sumo, dos puntos en común con la frontera de la región:

$$(x_1(y_p), y_p) \text{ y } (x_2(y_p), y_p).$$



Para este tipo de región, la integral se resuelve de la siguiente manera:

$$\iint_{RS2} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx$$

Observe que los límites de x son, **en el sentido creciente del eje *x***, "el límite inferior: $x = x_1(y)$" y "el límite superior $x = x_2(y)$".

Una región simple es tipo 3 ($RS3$) cuando es $RS1$ y $RS2$, por ejemplo, un rectángulo o un círculo.

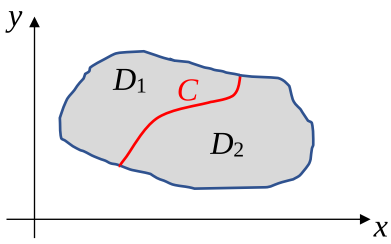
Condición de integrabilidad: Siendo f acotada y continua en un conjunto D acotado y con frontera de área nula, queda definida la integral doble de f en D.
También es integrable si f, manteniéndose acotada, presenta discontinuidades en un conjunto de área nula de D. Por ejemplo, en un punto o en un arco de curva.

Propiedades de las integrales dobles: Suponiendo f y g funciones integrables en D.

1. Si k es constante, $\iint_D k\, f(x, y)\, dx\, dy = k \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$.
2. $\iint_D (f(x, y) + g(x, y))\, dx\, dy = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy + \iint_D g(x, y)\, dx\, dy$.
3. $|\iint_D f(x, y)\, dx\, dy| \le \iint_D |f(x, y)|\, dx\, dy$.
4. Si $D = D_1 \cup D_2$ con $\text{área}(D_1 \cap D_2) = 0$, entonces:

   $$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$

   En el dibujo se representa el caso en que D se subdivide en dos partes (D_1 y D_2) cuya intersección es el arco de curva C que, como tal, tiene área nula.



$D = D_1 \cup D_2$, $C = D_1 \cap D_2$

Esta última propiedad permite resolver integrales dobles en regiones que se puedan subdividir en cantidad finita de regiones simples.

Nociones acerca de aplicaciones de las integrales dobles

- Si $f(x,y) = 1 \ \forall (x,y) \in D$, entonces $\boxed{\iint_D \underbrace{dx\,dy}_{d(\text{área})} = \text{área}(D)}$.

  En este caso la integral “suma los diferenciales de área”, con lo cual, el resultado que se obtiene es el del área de la región plana D.

Para otras aplicaciones supongamos una chapa plana (trozo de plano xy de espesor despreciable) que denominamos D y tiene la forma de la región plana con la misma denominación. Si adoptamos al metro^2 (m^2) como unidad de medida del diferencial de área, podemos mencionar los siguientes ejemplos elementales:

- $\iint_D \overbrace{\underbrace{f(x,y)}_{\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}}\underbrace{dx\,dy}_{m^2}}^{d(\text{masa})} = \underbrace{\text{Masa}(D)}_{\text{kg}}$, donde f es la densidad superficial de masa (también denotada con δ).

- $\iint_D \overbrace{\underbrace{f(x,y)}_{\frac{\$}{\text{m}^2}}\underbrace{dx\,dy}_{m^2}}^{d(\text{costo})} = \underbrace{\text{Costo}(D)}_{\$}$, donde f representa los \$/m^2 (costo por unidad de área) en cada punto.

- $\iint_D \overbrace{\underbrace{f(x,y)}_{\frac{\text{Coul}}{\text{m}^2}}\underbrace{dx\,dy}_{m^2}}^{d(\text{carga})} = \underbrace{\text{Carga}(D)}_{\text{Coul}}$, donde f representa la densidad superficial de carga eléctrica (también denotada con σ) en Coul/m^2 (Coulomb/m^2).

