Esta síntesis <u>no es un apunte</u> de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

Integral triple

Sea $f : H = [a,b]\times[c,d]\times[e,p] \subset \Re^3 \to \Re$, con f acotada en el intervalo H, a este cuerpo H también se lo denomina paralelepípedo rectangular con caras paralelas a los planos coordenados.

En la figura se representa al cuerpo H, subdividido en subintervalos $H_{i,j,k}$ mediante una partición $P = P_1 \times P_2 \times P_3$, donde:

$$P_1 = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\},$$
$$P_2 = \{c = y_0, y_1, \cdots, y_m = d\},$$
$$P_3 = \{e = z_0, z_1, \cdots, z_l = p\},$$

son particiones de los intervalos $[a,b]$, $[c,d]$ y $[e,p]$ respectivamente. Geométricamente, estamos seccionando H con planos paralelos a los planos coordenados.

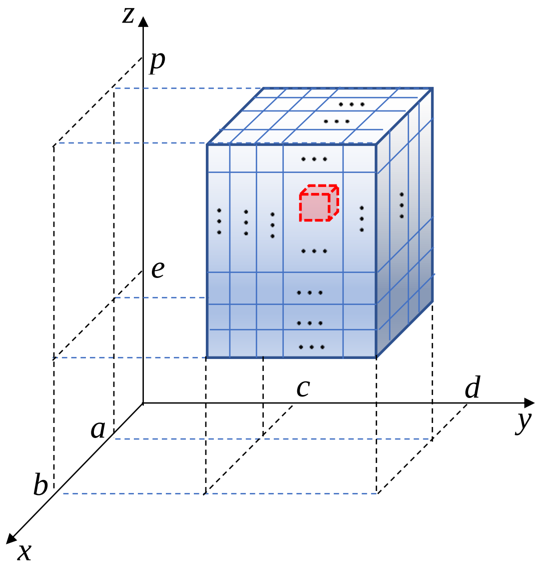
Un $H_{i,j,k}$ genérico, representado en color rojo, es:

$$H_{i,j,k} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]\times[z_{k-1}, z_k]$$

con $i = 1,\cdots,n$, $j = 1,\cdots,m$ y $k = 1,\cdots,l$, siendo su volumen:

$$\operatorname{vol}(H_{i,j,k}) = \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k,$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ y $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.



Para cada $H_{i,j,k}$ calculemos el producto $f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k$, donde $(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)$ es un punto cualquiera del $H_{i,j,k}$, y luego sumemos para todos los subintervalos. Es decir, consideremos la siguiente suma:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k\,,$$

que es una *suma triple* para contemplar a todos los $H_{i,j,k}$, con $i = 1,\cdots,n$, $j = 1,\cdots,m$ y $k = 1,\cdots,l$.

Denotando con $\delta_{i,j,k} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2 + (\Delta z_k)^2}$ al *diámetro* del $H_{i,j,k}$, la **norma de la partición *P*** es $\delta = \text{máx}\{\delta_{i,j,k}\,,\ i = 1,\cdots,n\,,\ j = 1,\cdots,m\,,\ k = 1,\cdots,l\}$.

Cuando existe y es finito el límite que se indica,

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k \doteq \iiint_H f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

es la **integral triple** de f en H.

Siendo x, y, z variables independientes, desde el punto de vista geométrico, cada diferencial (d*x* o d*y* o dz) representa la longitud de un pequeño incremento de la variable, tan pequeño como podamos imaginarlo.
Por su parte, $d(\text{vol}) = dx\, dy\, dz$ representa el volumen de un subintervalo tan pequeño como podamos imaginarlo.

Así, $\iiint_H f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ se interpreta como el resultado de la "suma de los $f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$" extendida a cada punto de H.

