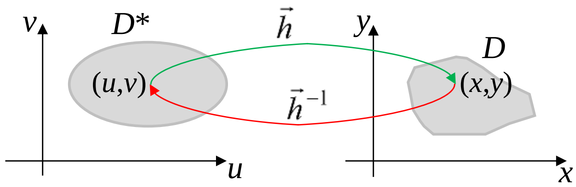
Esta síntesis <u>no es un apunte</u> de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

Cambio de variables en integrales dobles

Dada la integral $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, se desea calcularla aplicando el cambio de variables definido por:

$$(x,y) = \underbrace{(x(u,v),\, y(u,v))}_{\vec{h}(u,v)}$$



Denotando $J(u,v) = \det(D\vec{h}(u,v))$ al ***jacobiano de la transformación***, si se cumple que:

(a) f es integrable en D.

(b) $\vec{h} \in C^1$ en un conjunto abierto que incluya a D^*.

(c) $J(u,v) \neq 0$ en todo punto de D^*.

(d) Existe $\vec{h}^{-1}$ tal que $\forall (x,y) \in D,\ \vec{h}^{-1}(x,y) = (u,v) \in D^*$.

Entonces,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(\vec{h}(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv\,, \tag{1}$$

que es la denominada ***fórmula de cambio de variables en integrales dobles***.

<u>Nota</u>: La fórmula (1) es válida, aunque las hipótesis (c) y/o (d) no se cumplan, siempre que eso ocurra en conjunto de área nula de D^*.

El jacobiano es el determinante de la matriz jacobiana de $\vec{h}$ y también se lo denota $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, es decir:

$$J(u,v) \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix} = x'_u(u,v)\,y'_v(u,v) - x'_v(u,v)\,y'_u(u,v)\,.$$

Queda por analizar cómo se procede para hallar la región D^* del plano *uv*, teniendo como dato la región de integración D el plano *xy*.

Bajo las hipótesis indicadas:

- Los puntos frontera de D^* tienen como imagen, a través de $\vec{h}$, los puntos frontera de D. Es decir, $\partial D = \vec{h}(\partial D^*)$. También $\partial D^* = \vec{h}^{-1}(\partial D)$, o sea, ∂D^* es la imagen de ∂D a través de $\vec{h}^{-1}$.
- Los puntos interiores de D^* tienen como imagen –a través de $\vec{h}$ – puntos interiores de D y, dada la correspondencia entre fronteras, también el exterior de D^* se corresponden con el de D.

Así, partiendo de ∂D en el plano *xy*, se obtiene ∂D^* en el plano *uv*. Dado que el interior de D se corresponde con el de D^*, y también sus exteriores, con ello se determina D^*.

Cambio de variables mediante una transformación lineal

En este caso $\vec{h}$ es una transformación lineal, es decir,

$$(x,y)=\underbrace{(a\,u+b\,v,\,c\,u+p\,v)}_{\vec{h}(u,v)}\equiv\begin{cases}x=a\,u+b\,v\\ y=c\,u+p\,v\end{cases},\text{ donde } a,b,c,p \text{ son constantes.}$$

Siendo $J(u,v)\equiv\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & p\end{vmatrix}=a\,p-c\,b$, debe cumplirse que $J(u,v)=a\,p-c\,b\neq 0$. Entonces,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*} f(a\,u+b\,v,\,c\,u+p\,v)\,|\,a\,p-c\,b\,|\,du\,dv\,.$$

En particular:

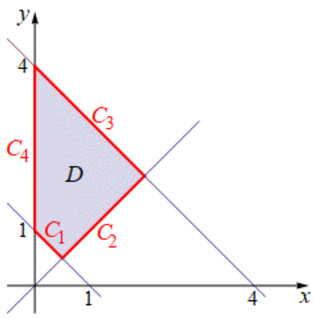
$$\text{área}(D)=\iint_D dx\,dy=\iint_{D^*}\underbrace{|\,a\,p-c\,b\,|}_{\text{constante}}\,du\,dv=|\,a\,p-c\,b\,|\iint_{D^*}du\,dv=|\,a\,p-c\,b\,|\,\text{área}(D^*)\,.$$

Así, cuando se aplica una transformación lineal, $|\,J(u,v)\,|$ es constante y establece la relación entre áreas de las regiones de integración en ambos planos.