Por otra parte, el **valor medio** f_{med} del campo escalar f en *D*, es el valor constante que debería tener para que su integral doble en D resulte de igual valor. Es decir,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \underbrace{f_{\text{med}}}_{\text{constante}}\,dx\,dy = f_{\text{med}} \iint_D dx\,dy = f_{\text{med}}\ \text{área}(D),$$

de donde:

$$\boxed{f_{\text{med}} = \frac{1}{\text{área}(D)} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy} \qquad (1)$$

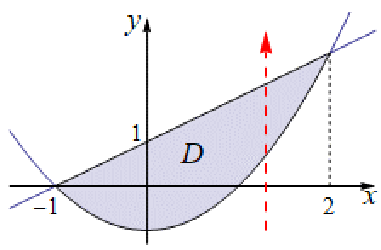
valor medio de *f* en D

<u>Ejemplo</u>: Dado $f(x,y) = x\,y^2$, calcule el valor medio de f en la región acotada *D*, limitada por las curvas de ecuaciones $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$.

La región D es la sombreada en la figura. Es sencillo verificar que las curvas se intersecan en los puntos $(-1,0)$ y $(2,3)$.

La integral doble de una función f en esa región es:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2-1}^{x+1} f(x,y)\,dy.$$



La línea roja, en el sentido creciente del eje *y*, permite establecer los límites para la integral respecto de y: “ $y = x^2 - 1$, el inferior” e “ $y = x + 1$, el superior”.

Para resolver el ejercicio sólo falta calcular las dos integrales que se requieren para aplicar (1).

Los límites ya están planteados, sólo dependen del análisis que hicimos de la región D.

$$\text{área}(D) = \iint_D dx\,dy = \int_{-1}^{2} dx \underbrace{\int_{x^2-1}^{x+1} dy}_{x+1-(x^2-1)} = \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2)\,dx = [\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + 2x]_{-1}^{2} = 9/2\,.$$

$$\iint_D \underbrace{x\,y^2}_{f(x,y)}\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} dx \underbrace{\int_{x^2-1}^{x+1} x\,y^2\,dy}_{x\frac{1}{3}[y^3]_{x^2-1}^{x+1}} = \tfrac{1}{3}\int_{-1}^{2} x\,[(x+1)^3 - (x^2-1)^3]\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{3}\int_{-1}^{2} (-x^7 + 3x^5 + x^4 + 3x^2 + 2x)\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{3}\,[-\tfrac{1}{8}x^8 + \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{5}x^5 + x^3 + x^2]_{-1}^{2} = 243/40$$

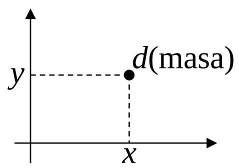
Entonces, aplicando (1), resulta $\boxed{f_{\text{med}} = \frac{1}{9/2}\,\frac{243}{40} = \frac{27}{20}}$.

Las siguientes son otras aplicaciones en relación con una chapa plana D, con densidad superficial de masa $\delta(x, y)$ en cada punto $(x, y) \in D$.

Momentos estáticos de D respecto de los ejes coordenados

El punto material (x, y) del esquema tiene un $d(\text{masa}) = \delta(x, y)\,dx\,dy$, representando a cada uno de los puntos de una chapa plana D.
Los diferenciales de momentos estáticos de este punto respecto de los ejes coordenados son, por definición,

$$d(\mathrm{M}_x) = y\,\delta(x, y)\,dx\,dy \quad \text{y} \quad d(\mathrm{M}_y) = x\,\delta(x, y)\,dx\,dy\,.$$



Es decir, el producto del diferencial de masa por la "posición" del punto respecto de cada eje.

Los respectivos **momentos estáticos** de la chapa D respecto de los ejes coordenados son:

$$\mathrm{M}_x(D) = \iint_D y\,\delta(x, y)\,dx\,dy \quad \text{y} \quad \mathrm{M}_y(D) = \iint_D x\,\delta(x, y)\,dx\,dy\,.$$

Interesa determinar la posición de un punto material que, concentrando en él la masa de la placa, tenga los mismos momentos estáticos de la placa respecto de los ejes coordenados. Este punto se denomina **centro de masa de la placa**, lo denotaremos como el punto $G=(x_G, y_G)$.
Dada su definición, debe cumplirse que $\mathrm{M}_x(D) = y_G\,\text{masa}(D)$ y $\mathrm{M}_y(D) = x_G\,\text{masa}(D)$, de donde, las coordenadas del centro de masa se calculan mediante las siguientes expresiones.