Integral triple en regiones más generales

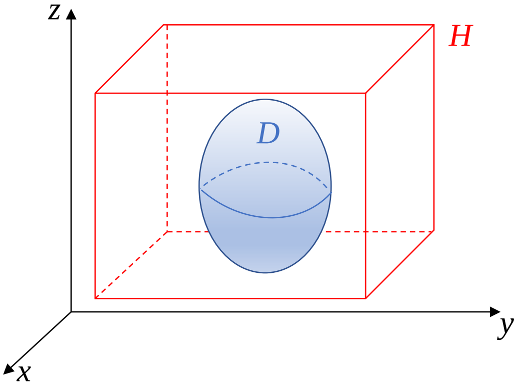
Sea $f : D \subset \Re^3 \to \Re$, con f acotada en D. Supongamos además que D es un conjunto acotado con frontera ∂D de volumen nulo, desde el punto de vista práctico esto se cumple cuando la frontera es la unión de una cantidad finita de trozos de superficie.
En forma similar a lo comentado para integrales dobles, pero ahora en $\Re^3$, corresponde.

Dado que D es acotado se lo puede incluir en un rectángulo $H = [a,b] \times [c,d] \times [e,p]$, como se indica en la figura.
En estas condiciones se define una función ψ tal que:

$$\psi(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{si} \quad (x,y,z) \in D \\ 0 & \text{si} \quad (x,y,z) \in H - D \end{cases}.$$

Se dice que f es integrable en D cuando ψ lo es en H, resultando –por definición– que:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_H \psi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

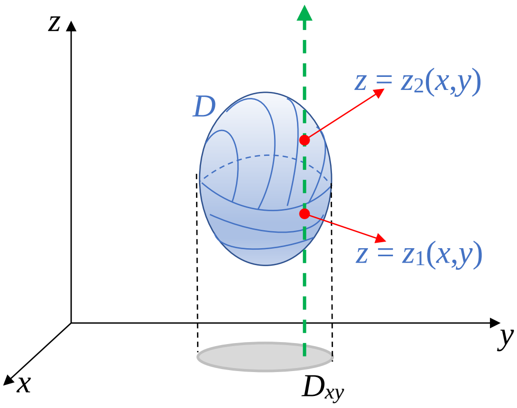


La fórmula de cálculo para *H* es similar a la expuesta para integrales dobles (teorema de Fubini), pero ahora con tres integrales simple sucesivas. Este planteo, a regiones más generales, permite extender esa forma de cálculo a las denominadas regiones simples *RS*1, *RS*2 y *RS*3 en tres dimensiones.

Caso de *RS*1, o cuerpo simple respecto del plano *xy*

En este caso el cuerpo D es del tipo *RS*1, pues:

- Si lo proyectamos contra el plano xy resulta una región D_{xy} tal que, una paralela al eje z (ver línea color verde) trazada desde cualquier punto interior a ella –en forma creciente de z– interseca a la frontera de D en a lo sumo dos puntos:
$$(x,y,z_1(x,y)) \quad \text{y} \quad (x,y,z_2(x,y))$$
respectivamente.
- Las funciones z_1 y z_2 son continuas en D_{xy}.
- La región D_{xy}, del plano xy, es acotada y con frontera de área nula.



En estas condiciones, siendo f integrable en D resulta:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,.$$

Es decir, se integra $f(x,y,z)$ respecto de z suponiendo x e y constantes, y al resultado (que resultará en general una función de x e y) se lo integra en D_{xy} con los métodos habituales para integrales dobles.

En forma análoga se puede trabajar para los cuerpos tipo *RS*2 (simple respecto del plano *xz*) y *RS*3 (simple respecto del plano *yz*). Un cuerpo tipo *RS*4 es el que es simple respecto de los tres planos coordenados, por ejemplo, un cuerpo esférico.

Condición de integrabilidad: Siendo f acotada y continua en un cuerpo D acotado y con frontera de volumen nulo, queda definida la integral triple de f en D.
También es integrable si f, manteniéndose acotada, presenta discontinuidades en un conjunto de volumen nulo de D. Por ejemplo, en un punto o en un arco de curva o en un trozo de superficie.

Propiedades de las integrales triples: Suponiendo f y g funciones integrables en D.