<u>Ejemplo</u>: Calcule $\iint_D (x+2\,y)\,dx\,dy$ cuando $D=\{(x,y)\in\Re^2\,/\,1\leq x+y\leq 4,\ y\geq x,\ x\geq 0\}$.

En la figura de la derecha se representa la región D que se especifica en el enunciado.
Vamos a resolver la integral aplicando el cambio de variables definido por la transformación lineal:

$$\begin{cases}x+y=v\\ u=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=v-u\\ y=u\end{cases}.\qquad(\#)$$



El cambio de variables es el que define las variables actuales en función de las nuevas, es decir, $(x,y)=\underbrace{(v-u,u)}_{\vec{h}(u,v)}$

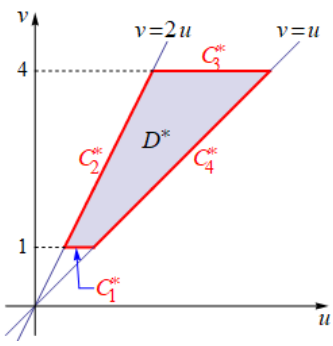
En este caso $J(u,v)\equiv\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\Rightarrow|\,J(u,v)\,|=|-1|=1$. Por ahora nos queda:

$$\iint_D (x+2\,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*}((v-u)+2u)\,|-1|\,du\,dv=\iint_{D^*}(u+v)\,du\,dv$$

Ahora aprovechemos la numeración de los trozos de frontera de D, que se indica en color rojo en el dibujo, recorriendo la frontera de D. Conviene numerar en forma consecutiva, en uno u otro sentido del recorrido. Para cada C_k determinaremos el correspondiente C_k^* de la frontera de D^*.

En todos los casos aplicamos las relaciones establecidas en (#).

$$\begin{array}{lcl}C_1: x+y=1 & \xleftrightarrow{(\#)} & v=1\ : C_1^*\\ C_2: y=x & \xleftrightarrow{(\#):\,u=v-u} & v=2u\ : C_2^*\\ C_3: x+y=4 & \xleftrightarrow{(\#)} & v=4\ : C_3^*\\ C_4: x=0 & \xleftrightarrow{(\#):\,0=v-u} & v=u\ : C_4^*\end{array}$$



Con lo cual podemos dibujar D^*, resultando:

$$\iint_{D^*}(u+v)\,du\,dv=\int_1^4 dv\int_{v/2}^{v}(u+v)\,du$$

Vemos que los C_k^* también aparecen en forma consecutiva, pero puede cambiar el sentido de giro.

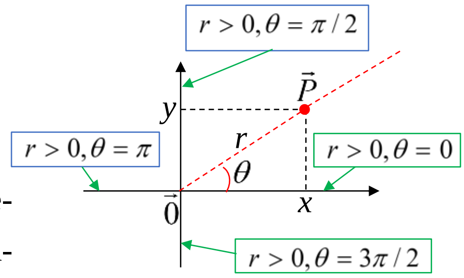
Finalizando los cálculos resulta:

$$\iint_{D^*} (u+v)\,du\,dv = \int_1^4 dv \underbrace{\int_{v/2}^{v} (u+v)\,du}_{[\frac{1}{2}u^2+uv]_{v/2}^{v}} = \int_1^4 (\tfrac{7}{8}v^2)\,dv = 147/8\,.$$

Coordenadas polares

Observe el dibujo de la derecha, en él se identifican:

- un punto $\vec{P}$ del plano.
- la semirrecta $\overrightarrow{OP}$, con origen en $\vec{0}$ y que pasa por $\vec{P}$.
- la distancia $r = \|\vec{P}-\vec{0}\| = \sqrt{x^2+y^2}$, desde $\vec{P}$ al origen $\vec{0}$.
- el ángulo $\theta = \widehat{\overrightarrow{0P}, x^+}$ que forma la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ con el semieje positivo de las x, medido desde x^+ hacia $\overrightarrow{OP}$ en sentido antihorario.



Se dice que el punto $\vec{P}$ se especifica en coordenada polares cuando se lo ubica en función de los valores de r y θ.

En ese caso, es claro que las coordenadas cartesianas del punto son: $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$ con $0 \le \theta < 2\pi$, $r \ge 0$.

Puesto en forma vectorial $(x,y) = \underbrace{(r\cos(\theta),\, r\,\mathrm{sen}(\theta))}_{\vec{h}(\theta,r)}$ con $0 \le \theta < 2\pi$, $r \ge 0$.