$$x_G = \frac{\mathrm{M}_y(D)}{\text{masa}(D)} = \frac{\iint_D x\,\delta(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \delta(x,y)\,dx\,dy} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{\mathrm{M}_x(D)}{\text{masa}(D)} = \frac{\iint_D y\,\delta(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \delta(x,y)\,dx\,dy}$$

Momentos de inercia de D respecto de los ejes coordenados y del origen de coordenadas

La inercia se calcula como el producto de "distancia^2 por masa". De esta manera, un punto material (x, y) con $d(\text{masa}) = \delta(x, y)\,dx\,dy$, tiene los siguientes "diferenciales de inercia":

respecto del eje x: $d(\mathrm{I}_x) = y^2\,d(\text{masa})$, respecto del eje y: $d(\mathrm{I}_y) = x^2\,d(\text{masa})$

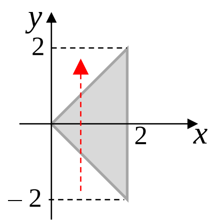
y respecto del origen de coordenadas: $d(\mathrm{I}_0) = (x^2 + y^2)\,d(\text{masa})$.

Los correspondientes momentos de inercia de la chapa plana D son:

$$\mathrm{I}_x(D) = \iint_D y^2\,\delta(x,y)\,dx\,dy\ ,\quad \mathrm{I}_y(D) = \iint_D x^2\,\delta(x,y)\,dx\,dy \quad \text{e} \quad \mathrm{I}_0(D) = \iint_D (x^2+y^2)\,\delta(x,y)\,dx\,dy\,,$$

$\mathrm{I}_0(D)$ también se denomina momento de inercia polar de la chapa plana D.

Ejemplo: Determine las coordenadas del centro de masa de la chapa plana D sombreada en la figura, si su densidad de masa en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje y.



Como la distancia desde un punto (x,y) al eje y es igual a $|x|$, en este caso la densidad resulta $\delta(x,y)=k|x|$, donde $k>0$ es la constante de proporcionalidad.

Dado que todos los puntos de D tienen coordenada $x \geq 0 \ \Rightarrow |x| = x$, con lo cual la expresión de la densidad superficial de masa es $\delta(x,y) = k|x| \underset{x\geq 0}{=} k\,x$.

Por otra parte –observando el dibujo– en el sentido creciente del eje y (ver línea de puntos orientada en color rojo), es claro que la recta frontera inferior de D tiene ecuación $y=-x$ mientras que la superior es $y = x$. Así, una integral doble planteada en esta región es:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_{-x}^{x} f(x,y)\,dy\,.$$

Con esto podemos calcular las integrales necesarias para determinar las coordenadas del centro de masa.

$$\text{masa}(D) = \iint_D \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \underbrace{\int_{-x}^{x} k\,x\,dy}_{k\,x[y]_{-x}^{x}} = 2k\int_0^2 x^2 dx = \tfrac{16}{3}k$$

$$\mathrm{M}_x(D) = \iint_D y\,\delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \underbrace{\int_{-x}^{x} y\,k\,x\,dy}_{\frac{1}{2}k\,x[y^2]_{-x}^{x}} = k\int_0^2 0\,dx = 0$$

$$\mathrm{M}_y(D) = \iint_D x\,\delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \underbrace{\int_{-x}^{x} x\,k\,x\,dy}_{k\,x^2[y]_{-x}^{x}} = 2k\int_0^2 x^3\,dx = 8k$$

Entonces resultan $x_G = \dfrac{8k}{\frac{16}{3}k} = \dfrac{3}{2}$ e $y_G = \dfrac{0}{\frac{16}{3}k} = 0$.

En centro de masa de la chapa es el punto $G=(3/2,0)$.

El centro de masa puede ser un punto que no pertenece a la placa

Ejercicio: Sea la chapa plana D con densidad $\delta(x,y) = k\,y^2$, $k>0$ constante, limitada por las parábolas de ecuaciones $y = 2x^2$ e $y = x^2+1$. Grafique D y verifique que el centro de masa es el punto $G=(0,8/7)$, que no pertenece a D.

Los temas correspondientes al T.P. VIII continúan en la síntesis S-8B