1. Si k es constante, $\iiint_D k\, f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = k \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

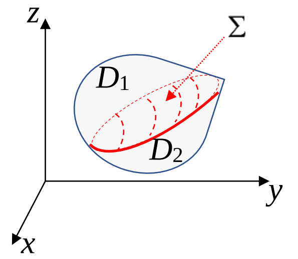
2. $\iiint_D (f(x,y,z)+g(x,y,z))\,dx\,dy\,dz = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_D g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

3. $\left|\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dydz\right| \le \iiint_D |f(x,y,z)|\,dx\,dydz$.

4. Si $D = D_1 \cup D_2$ con $\mathrm{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, entonces:

   $$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

   En el dibujo se representa el caso en que D se subdivide en dos partes (D_1 y D_2) cuya intersección es el trozo de superficie Σ que, como tal, tiene volumen nulo.



$D = D_1 \cup D_2$, $\Sigma = D_1 \cap D_2$

Esta última propiedad permite resolver integrales triples en regiones que se puedan subdividir en cantidad finita de regiones simples.

Nociones acerca de aplicaciones de las integrales triples

- Si $f(x,y,z) = 1\ \forall (x,y,z) \in D$, entonces $\boxed{\iiint_D \underbrace{dx\,dy\,dz}_{d(\mathrm{vol})} = \mathrm{vol}(D)}$ (volumen del cuerpo).

  En este caso la integral "suma los diferenciales de volumen", con lo cual, el resultado que se obtiene es el del volumen del cuerpo D.

Para otras aplicaciones supongamos un cuerpo que denominamos D y tiene la forma de la zona del espacio con la misma denominación. Si adoptamos al metro^3 (m^3) como unidad de medida del diferencial de volumen, podemos mencionar los siguientes ejemplos elementales:

- $\iiint_D \overbrace{\underbrace{f(x,y,z)}_{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}\underbrace{dx\,dy\,dz}_{m^3}}^{d(\mathrm{masa})} = \underbrace{\mathrm{Masa}(D)}_{\mathrm{kg}}$, donde f es la densidad de masa (también denotada con δ).

- $\iiint_D \overbrace{\underbrace{f(x,y,z)}_{\frac{\$}{\mathrm{m}^3}} \underbrace{dx\,dy\,dz}_{m^3}}^{d(\text{costo})} = \underbrace{\text{Costo}(D)}_{\$}$, donde f representa los \$/m^3 (costo por unidad de volumen).

Por otra parte, el **valor medio** f_{med} del campo escalar f en D, es el valor constante que debería tener para que su integral triple en D resulte de igual valor. Es decir,

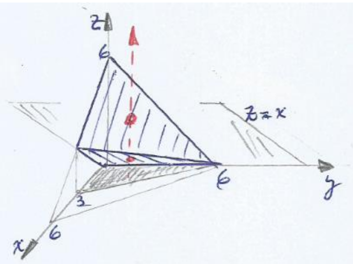
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D \underbrace{f_{\text{med}}}_{\text{constante}}\,dx\,dy\,dz = f_{\text{med}} \iiint_D dx\,dy\,dz = f_{\text{med}}\ \text{vol}(D),$$

de donde:

$$\boxed{f_{\text{med}} = \frac{1}{\text{vol}(D)} \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz} \quad \textbf{valor medio de } \boldsymbol{f} \textbf{ en D} \qquad (1)$$

<u>Ejemplo</u>: Dado $f(x,y,z) = 5xy$, calcule el valor medio de f en la región acotada D, definida por $x+y+z \le 6$, $z \ge x$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

A la derecha se muestra un esquema del cuerpo D, cuyos puntos están: desde el plano $x+y+z=6$ hacia el origen, por encima del plano $z = x$ (hacia z^+), con $x \ge 0$ e $y \ge 0$.



La curva C intersección de ambos planos es:

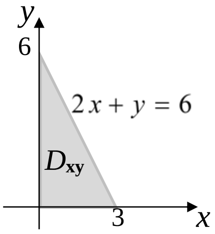
$$C : \begin{cases} x+y+z=6 \\ z = x \end{cases} \equiv \begin{cases} 2x+y=6 \\ z = x \end{cases},$$

donde se reemplazó $z = x$ de la 2º ecuación en la 1º.