Expresiones que permiten plantear un cambio de coordenadas en una integral doble, para pasar de un planteo inicial en coordenadas cartesianas a otro en coordenadas polares.
En este caso, el jacobiano de la transformación es:

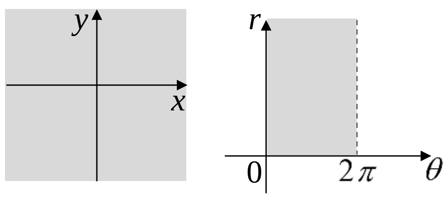
$$J(\theta,r) \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,r)} = \begin{vmatrix} -r\,\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ r\cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \end{vmatrix} = -r\,[\mathrm{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta)] = -r \;\;\Rightarrow\;\; |J(r,\theta)| = |-r| \overset{r\ge 0}{=} r\,.$$

Con lo cual, según (1), la fórmula de cambio de variables de cartesianas a polares resulta ser:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(r\cos(\theta),\, r\,\mathrm{sen}(\theta))\; r\,dr\,d\theta\,.$$

Antes de hacer ejemplos conviene observar nuevamente el dibujo, donde se hacen notar “con flechas color verde” los valores típicos de coordenadas polares que les corresponden a puntos sobre los ejes cartesianos.
En particular, al origen de coordenadas le corresponde $r=0$ con θ sin definir.

Todos los puntos del plano *xy* se corresponden con el intervalo $[0,2\pi)\times[0,\infty)$ del plano θr.
Además, a cada punto $(\theta,0)$ con $0 \le \theta < 2\pi$ del plano θr, le corresponde una única imagen $\vec{h}(\theta,0) = (0,0)$ del plano *xy*, es decir, $\vec{h}$ no tiene función inversa en puntos de dicho segmento.



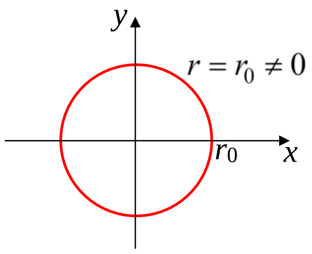
Aun así, la fórmula de cambio de variables es válida porque esto ocurre en conjunto de área nula, al igual que la anulación del jacobiano para $r=0$.

Corresponde aclarar que el ángulo puede medirse en sentido trigonométrico. Es decir, partiendo desde x^+, con valores positivos para sentido de giro antihorario y valores negativos en el sentido opuesto.
En muchos casos es más cómodo trabajar con $-\pi < \theta \le \pi$, en lugar de utilizar $0 \le \theta < 2\pi$.

Líneas coordenadas de polares en el plano xy

Las líneas coordenadas de polares en el plano *xy*, son las que se obtienen en dicho plano dejando una de las coordenadas θ o r constantes.

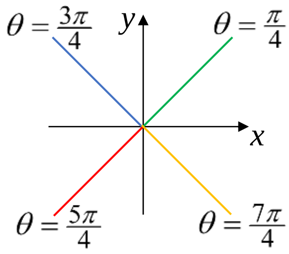
Dada su definición, según se observa en lo gráficos de la derecha, las mencionadas líneas son:



- Línea de $r = r_0 \neq 0$:

  Es una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r_0^2$, con centro en el origen y radio r_0.

  En particular $r = 0$, se corresponde con el punto $(0,0)$.



- Línea de $\theta = \theta_0$:

  Es una semirrecta con origen en $(0,0)$, que forma un ángulo de medida θ_0 con el semieje positivo de abscisas (x^+).

  Se indican cuatro ejemplos para $\theta \in [0,2\pi)$, todas contienen al origen de coordenadas.

  Los ángulos correspondientes a los semiejes se indican en el primer dibujo de la página anterior ($0, \frac{\pi}{2}, \pi$ y $\frac{3\pi}{2}$).

Como se indicó antes, el cambio de variables viene definido por: $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$ con $0 \le \theta < 2\pi$, $r \ge 0$.