Al hacer este reemplazo logramos que en una de las dos ecuaciones no figure la variable z. La curva continúa siendo la intersección de dos superficies, pero una de ellas –por no tener z en su ecuación– es perpendicular al plano xy. [(1)]

Así, la proyección de D en el plano xy es el triángulo D_{xy} representado a la derecha, limitado por:

$$x=0,\ y=0 \text{ y } 2x+y=6.$$



Entonces, $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_x^{6-x-y} f(x,y,z)\,dz$, pues –observando el esquema superior– con z creciente se entra al cuerpo por $z = x$ (límite inferior) y se sale por $z = 6-x-y$ (límite superior).

A partir de ahora podemos resolver primero la integral en z (con x e y constantes) y luego resolver la integral doble en D_{xy}, o bien, plantear ya mismo los límites de la integral doble y luego resolver todo. Hagamos esto último sólo para ver cómo queda el planteo.

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_x^{6-x-y} f(x,y,z)\,dz = \int_0^3 dx \int_0^{6-2x} dy \int_x^{6-x-y} f(x,y,z)\,dz.$$

Aquí se observa que debemos realizar tres integrales simples sucesivas, realicémoslas.

---

(1) Se dice que es una superficie proyectante. La proyección ortogonal contra el plano xy de toda línea incluida en ella, en particular C, es la traza de esta superficie en dicho plano (intersección de la misma con $z = 0$). Esta proyección la necesitamos para determinar uno de los bordes de la proyección de D contra el plano xy.

Dado que deseamos calcular el valor medio de f, para aplicar (1), tenemos que calcular dos integrales triples. Los límites ya están planteados, sólo debemos usar el integrando apropiado.

$$\mathrm{vol}(D)=\iiint_D dx\,dy\,dz=\int_0^3 dx\int_0^{6-2x} dy\underbrace{\int_x^{6-x-y} dz}_{6-2x-y}=\int_0^3 dx\underbrace{\int_0^{6-2x}(6-2x-y)\,dy}_{\underbrace{[(6-2x)\,y-\frac{1}{2}y^2]_0^{6-2x}}_{\frac{1}{2}(6-2x)^2}}=\tfrac{1}{2}\int_0^3(6-2x)^2\,dx=$$

$$=-\frac{1}{12}[(6-2x)^3]_0^3=18.$$

Ahora calculamos con $f(x,y,z)=5\,x\,y$, dada en el enunciado para hallar su valor medio.

$$\iiint_D 5\,x\,y\,dx\,dy\,dz=\int_0^3 dx\int_0^{6-2x} dy\underbrace{\int_x^{6-x-y} 5\,x\,y\,dz}_{5\,x\,y\,(6-2x-y)}=\int_0^3 dx\underbrace{\int_0^{6-2x} 5\,x[(6-2x)\,y-y^2]dy}_{5x\,[\frac{1}{2}(6-2x)\,y^2-\frac{1}{3}y^3]_0^{6-2x}}=$$

$$=\tfrac{5}{6}\int_0^3 x(6-2x)^3\,dx=81.\ ^{(2)}$$

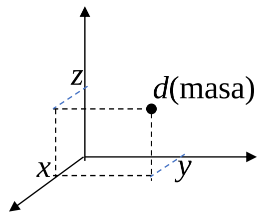
De donde, aplicando (1), resulta $\boxed{f_{\mathrm{med}}=\frac{81}{18}=9/2}$.

Ejercicio: Resuelva el cálculo del ejemplo anterior proyectando el cuerpo contra el plano *xz*, observe que una de las caras de *D* está directamente en dicho plano.

Las siguientes son otras aplicaciones en relación con un cuerpo D, con densidad de masa $\delta(x,y,z)$ en cada punto $(x,y,z)\in D$.

Momentos estáticos de D respecto de los planos coordenados

El punto material (x,y,z) del esquema tiene un $d(\text{masa})=\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, representando a cada uno de los puntos de un cuerpo D.
Los momentos estáticos de este punto respecto de los planos coordenados son:



$$d(\mathrm{M}_{xy})=z\ \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$
$$d(\mathrm{M}_{xz})=y\ \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$
$$d(\mathrm{M}_{yz})=x\ \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Es decir, el producto del diferencial de masa por la "posición" del punto respecto de cada plano.