Las expresiones inversas, las que dadas x e y permiten obtener los valores de r y θ para el caso que se trabaje con $0 \le \theta < 2\pi$, son:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \mathrm{arctg}(y/x) & \text{si } x \neq 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0 \wedge y > 0 \\ 3\pi/2 & \text{si } x = 0 \wedge y < 0 \end{cases} \end{cases}, \quad \theta \text{ no queda definido para } (x,y) = (0,0).$$

Cuando trabajemos con $-\pi < \theta \le \pi$, para $x = 0 \wedge y < 0$ corresponde: $\theta = -\pi/2$.

Se debe tener especial cuidado con la expresión $\theta = \mathrm{arctg}(y/x)$, porque “arctg” <u>no representa al arco-tangente principal</u>, es decir, **<u>no es</u>** <u>el tan^{-1} de la calculadora</u>. **Debemos observar el sector del plano** *xy* en el que estamos trabajando.

Por ejemplo, al punto $(x_1, y_1) = (2,2)$ le corresponde el $(\theta_1, r_1) = (\pi/4, \sqrt{8})$. En ese caso se cumple que, usando la calculadora $\tan^{-1}(2/2) = \tan^{-1}(1) = \pi/4$.

Pero para el punto $(x_2, y_2) = (-2,-2)$ le corresponde el $(\theta_1, r_1) = (5\pi/4, \sqrt{8})$, ver semirrecta en color rojo del gráfico anterior. Aun así, la calculadora nos seguiría dando $\tan^{-1}(-2/-2) = \tan^{-1}(1) = \pi/4$ **que no es lo correcto**.

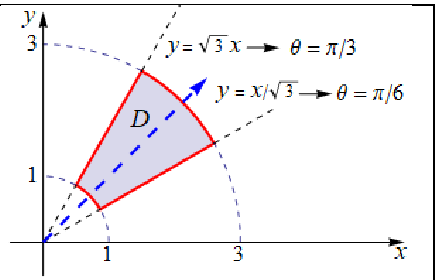
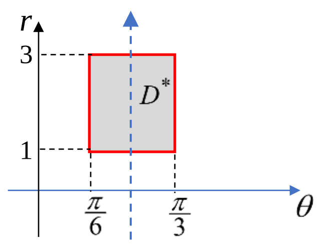
El “ tan^{-1} ” o “arco-tangente principal”, por definición, siempre produce resultados en $(-\pi/2, \pi/2)$. **No reconoce** en qué sector del plano *xy* está el punto, y no está definido para puntos del tipo $(0, y)$.

Sólo a modo de información, porque observando el gráfico alcanza, comentamos:

> Si bien es una función menos conocida se podría haber indicado $\theta = \operatorname{atan2}(x, y)$ que –como tiene los dos argumentos– reconoce la ubicación en el plano *xy*, devolviendo el valor correcto, aun para puntos del tipo $(0, y)$.
>
> Muchos utilitarios disponen de esta función, se puede obtener información en línea al respecto. Tener cuidado porque algunos piden los argumentos en distinto orden, es decir $\theta = \operatorname{atan2}(y, x)$ en lugar de $\theta = \operatorname{atan2}(x, y)$, también se usan formatos diferentes: con ";" en lugar de ",", con "[ ]" en lugar de "( )". Hay que leer la ayuda de cada utilitario, incluso para el tipo de respuesta que devuelve, lo común es que devuelva ángulos en el intervalo $(-\pi, \pi]$.
>
> Para el formato $\theta = \operatorname{atan2}(x, y)$ y $\theta \in (-\pi, \pi]$, algunos ejemplos son:
>
> $\operatorname{atan2}(2,2) = \pi/4$, $\operatorname{atan2}(-2,-2) = -3\pi/4$,
>
> $\operatorname{atan2}(0,5) = \pi/2$, $\operatorname{atan2}(0,-5) = -\pi/2$.

Veamos cómo evitamos la mayoría de estos problemas, simplemente observando el gráfico

<u>Ejemplo básico</u>: Cuando la región está entre líneas coordenadas, los límites en polares resultan constantes.

La región D de la figura, en el 1º cuadrante, está limitada por: ○ Dos semirrectas de ecuaciones $y = x/\sqrt{3}$ e $y = \sqrt{3}\,x$, con $x > 0$. ○ Dos circunferencias de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 3^2$. Deseamos resolver $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$, aplicando un cambio de variables de cartesianas a polares.	
Teniendo en cuenta las líneas coordenadas, la correspondiente región D^* en el plano θr tiene como bordes las líneas: $r = 1$, $r = 3$, $\theta = \pi/6$ y $\theta = \pi/3$, la cual se representa en el gráfico de la derecha. Se deja como ejercicio numerar C_1 a C_4 la frontera de D y reconocer las C_1^* a C_4^* en la frontera de D^*.	

Observando esta última, con la forma habitual de poner límites en integrales dobles, corresponde:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta))\,r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta \int_1^3 f(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta))\,r\,dr.$$

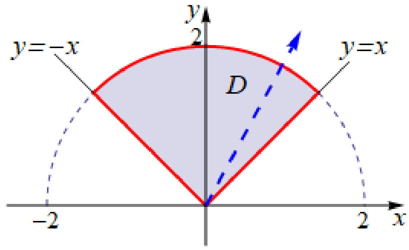
Los límites en polares podríamos haberlos identificados sin necesidad de hacer la representación de D^*, alcanza con observar la región D en el plano xy.

Es claro que está entre las semirrectas de $\theta = \pi/6$ y $\theta = \pi/3$. Además, una semirrecta de $\theta = \text{cte}$ en el sentido creciente de r (ver línea azul punteada), "entra" a D por la línea de $r = 1$ y "sale" por la de $r = 3$.

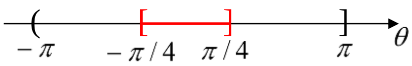
En general esto es suficiente para poner los límites de polares, veamos algunos ejemplo más para fijar ideas al respecto.

<u>Ejemplos</u>: Dada la integral en D del plano xy, plantear el cálculo para resolverla en coordenadas polares.

- $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^2 f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\,r\,dr$$

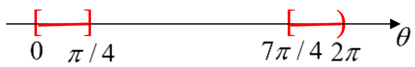


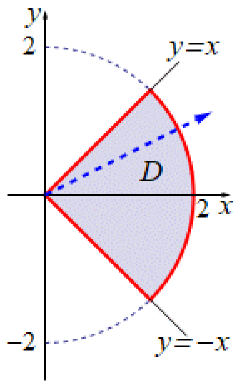
- $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^2 f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\,r\,dr\,,$$



o bien, la siguiente suma:

$$\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^2 f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\,r\,dr \;+$$
$$+\int_{7\pi/4}^{2\pi} d\theta \int_0^2 f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\,r\,dr$$





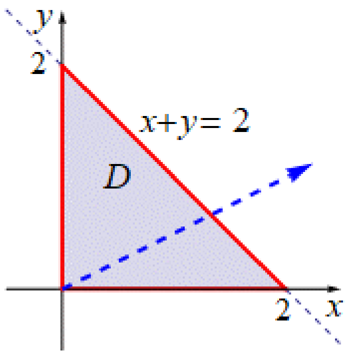
Está mal poner: $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_{7\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^2 f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\,r\,dr$$

El límite inferior debe ser menor que el superior

- En este caso, $x+y=2$ pasada a polares –por simple reemplazo– es: $r\cos(\theta)+r\,\mathrm{sen}(\theta)=2$. De donde, $r=\frac{2}{\cos(\theta)+sen(\theta)}$.

  Entonces queda:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos(\theta)+\mathrm{sen}(\theta)}} f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\,r\,dr$$



<u>Ejemplo</u>: Calcule el área de un círculo D de radio R, con $R>0$. Por comodidad lo centramos en el origen de coordenadas y queda definido por $x^2+y^2 \le R^2$.

$$\text{área}(D) = \iint_D dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^R r\,dr}_{\frac{1}{2}[r^2]_0^R} = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}R^2\,d\theta = \tfrac{1}{2}R^2\,[\theta]_0^{2\pi} = \pi R^2\,.$$

Se invita a realizar el gráfico para visualizar los límites de integración que se indican.

Se sugiere resolver la integral en cartesianas, es bastante instructivo, no olvide que puede utilizar tablas de integrales.

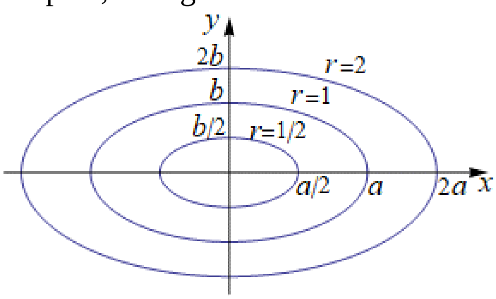
Coordenadas polares generalizadas

Son para lograr que las líneas coordenadas de r constante resulten elipses, en lugar de circunferencias.