Los respectivos **momentos estáticos** de la chapa D respecto de los planos coordenados son:

$$\mathrm{M}_{xy}(D)=\iiint_D z\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$
$$\mathrm{M}_{xz}(D)=\iiint_D y\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$
$$\mathrm{M}_{yz}(D)=\iiint_D x\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Interesa determinar la posición de un punto material que, concentrando en él la masa del cuerpo, tenga los mismos momentos estáticos respecto de los planos coordenados.

(2) Sin desarrollar el cubo, puede resolver aplicando $u=6-2x$, quedando: $\frac{5}{24}\int_0^6(6u^3-u^4)\,du=\cdots=81$.

Este punto se denomina **centro de masa del cuerpo**, lo denotaremos como el punto $G=(x_G, y_G, z_G)$.

Debe cumplirse que $\mathrm{M}_{xy}(D)= z_G\,\mathrm{masa}(D)$, $\mathrm{M}_{xz}(D)= y_G\,\mathrm{masa}(D)$ y $\mathrm{M}_{yz}(D)= x_G\,\mathrm{masa}(D)$, de donde, las coordenadas del centro de masa se calculan mediante las siguientes expresiones.

$$x_G = \frac{\mathrm{M}_{yz}(D)}{\mathrm{masa}(D)} = \frac{\iiint_D x\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},$$

$$y_G = \frac{\mathrm{M}_{xz}(D)}{\mathrm{masa}(D)} = \frac{\iiint_D y\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},$$

$$z_G = \frac{\mathrm{M}_{xy}(D)}{\mathrm{masa}(D)} = \frac{\iiint_D z\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

Momentos de inercia de D respecto de los ejes coordenados y del origen de coordenadas

La inercia se calcula como el producto de "distancia^2 por masa". De esta manera, un punto material (x, y, z) con $d(\mathrm{masa}) = \delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, tiene los siguientes "diferenciales de inercia":

$$\text{respecto del eje } x: \; d(\mathrm{I}_x) = (y^2+z^2)\,d(\mathrm{masa}),$$

$$\text{respecto del eje } y: \; d(\mathrm{I}_y) = (x^2+z^2)\,d(\mathrm{masa}),$$

$$\text{respecto del eje } z: \; d(\mathrm{I}_z) = (x^2+y^2)\,d(\mathrm{masa}).$$

$$\text{y respecto del origen de coordenadas}: \; d(\mathrm{I}_0) = (x^2+y^2+z^2)\,d(\mathrm{masa}).$$

Los correspondientes momentos de inercia del cuerpo D son:

$$\mathrm{I}_x(D) = \iiint_D (y^2+z^2)\;\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \;,\; \mathrm{I}_y(D) = \iiint_D (x^2+z^2)\;\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

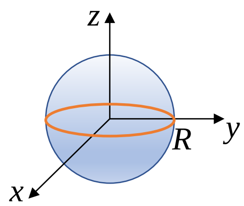
$$\mathrm{I}_z(D) = \iiint_D (x^2+y^2)\;\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \;\text{ e }\; \mathrm{I}_0(D) = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\;\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

$\mathrm{I}_0(D)$ también se denomina momento de inercia polar del cuerpo.

<u>Ejemplo</u>: Calcule el volumen de una esfera de radio R , con $R > 0$.

Para facilitar los cálculos vamos a considerar que la esfera esta centrada en el origen de coordenadas. Es decir, nuestro cuerpo D se describe mediante $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Proyectando D contra el plano xy tenemos:



$$\mathrm{vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz =$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

Es claro que D_{xy} es el círculo definido por $x^2+y^2 \le R^2$. Entonces, la integral doble podemos resolverla en polares. Es decir, $\mathrm{vol}(D) = 2\int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\;r\,dr}_{[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{3/2}]_0^R} = 2\frac{R^3}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Los temas del TP VIII se completan en la síntesis S-8D