Se definen mediante $\begin{cases} x = a\,r\cos(\theta) \\ y = b\,r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$ con $a, b \in \Re^{+}$ constantes,

$r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, o bien, $-\pi < \theta \leq \pi$. Es decir,

$$(x, y) = \underbrace{(a\,r\cos(\theta),\, b\,r\,\mathrm{sen}(\theta))}_{\vec{h}(\theta, r)}.$$



En este caso resulta $|\, J(\theta, r)\,| \equiv |\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,r)}| = a\,b\,r$, con lo cual:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(a\,r\cos(\theta),\, b\,r\,\mathrm{sen}(\theta))\; a\,b\,r\,dr\,d\theta\,.$$

Para $r = 0$ le corresponde $\vec{h}(\theta, 0) = (0,0)$, ídem polares.

Para $r \neq 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a\,r} = \cos(\theta) \\ \frac{y}{b\,r} = \mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$, de donde: $\frac{x^2}{(a\,r)^2} + \frac{y^2}{(b\,r)^2} = 1$ que, a r constante, es la ecuación de una elipse.

En el gráfico superior se representan casos de r constante y no nulo. En particular, para $r = 1$ se obtiene la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ejemplo: Calcule el área de la región plana D definida por $x^2 + 8\,y^2 \leq 16$.

La frontera de D es $x^2 + 8\,y^2 = 16$, su forma canónica es $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$.

Entonces usamos $\begin{cases} x = 4\;r\cos(\theta) \\ y = \sqrt{2}\;\;r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$, con $|\, J(\theta, r)\,| = 4\sqrt{2}\,r$.

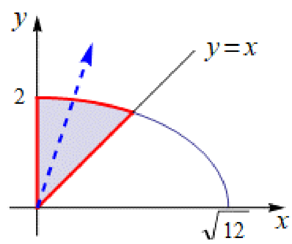
$$\text{área}(D) = \iint_D dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^1 4\sqrt{2}\,r\,dr}_{2\sqrt{2}\,[r^2]_0^1} = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\,d\theta = 4\pi\sqrt{2}\,.$$

Siempre que expresemos la elipse en forma canónica, a ella le corresponde $r = 1$.

Ejercicio: Verifique que si D está definida por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, resulta $\text{área}(D) = \pi\,a\,b$.

Ejemplo: Calcule el área de la región plana D definida por $x^2 + 3\,y^2 \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq x$.

La región D es la sombreada en la figura.



$x^2 + 3\,y^2 = 12 \rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{12})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$. Aplicando $\begin{cases} x = \sqrt{12}\;r\cos(\theta) \\ y = 2\,r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$,

resulta $|\, J(\theta, r)\,| = 2\sqrt{12}\;r = 4\sqrt{3}\,r$.

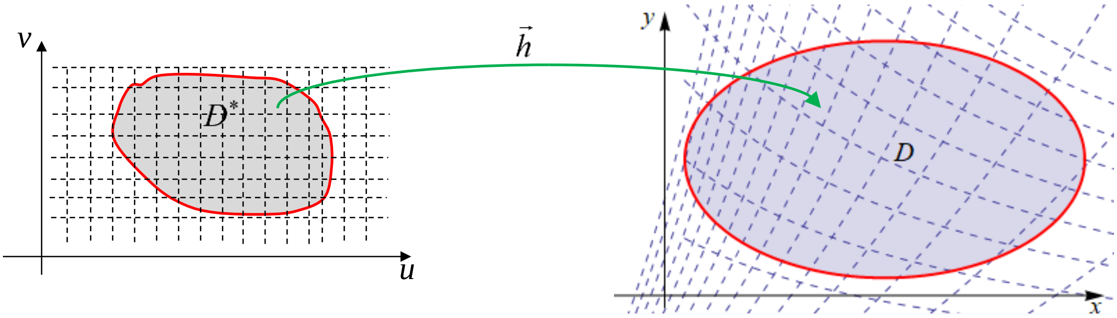
$$y = x \rightarrow \sqrt{12}\;r\cos(\theta) = 2\;r\,\mathrm{sen}(\theta) \xrightarrow{r>0} tg(\theta) = \sqrt{3} \xrightarrow{1^{\circ}\,\text{cuad.}} \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{área}(D) = \iint_D dx\,dy = \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta \underbrace{\int_0^1 4\sqrt{3}\,r\,dr}_{2\sqrt{3}\,[r^2]_0^1} = \int_{\pi/3}^{\pi/2} 2\sqrt{3}\,d\theta = 2\sqrt{3}\,\pi/6 = \;\pi/\sqrt{3}\,.$$

Observe que, en este sistema, a $y = x$ en 1º octante no le corresponde $\theta = \pi/4$, pues $y/x \neq \mathrm{tg}(\theta)$.

Una interpretación geométrica del procedimiento de cambio de variables en integrales dobles

En el gráfico se representa la región D^* del plano *uv* cuya imagen, a través de $\vec{h}$, es la región D del plano *xy* donde originalmente queremos resolver la $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$. Con $\vec{h}(u,v) = (\,x(u,v), y(u,v)\,)$.



Cuando integramos en D^*, un reticulado con paralelas a los ejes coordenados tiene como imagen las líneas:

a) C_{u_0}, de $u = u_0$ constante, con ecuación $\vec{X} = \vec{h}(u_0,v)$ con $(u_0,v) \in H^*$ y $D^* \subset H^*$.

b) C_{v_0}, de $v = v_0$ constante, con ecuación $\vec{X} = \vec{h}(u,v_0)$ con $(u,v_0) \in H^*$ y $D^* \subset H^*$.

donde H^* es un rectángulo en el plano *uv*. [1]

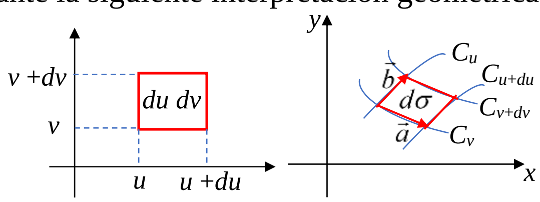
Ahora la subdivisión de la región D del plano *xy*, deja de realizarse con paralelas a los ejes coordenados, se subdivide en sectores "σ" delimitados entre líneas coordenadas de *u* y *v* constantes.

Para cada $(u,v) \in D^*$ le corresponde un $\vec{h}(u,v) \in D$, donde f adopta el valor $f(\vec{h}(u,v))$ al que debemos multiplicar por el área del "σ" correspondiente (el correspondiente trozo de D) y "sumar". Integrando en D^* se consideran todas las partes en las que subdivide D, logrando la integral en D. Así,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(\vec{h}(u,v))\,d\sigma \qquad \text{(I)}$$

Donde $d\sigma$ es el diferencial de área del plano xy, el que se corresponde con el diferencial de área "$du\,dv$" del plano *uv*. Veamos cómo podemos obtener el $d\sigma$ mediante la siguiente interpretación geométrica.

El área $d\sigma$ es la de la región comprendida entre líneas coordenadas separadas por un diferencial de la variable correspondiente.
Los pequeños trozos de curva se pueden rectificar en la dirección de la tangente, similar a lo hecho para integrales de línea de campo vectorial.



Para C_v corresponde $\vec{a} = d\vec{s}_v = \vec{h}'_u(u,v)\,du$ (el diferencial vectorial de longitud de arco de la curva de *v* constante).

Para C_u corresponde $\vec{b} = d\vec{s}_u = \vec{h}'_v(u,v)\,dv$ (el diferencial vectorial de longitud de arco de la curva de *u* constante).

El área $d\sigma$ es la del paralelogramo de bordes rojos en el plano *xy*, que podemos calcularla como el valor absoluto del producto vectorial de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, suponiendo que los vectores tienen una tercera componente nula.

$$\text{Es decir, } d\sigma = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ x'_u\,du & y'_u\,du & 0 \\ x'_v\,dv & y'_v\,dv & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left| \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} du\,dv \right| = \left| \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \right| du\,dv = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv = |\,J(u,v)\,|\,du\,dv$$

Que reemplazada en (I) genera la fórmula de cambio de variables. Se tuvo en cuenta que una matriz cuadrada y su traspuesta tienen igual determinante y que *du* y *dv* son incrementos positivos de las variables.

Los temas correspondientes al T.P. VIII continúan en la síntesis S-8C

[1] Recuerde la presentación de integrales dobles en regiones más generales, ver pág. 3/7 de las síntesis S-8A.